BASIC＋STANDARD問題篇

1 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $(4+3i)(2+i)$　　(2) $(2-i)^2$　　(3) $\dfrac{4-3i}{1+2i}$

2 $|z|=3$ かつ $|z-5|=7$ を満たす複素数 z について，次の値を求めよ。

(1) $z\overline{z}$　　(2) $z+\overline{z}$

改・数学③第１回テスト　複素平面　　　　2 / 9

$\boxed{3}$ 3 点 O(0)，A$(-3+2i)$，B$(1-5i)$ について，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB を $2:1$ に内分する点，外分する点を表す複素数

(2)　△OAB の重心を表す複素数　　　　(3)　線分 AB の長さ

(4)　★∠AOB の大きさ　　　　(5)　★△OAB の面積 S

$\boxed{4}$ 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$1-\sqrt{3}\,i$　　　(2)　$-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i$　　　(3)　$-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$　　　(4)　$-3i$

$\boxed{5}$ $\alpha=4\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$，$\beta=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ **【計算練習用】**

(1)　2 つの複素数 $\alpha=1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=1+i$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。

(3)　(2)を利用して　$\sin\dfrac{\pi}{12}$，$\cos\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

改・数学③第１回テスト　複素平面　　　4 / 9

$\boxed{7}$ 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\cos\dfrac{\pi}{60}+i\sin\dfrac{\pi}{60}\right)^{20}$　　(2) $(\sqrt{3}+i)^{-12}$　　(3) $(1+i)^{17}$

$\boxed{8}$ ★　方程式 $z^4=-8-8\sqrt{3}\,i$ を解け。

改・数学③第１回テスト　複素平面　　　5 / 9

$\boxed{9}$ ★　$z=\cos\dfrac{2}{9}\pi+i\sin\dfrac{2}{9}\pi$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$1+z+z^2+\cdots\cdots+z^8$　　　　(2)　$z\cdot z^2\cdot\cdots\cdots\cdot z^8$

$\boxed{10}$　$z=4+2i$ とする。点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。

11 複素数平面上の 3 点 A$(1+3i)$，B$(-2+5i)$，C$(2-2i)$ を頂点とする $\triangle$ABC について，$\angle$BAC の大きさを求めよ。

12 $\alpha=4+3i$，$\beta=2+i$ とする。点 α を点 β を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

実戦問題篇

13 複素数平面上の点 z が条件 $2|z-i|=|z+2i|$ を満たすとき，点 z の全体は円を描く．その円の中心 α と半径 r を求めよ．

14 複素数 z が等式 $|z|=2$ を満たすとき，複素数 $w=\dfrac{z+2}{z-3}$ を表す点 Q は複素数平面上でどのような図形上にあるか。

15 複素数 α, β, γ が次の等式を満たすとき，3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする △ABC はどのような三角形か。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$　　　(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{3}\,i$

16 この問題では，複素数の偏角はすべて 0° 以上 360° 未満とする。

$\alpha=2\sqrt{2}(1+i)$ とし，等式 $|z-\alpha|=2$ を満たす複素数 z を考える。

(1) z の中で絶対値が最大となるものは $\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}\left(\boxed{ウ}+i\right)$ である。

(2) z の中で偏角が最大となるものを β とおくと，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の絶対値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ で，偏角は $\boxed{カキ}$° である。

また $\beta=\dfrac{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}-\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}+\dfrac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}+\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}i$ である。

さらに，β の偏角は $\boxed{タチ}$° である。

$1\leqq n\leqq 100$ の範囲で，β^n が実数になる整数 n は $\boxed{ツ}$ 個ある。

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ 次の関数のグラフをかけ。★また，その値域を求めよ。

(1) $y=\dfrac{2x}{x-3}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$

(2) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$ $(3 < x \leqq 5)$

(3) $y=\dfrac{4x}{2x-3}$ $\left(-3 \leqq x < \dfrac{3}{2}\right)$

(4) $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$

$\boxed{2}$ 次の関数のグラフをかけ。また，その定義域，値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x+1}$　　(2) $y=-\sqrt{x-1}$　　(3) $y=3\sqrt{2-x}$

(4) $y=\sqrt{1-x}-2$　　(5) $y=\sqrt{2x+5}$　　(6) $y=-2\sqrt{-3x+6}+1$

$\boxed{3}$ 関数 $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ $(0\leqq x\leqq 4)$ の逆関数（定義域も）を求めよ。

$\boxed{4}$ 2 つの関数 $f(x)=x+2$，$g(x)=ax^2+bx+1$ について，等式 $(g\circ f)(x)=2x^2+8x+9$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

STANDARD問題篇

$\boxed{5}$ 関数 $y=\dfrac{3x+14}{x+5}$ のグラフは，関数 $y=\dfrac{2x-5}{x-2}$ のグラフを，どのように平行移動したものか。

$\boxed{6}$ 次の条件を満たすように，定数 a，b，p，q，r の値を定めよ。

(1)　$f(x)=ax+b$，$f^{-1}(-1)=2$，$f(-1)=5$

(2)　$g(x)=px^2+qx+r\ \left(x \geqq -\dfrac{q}{2p}\right)$，$g^{-1}(0)=\dfrac{4}{3}$，$g^{-1}(2)=2$，$g^{-1}(10)=3$

$\boxed{7}$ 関数 $y=\log_2(8x+16)$ のグラフは，関数 $y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に $^{ア}\boxed{}$，

y 軸方向に $^{イ}\boxed{}$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{8}$ 関数 $y=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ の周期は，$\boxed{ア}\pi$ である。

また，この関数のグラフは，$y=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$，$y$ 軸方向に

$\boxed{エ}$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{9}$ グラフを利用して，次の不等式を解け。

(1) $\dfrac{2x-1}{x+1} \geqq -1$　　(2) $\dfrac{1}{x-1} > x+1$

$\boxed{10}$ $\sqrt{4-x^2} \geqq 2(x-1)$ を満たす x の範囲を求めよ.

11 関数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{3x+b}{x+c}$ を考える。

合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ が $(f\circ g)(x)=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

実戦問題篇

12 方程式 $2\sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}x+k$ が異なる 2 つの実数解をもつように，k のとりうる値の範囲を定めよ。

13 関数 $y=2\cos 3x$ の周期のうち正で最小のものは $\boxed{\text{アイウ}}^\circ$ である。$0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ のとき，関数 $y=2\cos 3x$ において，$y=2$ となる x は $\boxed{\text{エ}}$ 個，$y=-2$ となる x は $\boxed{\text{オ}}$ 個ある。

また，$y=\sin x$ と $y=2\cos 3x$ のグラフより，方程式 $\sin x=2\cos 3x$ は $0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ 個の解をもつことがわかる。

BASIC問題篇

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-3x+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

2 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n-3}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n^2+5n}$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n^2-3}$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n^2+1}{3n^3+4n}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n^2+1}$　　(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{5n+4}$　　(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+1}{3n^2-2}$

3 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)$

$\boxed{4}$ 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$　(2) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$　(3) $2\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$　(4) $2(\sqrt{3}-1)^n$

$\boxed{5}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-3^n}{7^n+3^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+(-6)^{n+1}}{(-6)^n-5^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3^n-5^n)$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(6^{n+1}-7^n)$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{2n}-3^{n+1})$

$\boxed{6}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 4x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}$

$\boxed{7}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

$\boxed{8}$ 次の極限を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 6x}{x}$$

$\boxed{9}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

Standard問題篇

10　次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-ax-b\right)=5$$

11　関数 $y=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$ のグラフをかけ。

12　次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$(3+\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-1)+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$$

13 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}$$

14 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\boxed{}$

実戦問題篇

15 $[a]$ は a を超えない最大の整数を表すとすると $\lim_{x \to 1-0}([2x]-2[x])=\boxed{}$

16 $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{a\cos^2 x+(3b+2)\sin x-2a+b+1}{\sin^3 x+a\cos^2 x-a}=c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ.

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-3x+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

$\boxed{2}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n-3}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n}{2n^2+5n}$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n^2-3}$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n^2+1}{3n^3+4n}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n^2+1}$　　(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{5n+4}$　　(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+1}{3n^2-2}$

$\boxed{3}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)$

$\boxed{4}$ 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$　(2) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$　(3) $2\left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$　(4) $2(\sqrt{3}-1)^n$

$\boxed{5}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{7^n-3^n}{7^n+3^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+(-6)^{n+1}}{(-6)^n-5^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3^n-5^n)$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(6^{n+1}-7^n)$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{2n}-3^{n+1})$

6 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 4x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{3x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}$

7 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$

$\boxed{8}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

実戦問題篇

$\boxed{9}$ 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-ax-b\right)=5$$

$\boxed{10}$ 関数 $y=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$ のグラフをかけ。

$\boxed{11}$ 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-bx\right)=3$$

12　次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$(3+\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-1)+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$$

13　次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}$$

14　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\boxed{}$

15　$[a]$ は a を超えない最大の整数を表すとすると $\lim_{x \to 1-0}([2x]-2[x]) = \boxed{}$

16　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{a\cos^2 x + (3b+2)\sin x - 2a + b + 1}{\sin^3 x + a\cos^2 x - a} = c$ となるように実数の定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ．

BASIC問題篇

1 a を実数とし，関数 $f(x)$ を$f(x)=\begin{cases} a\sin x+\cos x & \left(x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ x-\pi & \left(x > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ で定義する。

$f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続となる a の値を求めよ。

2 関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であるとき，次の極限値を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-h)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$

$\boxed{3}$ 関数 $y=x\cos x-\sin x$ を微分せよ。

$\boxed{4}$ 関数 $y=\dfrac{x}{x^2-2}$ を微分せよ。

改・数学③第４回テスト　数III微分　　3 / 7

$\boxed{5}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\tan 4x$　　(2) $y=\cos x^2$

(3) $y=\log|x^2-3|$　　(4) $y=\log\sqrt{x+1}$

(5) $y=e^{5x}$　　(6) $y=3^{2x}$

(7) $y=e^{x^3}$

$\boxed{6}$ 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2-xy-y^2=2$

(2) $(y-2)^2=x+1$

(3) $x=\sin(x+y)$

(4) $y^5=x^2+1$

$\boxed{7}$ 曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

$$x=5\cos t,\quad y=4\sin t$$

$\boxed{8}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$

(2) $y=x^{e^x}$ $(x>0)$

(3) $y=x^{\log x}$ $(x>0)$

(4) $y=(\log x)^x$ $(x>1)$

実戦問題篇

$\boxed{9}$ 関数 $f(x)=\begin{cases} x^3+\alpha x & (x \geqq 2) \\ \beta x^2-\alpha x & (x<2) \end{cases}$ が $x=2$ で微分可能となるような α，β の値を求めよ。

$\boxed{10}$ 曲線 $2x^2-2xy+y^2=5$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{11}$ $f(x)=x^3+x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=2$ における微分係数を求めよ。

12 関数 $y=\dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+4}+4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right\}$ を微分せよ。

13 曲線 C_1：$y=2\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 C_2：$y=\cos 2x+k$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が共有点 P で共通の接線 ℓ をもつ。ただし，k は定数であり，点 P の x 座標は正とする。k の値と接線 ℓ の方程式を求めよ。

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ 次の関数の増減，グラフの凹凸を調べてグラフの概形をかけ。

$$y=3x^4-16x^3+18x^2+8$$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=x-2\sqrt{x}$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

$\boxed{3}$ $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，関数 $y = x - \sqrt{2}\sin x$ の増減，グラフの凹凸を調べてグラフの概形をかけ。

$\boxed{4}$ 関数 $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ のグラフをかけ。

$\boxed{5}$ 関数 $y = \dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ のグラフの概形をかけ。

$\boxed{6}$ 次の関数のグラフの概形をかけ。

$$y=x-1+\sqrt{1-x^2}$$

$\boxed{7}$ 関数 $y=x\sqrt{8-x^2}$ のグラフの概形をかけ。

$\boxed{8}$ 関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ のグラフの概形を描け.

$\boxed{9}$ 関数 $f(x)=(x-1)^2e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$ を用いよ。

実戦問題篇

10 関数 $f(x)=\log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^2}-\log x\ \ (0<x<1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ 上を動く点を P とする。点 Q は，曲線 $y=f(x)$ の P における接線上にあり，P との距離が 1 で，その x 座標が P の x 座標より小さいものとする。Q の軌跡を求めよ。

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x+1)^5dx$　　(2) $\displaystyle\int (2x-1)^4dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+2}dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x+3}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int \sin\frac{5}{6}\pi x\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \cos(4x-1)\,dx$

(7) $\displaystyle\int e^{2x+3}dx$　　(8) $\displaystyle\int 2^{7x+5}dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$　　(1) $\displaystyle\int \cos x(2+\tan x)\,dx$

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin x\cos 4x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 4x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \cos 3x\cos 5x\,dx$

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+5)}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(2x-1)}dx$

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$　　(2) $\displaystyle\int x\log x\, dx$　　(3) $\displaystyle\int te^{2t}dt$

改・数学③第６回テスト　　数III積分　　4 / 6

$\boxed{8}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{25-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$　　★(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$

$\boxed{9}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{3x^2+12}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$

10 定積分 $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

実戦問題篇

11 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sin 2x\,dx$　(2) $\int x^2\log x\,dx$　(3) $\int \log(x+2)\,dx$　(4) $\int x^2e^x\,dx$

12 次の定積分を求めよ。

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+4}$$

13 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|\,dx$$

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x+\dfrac{2a}{x}$ の極小値が 2 となるように，定数 a の値を定めよ。ただし，$a>0$ とする。

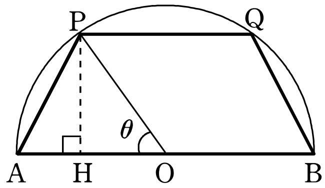
$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x^2+4}$ が $x=-1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。また，このとき，関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=ax+\sin x$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{4}$ すべての正の数 x について，不等式 $e^x \geqq ax^3$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ AB を直径とする半円周上の動点 P から AB に平行な弦 PQ を引き，台形 PABQ を作る。P から AB に垂線 PH を下ろす。また，円の中心を O とし，AB$=2a$,

$\angle \mathrm{AOP}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。



⑴　PH，OH の長さを a，θ で表せ。

⑵　台形 PABQ の面積 S を a，θ で表せ。

⑶　この台形の面積 S の最大値を求めよ。

実戦問題篇

$\boxed{6}$ a は定数とする。曲線 $y=(x^2+2x+a)e^x$ の変曲点の個数を調べよ。

$\boxed{7}$ a を実数とする。このとき，曲線 $y=e^x$ と $y=(x-a)^2$ の両方に接する直線が存在するような a の値の範囲を求めよ。

改・数学③第８回小テスト　積分の応用　

$\boxed{1}$ ＊　曲線 $y=\sqrt{x}$ と，この曲線上の点 $(1,\ 1)$ における接線および y 軸で囲まれた部分の面積S を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の曲線または直線と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

＊(1)　$y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$　　　(2)　$y=\sin 2x$　$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{3}$ 次の曲線または直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$x=y^2-1$，y 軸　　　(2)　$y=\log x$，$y=1$，x 軸，y 軸

$\boxed{4}$ 曲線 $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ ＊　次の曲線の長さ L を求めよ。ただし，t，θ は媒介変数とする。

$$x=e^{\theta}\cos\theta,\quad y=e^{\theta}\sin\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

$\boxed{6}$ ＊　次の曲線の長さ L を求めよ。

$$y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x} \quad (1\leqq x\leqq 2)$$

改・数学③第８回小テスト　積分の応用

7 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$$

8 次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

$$\int_\pi^x f(t)dt=a\sin^2 x+\frac{a}{2}x^2-1$$

9 原点から出発して数直線上を動く点 P の t 秒後の座標が t^3-5t^2+4t で表される。

(1) P が原点に戻ったときの速度をすべて求めよ。

(2) P が運動の向きを初めて変えるのは何秒後か。

改・数学③第８回小テスト　積分の応用　　

$\boxed{10}$ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，$x=-6t^2+10$，$y=2t^3-5$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

$\boxed{11}$ 自然数 n について，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ とする。

(1) I_1，I_2 を求めよ。

(2) I_{n+2} を n と I_n を用いて表せ。

(3) I_6 を求めよ。

BASIC問題篇

1　次の楕円の概形をかけ。また，その焦点の座標，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　(2)　$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

2　次の双曲線の概形をかけ。また，その焦点，頂点，漸近線を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$　　(2)　$4x^2-y^2=1$

3　次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1)　$y^2=-8x$　　(2)　$x^2=2y$

$\boxed{4}$ 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \quad \left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$

(2) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \quad \left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1 \quad (-2\sqrt{5},\ 1)$

(4) $y^2=4x \quad (1,\ -2)$

$\boxed{5}$ x，y の方程式 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$ はどのような図形を表すか。楕円なら中心と焦点の座標，双曲線なら頂点，焦点の座標と漸近線，放物線なら頂点，焦点の座標と準線を求めよ。

$\boxed{6}$ 方程式 $4x^2-9y^2+16x+18y+43=0$ はどのような図形を表すか。楕円なら中心と焦点の座標，双曲線なら頂点，焦点の座標と漸近線，放物線なら頂点，焦点の座標と準線を求めよ。

$\boxed{7}$ 点 $(1,\ 3)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{8}$ 楕円 $x^2+4y^2=4$ と直線 $x+2y=1$ の 2 つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。

実戦問題篇

9 【2011 慶應（医）】

方程式 $2x^2-y^2+8x+2y+11=0$ が表す曲線は，頂点が $\left(^{ア}\boxed{},\ ^{イ}\boxed{}\right)$ と $\left(^{ウ}\boxed{},\ ^{エ}\boxed{}\right)$，焦点が $\left(^{オ}\boxed{},\ ^{カ}\boxed{}\right)$ と $\left(^{キ}\boxed{},\ ^{ク}\boxed{}\right)$ の双曲線で，その漸近線の方程式は $y=\ ^{ケ}\boxed{}$ および $y=\ ^{コ}\boxed{}$ である。

10 【2011 日本医科（医）】　　問2,3は略

xy 平面上に2点O$(0,0)$，A$(a,1)$ をとり，

$$\mathrm{OP}-\mathrm{AP}=1$$

を満たす点P(x,y) の描く軌跡を H_a とする。ただし，a は正の数であり，OP，APはそれぞれ線分の長さを表す。

問1　曲線 H_a の方程式を y について解いた形に表し，x の変域（点P(x,y) が H_a 上を動くとき，x の取り得る値の範囲）を求めよ。

BASIC問題篇

$\boxed{1}$ 放物線 $y=-x^2+2tx+(t-1)^2$ の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

$\boxed{2}$ 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(1) $\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$　(2) $\left(4,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$　(3) $\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$

$\boxed{3}$ 直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $(-3,\ \sqrt{3})$　(2) $(-2,\ 0)$　(3) $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

4　次の直線および曲線を極方程式で表せ。

(1)　$x+y=4$　　(2)　$y=-\sqrt{3}x$

(3)　$x^2+(y-1)^2=1$　　(4)　$x^2+y^2-4x=0$

5　次の極方程式の表す曲線を，直交座標 x，y の方程式で表せ。

(1)　$r=\cos\theta+\sin\theta$　　(2)　$r^2\cos 2\theta=-1$

(3)　$r=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$　　(4)　$r=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$

改・数学③第１０回テスト　極座標

$\boxed{6}$ 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $x=\sin\theta$，$y=\cos 2\theta$　　(2) $x=\cos\theta+\sin\theta$，$y=\cos\theta-\sin\theta$

$\boxed{7}$ （復習）

次の方程式はどのような曲線を表すか。楕円なら中心と焦点の座標，双曲線なら頂点，焦点の座標と漸近線，放物線なら頂点，焦点の座標と準線を求めよ。

(1) $25x^2-4y^2+100x-24y-36=0$　　(2) $y^2-4x-2y-7=0$

(3) $4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$

実戦問題篇

$\boxed{8}$ 放物線 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ と楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の共通接線の方程式を求めよ．

$\boxed{9}$ 点 $(0, a)$ を通り，だ円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ に接する 2 つの接線が直交するとき，$a^2=\boxed{}$ である．