

すうがく♪ ちゃちゃちゃ！

①

数学 IA 篇

【解答】

第1章 数と式	2
第2章 集合論理（不等式含む）	17
第3章 二次関数	27
第4章 三角比	37
第5章 数え上げの基礎	51
第6章 場合の数	59
第7章 確率	72
第8章 整数問題	83
第9章 平面図形（および空間図形）	95
第10章 二項定理	109

第1章 数と式

《学習項目》

・展開・因数分解公式

・絶対値 (1) $a \geq 0$ のとき, $|a| = a$, $a < 0$ のとき, $|a| = -a$

(2) $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$

(3) $|x| > k \Leftrightarrow x > k$ または $x < -k$ ただし, $k > 0$

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$ 等号成立は a, b が同符号 (またはいずれかがゼロ) のとき。

(5) $|ab| = |a||b|, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

・平方根・二重根号

・数の分類

・等式の変形

(1) 両辺に同じ項をたしざん, ひきざんしても同値

(2) 両辺にゼロでない同じ項をかけざんしても同値

両辺にゼロをかけても成り立つが, 同値性は崩れる

(3) 両辺をゼロでない同じ式でわりざんしても同値

(注) ゼロとなる式ではわりざんできない!

(4) 両辺ゼロ以上なら両辺2乗しても同値

(注) 両辺の符号が異なる可能性があるときは, 両辺2乗できない!

(5) $\sqrt{a^2} = |a|$

・解の公式, 判別式

・解と係数の関係

・対称式

・二次方程式・二次不等式とグラフの関係

・絶対値とグラフ

・分母の有理化

・二重根号

・等式の証明

・整式

・恒等式

・除法の原理 (剰余の定理・因数定理)

・★有理数解の候補

・連立方程式の解法 (代入法・加減法)

・高次方程式 (因数分解・置き換え)

・整式において, 解と因数の対応関係

・3次方程式の解と係数の関係

・3文字の対称式

・★複2次方程式

・★相反方程式

・共通解

・1の虚数3乗根

・相加平均・相乗平均の関係の不等式

・不等式の証明などは「集合論理」で扱います

A 問題

①1-A-1

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - y^2 - x + y$

(2) $a^2 - (b-c)a - bc$

(3) $x^4 - x^2y^2 - 2y^4$

(4) $(x-y)^2 - 3x + 3y - 10$

(5) $x^3 + 64$

(6) $64x^3 - 27y^3$

(1) $(x-y)(x+y-1)$

(2) $(a-b)(a+c)$

(3) $(x^2-2y^2)(x^2+y^2)$

(4) $(x-y+2)(x-y-5)$

(5) $(x+4)(x^2-4x+16)$

(6) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

①1-A-2

次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt{9+\sqrt{56}}$

(3) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$

解答 (1) $\sqrt{3}+1$ (2) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ (3) $2-\sqrt{2}$

①1-A-3

次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

(1) $(3+2i)x + 2(1-i)y = 17-2i$

(2) $\frac{3-2i}{x+2yi} = 1+i$

解答 (1) $x=3, y=4$ (2) $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}$

①1-A-4

次の方程式、不等式を解け。

(1) $|3x-2|=5$

(2) $|3-x|<2$

(3) $|2x+7|\geq 9$

解答 (1) $x=-1, \frac{7}{3}$ (2) $1<x<5$ (3) $x\leq -8, 1\leq x$

①1-A-5

$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{7} \neq 0$ のとき、 $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3+y^3+z^3}$ の値を求めよ。

解答 $\frac{7}{4}$

①1-A-6

$2x^2 - 5x + 4 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta$

(2) $\alpha^2 + \beta^2$

(3) $\alpha^3 + \beta^3$

(4) $(\alpha - \beta)^2$

(5) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

解答 (1) 5 (2) $\frac{9}{4}$ (3) $\frac{5}{8}$ (4) $-\frac{7}{4}$ (5) $\frac{9}{8}$

①1-A-7

方程式 $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき、次の3数を解とする3次方程式を求めよ。

(1) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$

(2) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$

(1) $x^3 - 3x - 1 = 0$

(2) $x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

①1-A-8

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

(1) $x^3 + 1 = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + c$

(2) $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$

解答 (1) $a=6, b=12, c=9$ (2) $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{3}, c=-\frac{2}{3}$

①1-A-9

(1) 整式 $f(x)$ を $x+2$ で割ると6余り、 $x-6$ で割ると -10 余る。

$f(x)$ を $(x+2)(x-6)$ で割った余りを求めよ。

(1) $f(x) = (x+2)(x-6)P(x) + ax + b$ とおくと、 $f(-2)=6$ より、 $-2a+b=6$ ……①

$f(6)=-10$ より、 $6a+b=-10$ ……②

①, ②より、 $a=-2, b=2$ から余りは $-2x+2$

①1-A-10

方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^6 + \omega^3 + 1$

(2) $\omega^8 + \omega^4 + 1$

(3) $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}$

解答 (1) 3 (2) 0 (3) -1

B 問題

①1-B-1

次の式を因数分解せよ。

- (1) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ (2) $-x^3 + 4x^2 + 4x - 1$
 (3) $x^4 + x^3y - xy^3 - y^4$ (4) $x^2 + 4xy + 4y^2 - x - 2y - 2$
 (5) $x^4 + 4$ (6) $x^4 + 3x^2 + 4$
 (7) $(a+b-c)(a-b+c)$
 (8) $-(x+1)(x^2-5x+1)$
 (9) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
 (10) $(x+2y+1)(x+2y-2)$
 (11) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
 (12) $(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

解答

①1-B-2

次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 2xy - 3y^2 - 4x - 4y + 4$ (2) $2x^2 - 7xy + 3y^2 - 5x + 10y + 3$
 (3) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ (4) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$
 (5) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ (6) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

- (1) $(x+3y-2)(x-y-2)$
 (2) $(2x-y-3)(x-3y-1)$
 (3) $-(a-b)(b-c)(c-a)$
 (4) $(a+b)(b+c)(c+a)$
 (5) $3(a-b)(b-c)(c-a)$
 (6) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

解答

- (1) $x^2 + (2y-4)x - (3y-2)(y+2)$
 $= (x+3y-2)(x-y-2)$
 (2) $2x^2 - (7y+5)x + (3y+1)(y+3)$
 $= (2x-y-3)(x-3y-1)$
 (3) $a^2(b-c) - a(b^2-c^2) + bc(b-c)$
 $= (b-c)\{a^2 - a(b+c) + bc\}$
 $= (a-b)(b-c)(a-c)$
 $= -(a-b)(b-c)(c-a)$
 (4) $a^2(b+c) + a(b^2+2bc+c^2) + bc(b+c)$
 $= (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\}$
 $= (a+b)(b+c)(c+a)$
 (5) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2$
 $- c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3$
 $= 3\{a^2(c-b) - a(c^2-b^2) + bc(c-b)\}$
 $= 3(c-b)\{a^2 - a(c+b) + bc\}$
 $= 3(a-b)(b-c)(c-a)$
 (6) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - (xy)^2$
 $= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

①1-B-3

次の不等式を解け

- (1) $|3x-4| < 2x$ (2) $3|x-1| \geq x+3$ (3) $3|x-2| - 2|x| \leq 3$

解答 (1) $\frac{4}{5} < x < 4$ (2) $x \leq 0, 3 \leq x$ (3) $\frac{3}{5} \leq x \leq 9$

①1-B-4

次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{8+\sqrt{48}}$

(2) $\sqrt{5-\sqrt{21}}$

解答 (1) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{6}}{2}$

①1-B-5

$x^2 - 3x + 7 = 0$ の2つの解 α, β に対して, $(\alpha^2 + 3\alpha + 7)(\beta^2 - \beta + 7)$ の値を求めよ。

解答 $(\alpha^2 + 3\alpha + 7)(\beta^2 - \beta + 7) = 84$ おまけ $\alpha^2 + \beta^2 = -5, \alpha^4 + \beta^4 = -73,$

①1-B-6

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ のとき, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ と $x^5 + \frac{1}{x^5}$ の値を求めよ。

解答 順に $\pm 18, \pm 123$

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ の両辺に 2 を加えて,

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$ より $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$ から,

$x + \frac{1}{x} = \pm 3$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \pm 18$

$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$
 $= 7 \times (\pm 18) - (\pm 3) = \pm 123$

①1-B-7

方程式 $2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 = 0$ を解け。

解答 $x = \frac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{2}i$

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$ とおくと,

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$

であるから, 因数定理より, $P(x)$ は $x - \frac{1}{2}$ で割り切れる。

すなわち, $P(x)$ は $2x - 1$ で割り切れるので,

割り算を実行すると,

$P(x) = (2x - 1)(x^2 - 2x + 3)$

したがって, 与えられた方程式は,

$(2x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

より, $2x - 1 = 0$ または $x^2 - 2x + 3 = 0$

よって, $x = \frac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{2}i$ ……(答)

①1-B-8

x についての方程式 $x^3 - (2a-1)x^2 - 2(a-1)x - 4a = 0$ を解け。

解答 $x = 2a, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

左辺を a について整理すると,

$$(-2x^2 - 2x - 4)a + (x^3 + x^2 + 2x) = 0$$

$$-2(x^2 + x + 2)a + x(x^2 + x + 2) = 0$$

$$(x - 2a)(x^2 + x + 2) = 0$$

より, $x - 2a = 0$ または $x^2 + x + 2 = 0$

よって, $x = 2a, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ (答)

①1-B-9 方程式 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ を解け。

解答 $t = x + \frac{1}{x}$ とおくと, $t^2 - 7t + 12 = 0$ より $t = 3, 4$ よって $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

①1-B-10

a を実数とすると, x についての2次方程式

$$3x^2 + \{2a - 5 + 5(2a - 1)i\}x - 1 + (2a^2 - a)i = 0$$

が実数解をもつための (a の満たす) 条件を求めよ。

解答 $a = \frac{1}{2}$

実数解 t をもつとき, $x = t$ を代入

して i で整理すると,

$$\{3t^2 + (2a - 5)t - 1\}$$

$$+ \{5(2a - 1)t + 2a^2 - a\}i = 0$$

a, t が実数より,

$$\begin{cases} 3t^2 + (2a - 5)t - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5(2a - 1)t + 2a^2 - a = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より, $(2a - 1)(5t + a) = 0$

(i) $a = \frac{1}{2}$ のとき, ①に代入して

$$3t^2 - 4t - 1 = 0 \text{ より, } t = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

(ii) $t = -\frac{a}{5}$ のとき, ①に代入して

$$7a^2 - 25a + 25 = 0$$

この判別式は, $D = 25^2 - 4 \cdot 7 \cdot 25 = -75 < 0$

より, 実数解をもたない。

以上から, 求める a の条件は $a = \frac{1}{2}$

①1-B-11

3次方程式 $x^3 + (2a - 1)x^2 - (3a - 2)x + a - 2 = 0$ がある。次の各場合に対して, 実数 a の条件を求めよ。

(1) 与えられた方程式が3個の異なる実数解をもつ。

(2) 与えられた方程式がちょうど2個の異なる実数解をもつ。

解答 (1) $a < -3, -3 < a < -2, 1 < a$ (2) $a = -3, -2, 1$

(2) 与えられた方程式の異なる実数解がちょうど2個となるのは、

(i) ②が異なる2個の実数解をもち、一方が $x=1$

(ii) ②が $x=1$ でない重解をもつ

のいずれかの場合である。

(i)のとき、②が異なる2個の実数解をもつので、

③より、 $a < -2$, $1 < a$

$x=1$ が②の解より、

$$1+2a-a+2=0$$

$$a=-3$$

これは、③に適する。

(ii)のとき、②が重解をもつので、

$$\frac{D}{4}=a^2-(-a+2)=0 \text{ より、}$$

$$(a+2)(a-1)=0$$

$$a=-2, 1 \text{ ……④}$$

$x=1$ が②の解でないことより、

$$1+2a-a+2 \neq 0$$

$$a \neq -3$$

④はこれを満たす。

以上、(i), (ii)より、 $a=-3, -2, 1$ ……(答)

$$x^3+(2a-1)x^2-(3a-2)x+a-2=0 \text{ ……①}$$

$$P(x)=x^3+(2a-1)x^2-(3a-2)x+a-2 \text{ とおくと、}$$

$P(1)=0$ であるから、因数定理により、

$$P(x)=(x-1)(x^2+2ax-a+2)$$

したがって、①は、

$$(x-1)(x^2+2ax-a+2)=0$$

となるので、

$$x=1 \text{ または } x^2+2ax-a+2=0 \text{ ……②}$$

(1) 与えられた方程式の異なる実数解が3個となるのは、②が異なる2個の実数解をもち、 $x=1$ が②の解でないときである。②の判別式を D とすれば、

$$\frac{D}{4}=a^2-(-a+2)>0 \text{ より、}$$

$$(a+2)(a-1)>0$$

$$a<-2, 1<a \text{ ……③}$$

$x=1$ が②の解でないことより、

$$1+2a-a+2 \neq 0$$

$$a \neq -3$$

以上より、 $a<-3, -3<a<-2, 1<a$ ……(答)

①1-B-12

3次方程式 $x^3+ax^2+bx-4=0$ の1つの解が $1+i$ であるとき、実数の係数 a, b を求めよ。

解答 $a=-4, b=6$

(2) 他の2解を $1-i, \alpha$ とすると解と係数の関係より $(1+i)+(1-i)+\alpha=-a$

$(1+i)\alpha+(1-i)\alpha+(1+i)(1-i)=b, (1+i)(1-i)\alpha=4$ を解いて、 $a=-4, b=6$

①1-B-13

次の最小値を求めよ。

(1) $x>0$ のとき $x+\frac{3}{x}$ の最小値

(2) $x>2$ のとき $x+\frac{4}{x-2}$ の最小値

解答 (1) $x=\sqrt{3}$ のとき最小値 $2\sqrt{3}$ (2) $x=4$ のとき最小値 6

①1-B-14

$x=\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}$ のとき、 $4x^3+2x^2+6x+3$ の値を求めよ。

解答

$$5+\sqrt{5}i$$

$$(1) \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2} \text{ より,}$$

$$2x + 1 = \sqrt{5}i$$

$$\text{両辺を 2 乗して整理すると } 2x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\text{よって, } 4x^3 + 2x^2 + 6x + 3$$

$$= (2x^2 + 2x + 3)(2x - 1) + 2x + 6$$

$$\text{これに } x = \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2} \text{ を代入して,}$$

$$0 + 2 \times \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2} + 6 = 5 + \sqrt{5}i$$

① **1-B-15**

α, β が $x^2 - x + 1 = 0$ の解のとき, $\alpha^{10} + \beta^{10}$ の値を求めよ。

$$(2) \quad x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{よって, } x^3 = -1 \text{ より, } \alpha^3 = \beta^3 = -1$$

$$\text{より,} \quad \text{解と係数の関係より } \alpha + \beta = 1$$

$$(x+1)(x^2-x+1) \quad \alpha^{10} + \beta^{10} = (\alpha^3)^3 \times \alpha + (\beta^3)^3 \times \beta$$

$$= x^3 + 1 = 0 \quad = -(\alpha + \beta) = -1$$

解答

-1

C 問題

①1-C-1

(1) $y = |x-1|-3$ のグラフをかくことにより、不等式 $||x-1|-3| < 2$ を解け。

【補足】グラフを利用しない解法も考えてみよ。

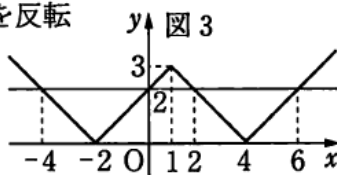
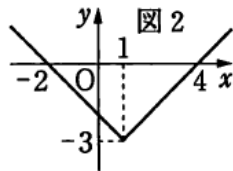
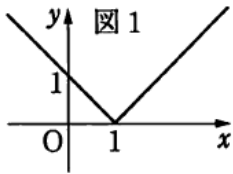
(2) すべての実数 x に対して不等式 $|3x-4| \geq -|x+2|+a$ が成り立つように a の値の範囲を求めよ。

解答

(1) $-4 < x < 0, 2 < x < 6$

(2) $a \leq \frac{10}{3}$

(1) $y = |x-1|$ のグラフは図1のようになる。これから、 $y = |x-1|-3$ のグラフは下方に3移動した図2のようになる。よって、 $y = ||x-1|-3|$ のグラフは図2の y 座標が負の部分を反転させた図3のようになる。これより、 $-4 < x < 0, 2 < x < 6$



(2) 移項して、 $|3x-4|+|x+2| \geq a$ ……①

左辺の最小値を求める。

(i) $x < -2$ のとき

$$-3x+4-x-2 = -4x+2$$

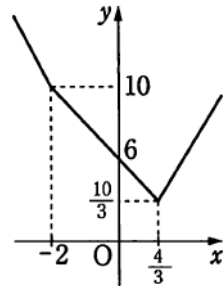
(ii) $-2 \leq x < \frac{4}{3}$ のとき

$$-3x+4+x+2 = -2x+6$$

(iii) $\frac{4}{3} \leq x$ のとき $3x-4+x+2 = 4x-2$

$y = |3x-4|+|x+2|$ のグラフは右のようになり、最小値は $\frac{10}{3}$ より、

不等式①がつねに成り立つ a の値の範囲は、 $a \leq \frac{10}{3}$



①1-C-2

$f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + 5x + a - 2$, $g(x) = x^3 + ax^2 + 6x + a$ とするとき、 $f(x)$ と $g(x)$ が共通の因数 (x の1次式) をもつような定数 a の値を求めよ。さらに、そのとき、 $f(x)$, $g(x)$ がどのように因数分解されるかを示せ。

解答 $a = \frac{7}{2}$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x+3)(2x+1)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)(2x^2+5x+7)$$

$$a = -4 \text{ のとき } f(x) = (x-2)(x^2-x+3)$$

$$g(x) = (x-2)(x^2-2x+2)$$

共通因数を $x-a$ とする。

$$f(x) = (x-a)P(x), g(x) = (x-a)Q(x) \text{ とおくと,}$$

$$f(x) - g(x) = (x-a)\{P(x) - Q(x)\} \text{ から,}$$

$$f(x) - g(x) \text{ も } x-a \text{ を因数にもつ。ここで,}$$

$$f(x) - g(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \text{ から}$$

(i) 共通因数が $x+1$ のとき

$$f(-1) = 2a - 7 = 0 \text{ より, } a = \frac{7}{2}$$

$$\text{このとき, } f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 5x + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)(x+3)(2x+1)$$

$$g(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 6x + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)(2x^2+5x+7)$$

(ii) 共通因数が $x-2$ のとき

$$f(2) = 5a + 20 = 0 \text{ より, } a = -4$$

$$\text{このとき } f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$$

$$= (x-2)(x^2-x+3)$$

①1-C-3

$a+b+c=1$, $ab+bc+ca=3$, $abc=2$ のとき,

- (1) $a^2+b^2+c^2$ の値を求めよ。
- (2) a, b, c を解とする3次方程式を求めよ。
- (3) (2)を用いて, $a^3+b^3+c^3$, $a^4+b^4+c^4$, $a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ。

解答 (1) -5 (2) $x^3-x^2+3x-2=0$

$$(3) \quad a^3+b^3+c^3=-2, \quad a^4+b^4+c^4=15,$$

$$a^5+b^5+c^5=11$$

$$(1) \quad a^2+b^2+c^2$$

$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$=1-6=-5$$

$$(2) \quad \text{解と係数の関係から, } x^3-x^2+3x-2=0$$

$$(3) \quad a, b, c \text{ は, } x^3-x^2+3x-2=0 \text{ の解より}$$

$$a^3=a^2-3a+2, \quad b^3=b^2-3b+2,$$

$$c^3=c^2-3c+2 \quad \text{辺々を加えて,}$$

$$a^3+b^3+c^3$$

$$=(a^2+b^2+c^2)-3(a+b+c)+6$$

$$=-5-3+6=-2$$

$$a^4=a^3-3a^2+2a, \quad b^4=b^3-3b^2+2b,$$

$$c^4=c^3-3c^2+2c \quad \text{辺々を加えて,}$$

$$a^4+b^4+c^4$$

$$=(a^3+b^3+c^3)-3(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)$$

$$=-2+15+2=15$$

$$\text{同様に, } a^5=a^4-3a^3+2a^2,$$

$$b^5=b^4-3b^3+2b^2, \quad c^5=c^4-3c^3+2c^2 \text{ より,}$$

$$a^5+b^5+c^5$$

$$=(a^4+b^4+c^4)-3(a^3+b^3+c^3)+2(a^2+b^2+c^2)$$

$$=11$$

①1-C-4

α, β が $x^2+2x+4=0$ の2解のとき, 次の値を求めよ。

- (1) $\alpha^4+\beta^4$ (2) $\alpha^{3n+2}+\beta^{3n+2}$ (3) $\alpha^n+\beta^n$

解答 (1) -16 (2) -2^{3n+2}

$$(3) \quad n=3k \text{ のとき } \alpha^n+\beta^n=2^{n+1}$$

$$n=3k+1, 3k+2 \text{ のとき } \alpha^n+\beta^n=-2^n$$

$$(1) \quad x^2+2x+4=0 \text{ より,}$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8=0$$

$$\text{よって, } x^3=8 \text{ より, } \alpha^3=\beta^3=8$$

$$\text{解と係数の関係より, } \alpha+\beta=-2, \quad \alpha\beta=4$$

$$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3 \times \alpha + \beta^3 \times \beta = 8(\alpha+\beta) = -16$$

$$(2) \quad \alpha^{3n+2}+\beta^{3n+2}=\alpha^{3n} \times \alpha^2 + \beta^{3n} \times \beta^2$$

$$=8^n(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2 \times 4=-4$$

$$\text{よって, } \alpha^{3n+2}+\beta^{3n+2}$$

$$=-4 \times 8^n = -2^2 \times 2^{3n} = -2^{3n+2}$$

$$(3) \quad n=3k \text{ のとき}$$

$$\alpha^{3k}+\beta^{3k}=8^k+8^k=2 \times 2^{3k}=2 \times 2^n=2^{n+1}$$

$$n=3k+1 \text{ のとき}$$

$$\alpha^{3k+1}+\beta^{3k+1}=\alpha \cdot \alpha^{3k} + \beta \cdot \beta^{3k}$$

$$=(\alpha+\beta)8^k=-2 \cdot 2^{3k}=-2^{3k+1}=-2^n$$

$$n=3k+2 \text{ のとき}$$

$$(2) \text{より } \alpha^{3k+2}+\beta^{3k+2}=-2^{3k+2}=-2^n$$

①1-C-5

整式 $f(x)$ を x^2-4x+3 で割ると $-x+10$ 余り, x^2-5x+6 で割ると $2x+1$ 余るという。

- (1) $f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りを求めよ。
 (2) $f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを px^2+qx+r とおき, p, q, r の値を求めよ。

$$f(x)=(x-1)(x-3)P(x)-x+10\cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+2x+1\cdots\cdots\textcircled{2}$$

解答 (1) $-4x+13$

(2) $3x^2-13x+19$

(1) $f(x)=(x-1)(x-2)R(x)+ax+b$ とおく。

①より, $f(1)=9$ から, $a+b=9$

②より, $f(2)=5$ から, $2a+b=5$

これを解いて $a=-4, b=13$

(2) $f(x)$

$$=(x-1)(x-2)(x-3)g(x)+px^2+qx+r$$

ここで, ①, ②より, $f(1)=9, f(2)=5,$

$f(3)=7$ から, $p+q+r=9, 4p+2q+r=5$

$9p+3q+r=7$ を解いて

$p=3, q=-13, r=19$

①1-C-6

$x^{15}+1$ を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

(1) 商を $P(x)$, 余りを $ax+b$ とする。

$$x^{15}+1=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b\cdots\cdots\textcircled{1}$$

$x^2+x+1=0$ の解の1つを ω とすると,

$\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1$ が成り立つ。

①に $x=\omega$ を代入して,

$\omega^{15}+1=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b$ より,

$2=a\omega+b$ これより, $a=0, b=2$

よって, 求める余りは 2

別解 $x^{15}+1=(x^{15}-1)+2$

$=(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)+2$

より, 余りは 2

解答

2

①1-C-7

x^{2006} を x^4-1 で割った余りを求めよ。

解答

x^2

$$(1) \quad x^{2006} = (x^4-1)P(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

とおく。

$$x=1 \text{ を代入して } 1=a+b+c+d \cdots \cdots ①$$

$$x=-1 \text{ を代入して } 1=-a+b-c+d \cdots \cdots ②$$

$$x=i \text{ を代入して } -1=-ai-b+ci+d \cdots \cdots ③$$

$$x=-i \text{ を代入して } -1=ai-b-ci+d \cdots \cdots ④$$

$$①+② \text{ から, } b+d=1$$

$$①-② \text{ から, } a+c=0$$

$$③+④ \text{ から, } b-d=1$$

$$③-④ \text{ から, } a-c=0$$

$$\text{これを解くと } a=0, b=1, c=0, d=0$$

より, 余りは x^2

別解 $x^{2006} = x^{2006} - x^2 + x^2$
 $= x^2(x^{2004} - 1) + x^2$
 $= x^2(x^4 - 1)(x^{2000} + x^{1996} + \cdots + x^4 + 1) + x^2$
 より, $x^4 - 1$ で割った余りは x^2

①1-C-8

多項式 $P(x)$ を $(x+2)^3$ で割った余りを $4x^2+3x+5$, $x-1$ で割った余りを 3 とする。

(1) $P(x)$ を $(x+2)(x-1)$ で割った余りを求めよ。

(2) $P(x)$ を $(x+2)^2(x-1)$ で割った余りを求めよ。

解答

$$(1) \quad -4x+7 \quad (2) \quad 3x^2-x+1$$

条件より,

$$P(x) = (x+2)^3 Q(x) + 4x^2 + 3x + 5 \cdots \cdots ①$$

$$P(x) = (x-1)R(x) + 3 \cdots \cdots ②$$

$$(1) \quad P(x) = (x+2)(x-1)S(x) + ax + b \cdots \cdots ③$$

とする。

$$① \text{ より, } P(-2)=15, ② \text{ より, } P(1)=3 \text{ から}$$

③に $x=-2, 1$ を代入して,

$$P(-2) = -2a + b = 15 \cdots \cdots ④$$

$$P(1) = a + b = 3 \cdots \cdots ⑤$$

$$④, ⑤ \text{ より, } a=-4, b=7$$

よって, 求める余りは $-4x+7$

$$(2) \quad 4x^2+3x+5 = 4(x+2)^2 - 13x - 11 \text{ を } ① \text{ に}$$

代入して,

$$P(x)$$

$$= (x+2)^2(x+2)Q(x) + 4(x+2)^2 - 13x - 11$$

$$= (x+2)^2\{(x+2)Q(x) + 4\} - 13x - 11 \cdots \cdots ⑥$$

ここで, $(x+2)Q(x) + 4$ を $(x-1)$ で割ったときの商を $T(x)$, 余りを c とすると,

$$(x+2)Q(x) + 4 = (x-1)T(x) + c \text{ より,}$$

⑥に戻して,

$$P(x) = (x+2)^2(x-1)T(x) + c(x+2)^2 - 13x - 11 \cdots \cdots ⑦$$

$$P(1)=3 \text{ から, } ⑦ \text{ に } x=1 \text{ を代入して,}$$

$$P(1) = 9c - 24 = 3 \text{ から, } c=3$$

これより, 求める余りは, $3x^2-x+1$

① 1-C-9

$\{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2$ を x^3+1 で割った余りを求めよ。

解答

$$-3x^2+3x+6$$

(2) 余りを ax^2+bx+c とおくと、

$$\begin{aligned} & \{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2 \\ &= (x^3+1)Q(x)+ax^2+bx+c \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$x^3+1=0$ の1つの虚数解を ω とすると、

$$\omega^3+1=0, \quad \omega^2-\omega+1=0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} & (x+1)(x-2)(x^2-x+2) \\ &= (x^2-x-2)(x^2-x+2) \\ &= \{(x^2-x+1)-3\}\{(x^2-x+1)+1\} \end{aligned}$$

より、①に $x=\omega$ を代入すると、

$$\begin{aligned} & (\omega+1)(\omega-2)(\omega^2-\omega+2) \\ &= \{(\omega^2-\omega+1)-3\}\{(\omega^2-\omega+1)+1\} = -3 \end{aligned}$$

$$\text{より、} 9=a\omega^2+b\omega+c=a(\omega-1)+b\omega+c$$

$$=(a+b)\omega-a+c$$

$$\text{これより、} a+b=0 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad 9=-a+c \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{に } x=-1 \text{ を代入して、} 0=a-b+c \cdots \cdots \textcircled{5}$$

③、④、⑤から、 $a=-3$ 、 $b=3$ 、 $c=6$ より、

求める余りは、 $-3x^2+3x+6$

①1-C-10

正の整数 n に対し, $f(z)=z^{2n}+z^n+1$ とする。

- (1) $f(z)$ を z^2+z+1 で割ったときの余りを求めよ。
- (2) $f(z)$ を z^2-z+1 で割ったときの余りを求めよ。

解答

- (1) $n=3k$ のとき 3 (k は正の整数)
 $n=3k+1, 3k+2$ のとき 0 (k は負でない整数)
- (2) $n=6k$ のとき 3 (k は正の整数)
 $n=6k+1$ のとき $2z$ (k は負でない整数)
 $n=6k+2, 6k+4$ のとき 0
 (k は負でない整数)
 $n=6k+3$ のとき 1 (k は負でない整数)
 $n=6k+5$ のとき $-2z+2$
 (k は負でない整数)

- (1) $z^{2n}+z^n+1$
 $= (z^2+z+1)Q(x)+az+b\cdots\cdots①$
 とおく。ここで $z^2+z+1=0$ の解の1つを ω とすると, $\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1$
 ①の両辺に $z=\omega$ を代入すると,
 $\omega^{2n}+\omega^n+1=(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b$
 $=a\omega+b\cdots\cdots②$
- (i) $n=3k$ のとき②から,
 $1+1+1=a\omega+b$ より, $a=0, b=3$
 これより, 余りは 3
- (ii) $n=3k+1$ のとき②から,
 $\omega^2+\omega+1=a\omega+b$ より, $0=a\omega+b$
 よって, $a=0, b=0$ これより, 余りは 0
- (iii) $n=3k+2$ のとき②から,
 $\omega^4+\omega^2+1=a\omega+b$ より, $0=a\omega+b$
 よって, $a=0, b=0$
 これより, 余りは 0

- (2) $z^{2n}+z^n+1$
 $= (z^2-z+1)R(z)+cz+d\cdots\cdots③$
 とおく。ここで, $z^2-z+1=0$ の解の1つを α とすると, $\alpha^2-\alpha+1=0, \alpha^3=-1$
 ③の両辺に $z=\alpha$ を代入すると,
 $\alpha^{2n}+\alpha^n+1=(\alpha^2-\alpha+1)R(\alpha)+c\alpha+d$
 $=c\alpha+d\cdots\cdots④$
- (i) $n=6k$ のとき④から, $\alpha^3=-1$ を用いて, $1+1+1=c\alpha+d$ より, $c=0, d=3$
 これより, 余りは 3
- (ii) $n=6k+1$ のとき④から,
 $\alpha^2+\alpha+1=c\alpha+d$
 ここで, $\alpha^2=\alpha-1$ より, $2\alpha=c\alpha+d$ から,
 $c=2, d=0$ これより, 余りは $2z$
- (iii) $n=6k+2$ のとき④から,
 $\alpha^4+\alpha^2+1=c\alpha+d$
 ここで, $\alpha^4=\alpha^3\cdot\alpha=-\alpha$ より,
 $-\alpha+\alpha^2+1=0$ から, $c=0, d=0$
 これより, 余りは 0
 以下同様に $n=6k+3, 6k+4, 6k+5$ のときも求める。

①1-C-11

整式 $f(x)$ について、恒等式 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ が成り立つとする。

- (1) $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ の値を求めよ。
- (2) $f(x)$ の次数を求めよ。
- (3) $f(x)$ を決定せよ。

解答 (1) $f(0)=0$, $f(1)=0$, $f(2)=0$

(2) 3次 (3) $f(x)=x^3-3x^2+2x$

(1) 与式に $x=0$ を代入して $f(0)=0$

$x=-1$ を代入すると、

$$f(1)=(-1)^3 f(0)-2+2$$

ここで、 $f(0)=0$ より、 $f(1)=0$

$x=1$ を代入すると、

$$f(1)=f(2)-2+2 \text{ より、} f(2)=0$$

(2) $f(x)$ を n 次式とすると、左辺は $2n$ 次で、 $n \geq 2$ のとき右辺は $n+3$ 次だから

$$2n=n+3 \text{ より、} n=3$$

$n \leq 1$ のとき右辺は高々 4 次式で左辺は $2n$ 次式より、

$$2n \leq 4 \text{ から、} n \leq 2 \text{ よって、} n \leq 1$$

ここで、 $f(x)=px+q$ とすると、条件式より

$$px^2+q=x^3\{p(x+1)+q\}-2x^4+2x^2$$

$$=(p-2)x^4+(p+q)x^3+2x^2$$

これを満たす p , q は存在しない。

よって、 $n=3$

(3) (1), (2)より、 $f(x)=ax(x-1)(x-2)$

これより、 $f(x^2)=ax^2(x^2-1)(x^2-2)$,

$$f(x+1)=a(x+1)x(x-1)$$

を条件式に代入して、

$$ax^2(x^2-1)(x^2-2)$$

$$=x^3 \cdot a(x+1)x(x-1)-2x^4+2x^2$$

これより、 $a=1$

よって、 $f(x)=x(x-1)(x-2)$

第2章 集合論理（不等式含む）

《学習項目》

- ・ 集合の記号 和集合, 共通部分 (積集合), 全体集合, 補集合,
- ・ 条件, 否定, 命題 (真偽), 逆・裏・対偶, 必要条件・十分条件
- ・ 真偽の判定法 証明, 反例, 包含関係

・ 有名不等式

相加平均と相乗平均の関係の不等式

すべての文字は正とする。

$$(2 \text{ 文字}) \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(3 \text{ 文字}) \quad a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

$$(4 \text{ 文字}) \quad a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$

等号成立はすべての文字の値が等しいとき。

コーシー・シュワルツの不等式

$$(2 \text{ 次元}) \quad (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \quad \text{等号成立は } a:b = x:y \text{ のとき}$$

$$(3 \text{ 次元}) \quad (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{等号成立は } a:b:c = x:y:z \text{ のとき}$$

三角不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{等号成立は, } x, y \text{ が同符号, または } 0 \text{ を含むとき。}$$

・ 不等式の性質

(a) やっていいこと

$$(1) \quad a < b \Leftrightarrow a + x < b + x, a - x < b - x \quad \text{同じ数を足しても引いてもよい。}$$

$$(2) \quad a < b, x > 0 \Rightarrow ax < bx, \frac{a}{x} < \frac{b}{x} \quad \text{正の数をかけても, 正の数で割ってもよい。}$$

$$(3) \quad a < b, x < 0 \Rightarrow ax > bx, \frac{a}{x} > \frac{b}{x}$$

負の数をかけたり, 負の数で割ったりすると, 不等号の向きが逆転する。

$$(4) \quad a < b, x < y \Rightarrow a + x < b + y \quad \text{同じ向きの不等式の両辺を加えてもよい。}$$

$$(5) \quad 0 < a < b, 0 < x < y \Rightarrow ax < by \quad \text{正ならば同じ向きの不等式の両辺をかけてもよい。}$$

$$(6) \quad n : \text{自然数}, 0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n \quad \text{ともに正ならば両辺を } n \text{ 乗してよい。}$$

(b) やってはいけないこと

$$(1) \quad \text{辺々ひきざん} \quad a < b, x < y \text{ のとき, } a - x < b - y \text{ としてはいけない。}$$

$$(2) \quad \text{両辺2乗} \quad a < b \text{ のとき, } a^2 < b^2 \text{ としてはいけない。}$$

ただし, 両辺正ならばやってもよい。cf. (a)(6)

$$(3) \quad \text{辺々かけざん} \quad a < b, x < y \text{ のとき, } ax < by \text{ としてはいけない。}$$

$$(4) \quad \text{文字でわりざん} \quad ax < ay \text{ のとき, } x < y \text{ としてはいけない。}$$

ただし, $a > 0$ ならばやってもよい。cf. (a)(2)

A 問題

① 2-A-1

$A = \{x | x \text{ は } 1 \leq x \leq 10 \text{ である整数}\}$, $B = \{x | x \text{ は } 1 \leq x \leq 20 \text{ である整数}\}$, $C = \{x | x = 3n + 1, n \text{ は自然数}\}$ とする。 $A \cup (B \cap C)$ と $A \cap \overline{C}$ を求めよ。 ◎山口大◎

解答 $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 19\}$, $A \cap \overline{C} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

解説 $C = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, \dots\}$ より, $B \cap C = \{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$

よって, $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 16, 19\}$

また, $\overline{C} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, \dots\}$ より, $A \cap \overline{C} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

① 2-A-2

次の に入れるのに最も適するものを下の①～④から選べ。

(1) 四角形の対角線が垂直であることは, 四角形がひし形であるための ア .

(2) $x + y > 0$ は, $x > 0$ または $y > 0$ であるための イ .

(3) $|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 2$ は, $2|x| + |y| \leq 2$ であるための ウ .

① 必要条件であるが十分条件でない ② 十分条件であるが必要条件でない

③ 必要十分条件である ④ 必要条件でも十分条件でもない

解答

(1) 「対角線が垂直」 $\implies$ 「ひし形」は偽だが, その逆は真より①。

(2) 「 $x + y > 0$ 」 $\implies$ 「 $x > 0$ または $y > 0$ 」は真だが, その逆は偽より②。

(3) 「 $2|x| + |y| \leq 2$ 」 $\implies$ 「 $|x| \leq 1$ かつ $|y| \leq 2$ 」は真だが, その逆は偽より①。

① 2-A-3

次の2式の大小を比較せよ。

(1) $ab + bc + ca$, $a^2 + b^2 + c^2$ (2)* $(a + b + c)^2$, $4(ab + bc)$

(3) $(ax + by)^2$, $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (4)* $3\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$, $\sqrt{5(3a + 2b)}$

(1) $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ (2) $(a + b + c)^2 \geq 4(ab + bc)$

解答 (等号は $a = b = c$ のとき成立) (等号は $a - b + c = 0$ のとき成立)

(3) $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ (4) $3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \leq \sqrt{5(3a + 2b)}$

(等号は $ay = bx$ のとき成立) (等号は $a = b$ のとき成立)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\
 &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\
 &= \frac{1}{2}\{(a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) \\
 &\quad + (c^2 + a^2 - 2ca)\} \\
 &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geq 0 \\
 &\text{よって, } ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \\
 &\text{等号は } a=b=c \text{ のとき成立。}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (a+b+c)^2 - 4(ab+bc) \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca \\
 &= (a^2 + b^2 - 2ab) + c^2 + 2c(a-b) \\
 &= (a-b)^2 + c^2 + 2c(a-b) = (a-b+c)^2 \geq 0 \\
 &\text{よって, } (a+b+c)^2 \geq 4(ab+bc) \\
 &\text{等号は } a-b+c=0 \text{ のとき成立。}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\
 &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy \\
 &\quad - b^2y^2 \\
 &= a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = (ay - bx)^2 \geq 0 \\
 &\text{よって, } (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\
 &\text{等号は } ay = bx \text{ のとき成立。}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & (\sqrt{5(3a+2b)})^2 - (3\sqrt{a} + 2\sqrt{b})^2 \\
 &= 15a + 10b - 9a - 4b - 12\sqrt{ab} \\
 &= 6a + 6b - 12\sqrt{ab} = 6(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\
 &\text{よって, } 3\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \leq \sqrt{5(3a+2b)} \\
 &\text{等号は } a=b \text{ のとき成立。}
 \end{aligned}$$

① 2-A-4

$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

●東京理科大

解答

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sqrt[3]{2} \text{ が有理数であるとする,} \\
 & \sqrt[3]{2} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は自然数で, } p \text{ と } q \text{ は互いに素) とおける。これを3乗して, } q^3 = 2p^3
 \end{aligned}$$

より q^3 が偶数だから, q も偶数である。
 よって, $q = 2k$ (k は自然数) とおくと,
 $(2k)^3 = 2p^3$ より $p^3 = 4k^3$
 ゆえに, p^3 は偶数である。
 これから p も偶数となり, p, q は互いに素であることに矛盾する。したがって,
 $\sqrt[3]{2}$ は無理数である。

B 問題

①2-B-1

次の□に入る適切な文を下の①～④から選べ

- (1) $x=5$ は, $x^2=5x$ であるための□ア。
- (2) $xy>0$ は, $x>0, y>0$ であるための□イ。
- (3) $3x-5y=1$ は, $x=2$ かつ $y=1$ であるための□ウ。
- (4) $x>1, y>1$ は, $x+y>2, xy>1$ であるために□エ。

- ① 必要条件であるが十分条件でない
- ② 十分条件であるが必要条件でない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (1) ② (2) ① (3) ① (4) ②

(1) $x^2=5x$ は $x=0$ または $x=5$ と同値。よって, $x=5$ ならば $x^2=5x$ は成立し, 逆は成立しないから, 十分条件。

(2) $xy>0$ は $x>0, y>0$ または $x<0, y<0$ と同値。よって, $x>0, y>0$ ならば, $xy>0$ は成立し, 逆は成立しないから, 必要条件。

(3) $x=2, y=1$ ならば $3x-5y=1$ は成立するが, 逆は成立しない。反例として, $x=-3, y=-2$ よって, 必要条件。

(4) $x>1, y>1$ ならば $x+y>2, xy>1$ は成立するが, 逆は成立しない。反例として, $x=\frac{1}{2}, y=4$ よって, 十分条件。

①2-B-2

次の□内に入れるのに最も適するものを下の①～④から選べ。

- (1) $a^2=b^2$ は $a^3=b^3$ であるための□ア。(ただし, a, b は実数)
- (2) $p^2-4q>0$ は 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解をもつための□イ。
- (3) 2 つの集合 P, Q について, $P \cup Q = P$ は $P \cap Q = Q$ であるための□ウ。

- ① 必要条件であるが十分条件でない
- ② 十分条件であるが必要条件でない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

解答 (1) ① (2) ② (3) ③

(1) $a^2=b^2 \iff a=\pm b$,
 $a^3=b^3 \iff a=b$ より, $a^3=b^3 \implies a^2=b^2$
 は成立するが逆は成立しない。

(2) $x^2+px+q=0$ が実数解をもつための必要十分条件は, $p^2-4q \geq 0$ で等号が必要。
 これは, 十分条件。

(3) $P \cup Q = P$ は $P \supset Q$ と同値。また,
 $P \cap Q = Q$ も $P \supset Q$ と同値。よって, 必要十分条件である。

①2-B-3

m を整数とする。このとき、 m^2 が3の倍数ならば、 m は3の倍数であることを証明せよ。

●奈良大

解答 (1) 対偶利用 (2) 背理法による

(1) 対偶をつくって、 m が3の倍数でないとき、 m^2 も3の倍数でないことを証明する。 m は3の倍数でないから、

$$m=3k\pm1 \quad (k \text{ は整数})$$

$$\text{よって、} m^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

これより m^2 は3の倍数ではない。よって、

対偶が真だから、もとの命題も真である。

(2) m が3の倍数でないと仮定する。すな

わち、 $m=3k\pm1$ である。このとき、

$$m^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

から m^2 は3の倍数ではない。これは m^2

が3の倍数であるという条件に矛盾する。

したがって、 m は3の倍数である。

①2-B-4

実数 α, β, γ が $\alpha+\beta+\gamma=3$ を満たしているとき、

$p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \quad q=\alpha\beta\gamma$ とおく。

(1) $p=q+2$ のとき、 α, β, γ の少なくとも1つは1であることを示せ。

(2) $p=3$ のとき、 α, β, γ はすべて1であることを示せ。 ●大阪市立大●

解答

$$\begin{aligned} (1) & (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \\ &= 1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma \\ &= 1-3+p-q = -2+(q+2)-q=0 \\ & \text{よって、} \alpha, \beta, \gamma \text{ の少なくとも1つは1} \\ & \text{である。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2+(\gamma-1)^2 \\ &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\alpha+\beta+\gamma)+3 \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ & \quad -2(\alpha+\beta+\gamma)+3 \\ &= 9-2p-6+3=6-2p \\ & \text{よって、} p=3 \text{ のとき、} \\ & (\alpha-1)^2+(\beta-1)^2+(\gamma-1)^2=0 \text{ となり、} \\ & \alpha=\beta=\gamma=1 \end{aligned}$$

①2-B-5

$|x|<1, |y|<1, |z|<1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$(1) \quad xy+1>x+y$$

$$(2) \quad xyz+2>x+y+z$$

●関西大●

解答

$$\begin{aligned} (1) & \quad xy+1-(x+y)=(x-1)(y-1) \\ & \text{ここで、} |x|<1, |y|<1 \text{ より、} x-1<0, \\ & y-1<0 \text{ から、} (x-1)(y-1)>0 \\ & \text{よって、} xy+1>x+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (1) \text{ より } (xy)z+1>xy+z \\ & \text{この両辺に1を加えて、} \\ & \quad xyz+2>(xy+1)+z \\ & (1) \text{ より、} xyz+2>(xy+1)+z>x+y+z \\ & \text{よって、} xyz+2>x+y+z \end{aligned}$$

①2-B-6

(1) $a > 0, b > 0, ab = 2$ のとき, $2a + 3b$ の最小値を求めよ。

(2)* $a > 0, b > 0, a + b = 3$ のとき, $2ab$ の最大値を求めよ。

解答

$$(1) 4\sqrt{3} \left(a = \sqrt{3}, b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき} \right) \quad (2) \frac{9}{2} \left(a = b = \frac{3}{2} \text{ のとき} \right)$$

$$(1) 2a + 3b \geq 2\sqrt{2a \cdot 3b} \\ = 2\sqrt{6ab} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

等号は $2a = 3b$ のとき成立。これと $ab = 2$

$$\text{より, } a = \sqrt{3}, b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) a + b \geq 2\sqrt{ab} \text{ より, } 3 \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\text{両辺を2乗して } 9 \geq 4ab \text{ から } 2ab \leq \frac{9}{2}$$

よって, 最大値は $\frac{9}{2}$, 等号は $a = b$ のと

き成立するから, $a = b = \frac{3}{2}$

①2-B-7

(1)* $x + 2y + 3z = 6$ のとき, $x^2 + 4y^2 + 9z^2$ の最小値を求めよ。

●西南学院大●

(2) $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$ のとき, $4x + 3y - 6z$ の最大値と最小値を求めよ。

解答

$$(1) 12 \left(x = 2, y = 1, z = \frac{2}{3} \text{ のとき} \right)$$

$$(2) \text{最大値 } \sqrt{17} \left(x = \frac{1}{\sqrt{17}}, y = \frac{3}{\sqrt{17}}, z = -\frac{2}{3\sqrt{17}} \text{ のとき} \right),$$

$$\text{最小値 } -\sqrt{17} \left(x = -\frac{1}{\sqrt{17}}, y = -\frac{3}{\sqrt{17}}, z = \frac{2}{3\sqrt{17}} \text{ のとき} \right)$$

$$(1) (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + (2y)^2 + (3z)^2) \\ \geq (x + 2y + 3z)^2$$

から, $3(x^2 + 4y^2 + 9z^2) \geq 36$ より,
 $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \geq 12$ から最小値 12

$$\text{等号は } \frac{x}{1} = \frac{2y}{1} = \frac{3z}{1} \text{ かつ } x + 2y + 3z = 6$$

より, $x = 2, y = 1, z = \frac{2}{3}$ のとき成立。

$$(2) \{(2x)^2 + y^2 + (3z)^2\} \{2^2 + 3^2 + (-2)^2\} \\ \geq (4x + 3y - 6z)^2$$

より, $1 \times 17 \geq (4x + 3y - 6z)^2$ から,

$$-\sqrt{17} \leq 4x + 3y - 6z \leq \sqrt{17} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

等号成立は, $2x : y : 3z = 2 : 3 : (-2)$ より,

$$x = \frac{1}{\sqrt{17}}, y = \frac{3}{\sqrt{17}}, z = -\frac{2}{3\sqrt{17}} \text{ のとき,}$$

①の右側の等号が成立。

$$x = -\frac{1}{\sqrt{17}}, y = -\frac{3}{\sqrt{17}}, z = \frac{2}{3\sqrt{17}} \text{ のと}$$

き, ①の左側の等号が成立。

C 問題

①2-C-1

次の条件 p, q に対し, p は q の必要条件か, 十分条件か, 必要十分条件か, そのいずれでもないかを答えよ。

- (1) $p: x^2 + y^2 < 1$ $q: |x| + |y| < 1$
 (2) $p: \text{命題 } r \text{ が真である}$ $q: \text{命題 } r \text{ の逆が真である}$
 (3) $p: a \text{ が } 3 \text{ の倍数である}$ $q: a \text{ の平方が } 3 \text{ の倍数である (ただし, } a \text{ は整数)}$
 (4) $p: |a+b| < |a| + |b|$ $q: ab > 0$ ●神戸女学院大●

解答 (1)必要条件 (2)いずれでもない (3)必要十分条件 (4)いずれでもない

(1) 右図より, それぞれの包含関係

から, $p \Rightarrow q$ は偽。 $q \Rightarrow p$ は真。

これより p は q

の必要条件である。

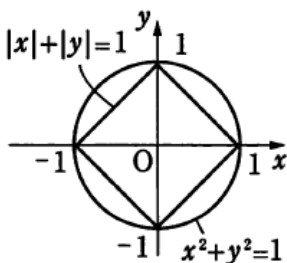
(2) $p \Rightarrow q$ は偽。

(反例) 命題 r

「 $x=0$ ならば $xy=0$ 」 とすると r

は真で, r の逆は「 $xy=0$ ならば $x=0$ 」 となりこれは偽である。

同様に $q \Rightarrow p$ も偽。



以上より必要条件でも十分条件でもない。

(3) $p \Rightarrow q$ は真。

$q \Rightarrow p$ も真。

(4) $p \Rightarrow q$ は偽。(反例) $a=-1, b=1$

$q \Rightarrow p$ も偽。(反例) $a=b=1$

よって, 必要条件でも十分条件でもない。

①2-C-2

実数 c に関する以下の条件 (A) $|c| \leq 2$ を考える。

以下の(1)から(6)の c に関する条件は, それぞれ上の条件 (A) が成り立つための

- (a) 必要条件であるが十分条件でない
 (b) 十分条件であるが必要条件でない
 (c) 必要十分条件である
 (d) 必要条件でも十分条件でもない

のいずれであるか。

- (1) $c \leq 2$ (2) $c^2 - 2 \leq 0$
 (3) すべての実数 x に対して $x^4 - c \geq 0$
 (4) ある実数 x があり $(x-1)^2 + c^2 \leq 4$ となる
 (5) $x < 1$ ならば $cx < 2$
 (6) x の 2 次方程式 $x^2 + cx + 1 = 0$ は実数解をもたない

●お茶の水女子大●

解答 (1) (a) (2) (b) (3) (d) (4) (c) (5) (b) (6) (b)

条件(A) $|c| \leq 2$ から, $-2 \leq c \leq 2$

- (1) 「 $c \leq 2 \implies -2 \leq c \leq 2$ 」は成り立たないが「 $c \leq 2 \longleftarrow -2 \leq c \leq 2$ 」は成り立つから必要条件ではあるが十分条件ではない。
- (2) $c^2 - 2 \leq 0 \iff -\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2}$ より
「 $-\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2} \implies -2 \leq c \leq 2$ 」は成り立つが「 $-\sqrt{2} \leq c \leq \sqrt{2} \longleftarrow -2 \leq c \leq 2$ 」は成り立たないから十分条件ではあるが必要条件ではない。
- (3) すべての実数 x に対して $x^4 - c \geq 0$ が成り立つのは $c \leq 0$
「 $c \leq 0 \implies -2 \leq c \leq 2$ 」も
「 $c \leq 0 \longleftarrow -2 \leq c \leq 2$ 」も成り立たない。
- (4) $(x-1)^2 + c^2 \leq 4$ より $c^2 \leq 4 - (x-1)^2$ から $c^2 \leq 4$, すなわち, $-2 \leq c \leq 2$ より条件(A)と同値である。よって, 必要十分条件である。

① 2-C-3

(1) $a:b=2:3$, $b:c=2:3$ のとき, $a^2 + bc + \frac{9}{b^2} + \frac{9}{ac}$ の最小値を

求めよ。

●北海道薬科大●

(2)* $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 1$ のとき, $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ の最小値を求めよ。●神奈川大●

(3)* $\frac{4}{\sin^2 \theta} + \frac{9}{\cos^2 \theta}$ の最小値を求めよ。

解答 (1) $2\sqrt{35}$ (2) 9 ($x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ のとき) (3) 25 ($\tan^2 \theta = \frac{2}{3}$ のとき)

① 2-C-4

文字がすべて正の数であるとき, 次の不等式を証明せよ。

(1) $m + n = 1$ ならば, $\frac{m}{a} + \frac{n}{b} \geq \frac{1}{am + bn}$ である。

(2) $p + q + r = 1$ ならば, $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} \geq \frac{1}{ap + bq + cr}$ である。

●福井工業大●

(5) $x < 1$ のとき

直線 $y = cx$ が

直線 $y = 2$ の下

方にあるための

c の値の範囲は

右図より,

$0 \leq c \leq 2$

したがって, 「 $0 \leq c \leq 2 \implies -2 \leq c \leq 2$ 」

は成り立つが「 $0 \leq c \leq 2 \longleftarrow -2 \leq c \leq 2$ 」

は成り立たないから十分条件ではあるが, 必要条件ではない。

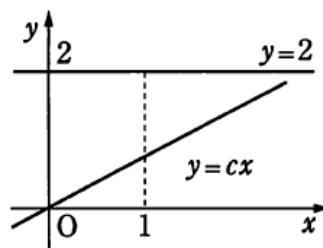
(6) $x^2 + cx + 1 = 0$ が実数解をもたないとき,

$D < 0$ より $c^2 - 4 < 0$, すなわち, $-2 < c < 2$

したがって,

「 $-2 < c < 2 \implies -2 \leq c \leq 2$ 」は成り立つが

「 $-2 < c < 2 \longleftarrow -2 \leq c \leq 2$ 」は成り立たないから, 十分条件ではあるが, 必要条件ではない。



解答

(1) 条件より $a:b:c=4:6:9$
 $a=4k, b=6k, c=9k (k \neq 0)$ とおく。

$$\begin{aligned} & a^2 + bc + \frac{9}{b^2} + \frac{9}{ac} \\ &= 16k^2 + 54k^2 + \frac{9}{36k^2} + \frac{9}{36k^2} \\ &= 70k^2 + \frac{1}{2k^2} \geq 2\sqrt{70k^2 \times \frac{1}{2k^2}} = 2\sqrt{35} \end{aligned}$$

等号は $70k^2 = \frac{1}{2k^2}$ のとき、すなわち、

$$k^4 = \frac{1}{140} \text{ のとき成立。}$$

(2) $x+y=1$ より、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \right) = 5 + \frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \\ & \geq 5 + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} = 5 + 4 = 9 \end{aligned}$$

等号は $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}$ から $y=2x$ のとき、すな
 わち、 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$ のとき成立。

(3) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より、

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sin^2\theta} + \frac{9}{\cos^2\theta} \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \left(\frac{4}{\sin^2\theta} + \frac{9}{\cos^2\theta} \right) \\ &= 4 + 9 + 4 \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 9 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &\geq 13 + 2\sqrt{4 \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \cdot 9 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = 13 + 12 = 25 \end{aligned}$$

等号は $4 \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 9 \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ のとき、

すなわち $\tan^2\theta = \frac{2}{3}$ のとき成立。

別解1 シュワルツの不等式より、

$$\begin{aligned} & (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \left(\frac{4}{\sin^2\theta} + \frac{9}{\cos^2\theta} \right) \\ & \geq \left(\sin\theta \cdot \frac{2}{\sin\theta} + \cos\theta \cdot \frac{3}{\cos\theta} \right)^2 \\ &= (2+3)^2 = 25 \text{ から求めることもできる。} \end{aligned}$$

別解2 $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \frac{1}{\tan^2\theta} \text{ より、} \\ & \text{与式} = 4 \left(1 + \frac{1}{\tan^2\theta} \right) + 9(1 + \tan^2\theta) \\ &= 13 + \frac{4}{\tan^2\theta} + 9\tan^2\theta \\ &\geq 13 + 2\sqrt{\frac{4}{\tan^2\theta} \cdot 9\tan^2\theta} = 25 \end{aligned}$$

① **2-C-5**

a, b, c を正の実数とすると、次の F と G の値の大小を比較せよ。

$$F = (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c), \quad G = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad \text{●神戸学院大●}$$

解答 $F \geq G$ (等号は $a=b=c$ のとき)

$$\begin{aligned} F - G &= (b+c)a^3 - 2(b^2+c^2)a^2 \\ &+ (b^3+c^3)a + (b^3+c^3)(b+c) - (b^2+c^2)^2 \\ &= a\{(b+c)a^2 - 2(b^2+c^2)a + b^3+c^3\} + b^3c \\ &+ bc^3 - 2b^2c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a\{b(a^2-2ab+b^2) + c(a^2-2ac+c^2)\} \\ &+ bc(b^2+c^2-2bc) \\ &= ab(a-b)^2 + ac(a-c)^2 + bc(b-c)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって、 $F \geq G$
 等号は $a=b=c$ のとき成立。

①2-C-6

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$, $x > 2$, $y > 2$ のとき $2x + y$ の最小値を求めよ。

●早稲田大●

解答 $6 + 4\sqrt{2}$ ($x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 + 2\sqrt{2}$ のとき)

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$$

ここで $x > 2$, $y > 2$ から, $y \geq \frac{2x}{x-2}$

これより,

$$\begin{aligned} 2x + y &\geq 2x + \frac{2x}{x-2} = 2x + 2 + \frac{4}{x-2} \\ &= 2(x-2) + \frac{4}{x-2} + 6 \end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{2(x-2) \cdot \frac{4}{x-2}} + 6 = 4\sqrt{2} + 6$$

よって, 最小値は $6 + 4\sqrt{2}$

等号は $2(x-2) = \frac{4}{x-2}$ と $x > 2$, $y > 2$ より,
 $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 + 2\sqrt{2}$ のとき成立。

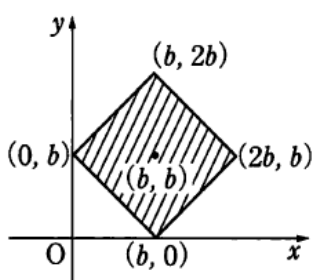
①2-C-7

命題「 $|x-b| + |y-b| \leq b$ ならば $x^2 + y^2 < 125$ である」が真であるような整数 b のうち最大のものを求めよ。

●近畿大●

解答 4

(1)
 $|x-b| + |y-b| \leq b$ を満たす点
(x, y) の存在
範囲は, $b > 0$
として右図の斜
線部分 (境界線



を含む) である。これが $x^2 + y^2 < 125$ を満たすためには, $b^2 + (2b)^2 < 125$ より $b^2 < 25$
この不等式を満たす整数 b のうち最大のものは $b = 4$ である。

第3章 二次関数

《学習項目》

- ・ 2次関数のグラフ (直線との位置関係など)
- ・ 2次関数の最大最小(変域なし) ⇒ 軸
- ・ 2次関数の最大最小(変域あり) ⇒ 軸・両端
- ・ 2次の絶対不等式
- ・ 2次方程式の解の配置問題 ⇒ 軸・端点・判別式
- ・ 逆手法の基礎

- ・ 定数変数
- ・ 場合分け
- ・ 関数と、方程式・不等式の対応

A 問題

① 3-A-1

次の関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。

$$(1) \ y = 2x^2 - 8x - 1 \quad (-1 \leq x \leq 3) \qquad (2) \ y = -x^2 + 4x - 1 \quad (0 < x \leq 1)$$

解答 (1) $x = -1$ で最大値 9, $x = 2$ で最小値 -9

(2) $x = 1$ で最大値 2, 最小値はない

① 3-A-2

次の2次方程式を解け。

$$(1) \ (x+6)(x-1) = x(7-3x) \qquad (2) \ (x+2)^2 - 5(x+2) + 5 = 0$$

$$(3) \ 1.5x(2-0.5x) = 0.5x+2 \qquad (4) \ x^2 - 5\sqrt{3}x + 18 = 0$$

解答 (1) $x = -1, \frac{3}{2}$ (2) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (3) $x = 2, \frac{4}{3}$ (4) $x = 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$

① 3-A-3

次の2次不等式を解け。

$$(1) \ 5x^2 + 7x - 6 > 0 \qquad (2) \ -x^2 + 4x - 1 > 0$$

解答 (1) $x < -2, \frac{3}{5} < x$ (2) $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$

① **3-A-4**

次の2次不等式を解け。

(1) $x^2 + 2x + 1 > 0$

(2) $x^2 - 2x + 3 \leq 0$

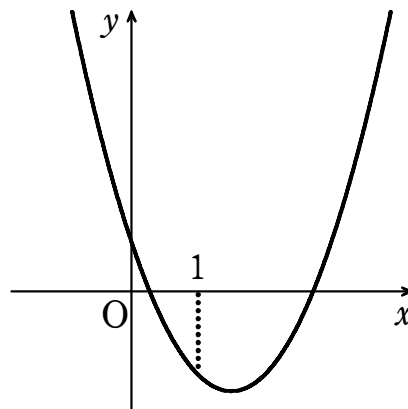
解答 (1) -1 以外のすべての実数 (2) 解はない

① **3-A-5**

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになるとき、次の値の符号を調べよ。

(1) a (2) b (3) c (4) $b^2 - 4ac$

(5) $a + b + c$ (6) $a - b + c$



解答 (1) $a > 0$ (2) $b < 0$ (3) $c > 0$ (4) $b^2 - 4ac > 0$

(5) $a + b + c < 0$ (6) $a - b + c > 0$

① **3-A-6**

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1) 放物線 $y = x^2 - x + 1$ を平行移動した曲線で、2点 $(1, 2)$, $(-1, 6)$ を通る。

(2) 頂点は放物線 $y = -3x^2 + 6x + 1$ の頂点と同じであり、 y 軸と点 $(0, 6)$ で交わる。

(3) 最小値が -1 で、そのグラフが2点 $(1, 1)$, $(3, 1)$ を通る。

解答 (1) $y = x^2 - 2x + 3$ (2) $y = 2(x - 1)^2 + 4$ ($y = 2x^2 - 4x + 6$)

(3) $y = 2(x - 2)^2 - 1$ ($y = 2x^2 - 8x + 7$)

B 問題

① **3-B-1**

実数 x, y の2次式 $x^2 - 2xy + 5y^2 + 6x - 14y + 5$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

$$\begin{aligned} & x^2 - 2xy + 5y^2 + 6x - 14y + 5 \\ &= x^2 - 2(y-3)x + 5y^2 - 14y + 5 \\ &= (x-y+3)^2 - (y-3)^2 + 5y^2 - 14y + 5 \\ &= (x-y+3)^2 + 4y^2 - 8y - 4 \\ &= (x-y+3)^2 + 4(y-1)^2 - 8 \end{aligned}$$

これより, $x-y+3=0, y-1=0$ すなわち

$x=-2, y=1$ のとき最小値 -8

(答) $x=-2, y=1$ のとき最小値 -8

① **3-B-2**

(3)* $x+y+z=5$ のとき, $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

【hint】まずは一文字消去を試そう。余力があれば, 別解も考えてみよう。

(3) $z=5-x-y$ を代入して

$$\begin{aligned} \text{与式} &= x^2 + y^2 + (5-x-y)^2 \\ &= 2x^2 + 2(y-5)x + 2y^2 - 10y + 25 \\ &= 2\left(x + \frac{y-5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(3y^2 - 10y + 25) \\ &= 2\left(x + \frac{y-5}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{25}{3} \end{aligned}$$

これより, $x + \frac{y-5}{2} = 0, y = \frac{5}{3}$ のとき最

小値 $\frac{25}{3}$ をとる。

(答) $\frac{25}{3} \left(x=y=z=\frac{5}{3} \right)$

① **3-B-3**

関数 $f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$ の $-2 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

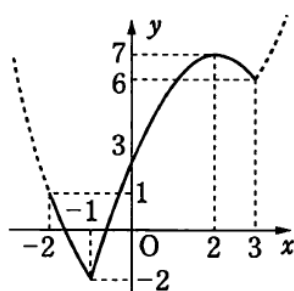
$$(2) f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x = \begin{cases} x^2 - 3 & (x \leq -1, 3 \leq x) \\ -x^2 + 4x + 3 & (-1 < x < 3) \end{cases}$$

これを図示すると右図の実線

部分になる。よって,

最大値 7 ($x=2$)

最小値 -2 ($x=-1$)



① 3-B-4

2 次関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ の $0 \leq x \leq 4$ における最大値を $M(a)$, 最小値を $m(a)$ とする。次の値を求めよ。

- (1) $M(a)$ (2) $m(a)$ (3) $M(a) - m(a)$ の最小値

(1) 最大値は

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 2a + 3$ から,

$a \leq 2$ のとき, 図 1

から, 最大値は

$x=4$ のときで,

$$M(a) = f(4)$$

$$= -6a + 19$$

$a > 2$ のとき, 図 2

より, 最大値は $x=0$

のときで,

$$M(a) = f(0) = 2a + 3$$

- (2) 最小値は $a \leq 0$ のとき,

図 3 より, $x=0$ で最小値

$$m(a) = f(0) = 2a + 3$$

図 4 より, $0 < a < 4$ のとき, $x=a$ で最小値

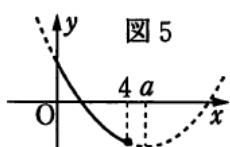
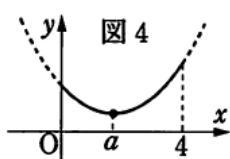
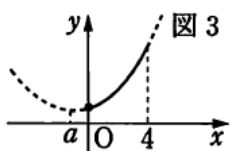
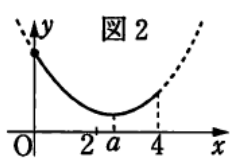
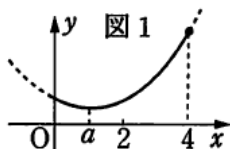
$$m(a) = f(a)$$

$$= -a^2 + 2a + 3$$

図 5 より, $a \geq 4$ のとき, $x=4$ で最小値

$$m(a) = f(4)$$

$$= -6a + 19$$



- (3) $h(a) = M(a) - m(a)$ とすると

$$a \leq 0 \text{ のとき, } h(a) = 16 - 8a$$

$$0 < a \leq 2 \text{ のとき, } h(a) = a^2 - 8a + 16$$

$$2 < a < 4 \text{ のとき, } h(a) = a^2$$

$$a \geq 4 \text{ のとき, } h(a) = 8a - 16$$

これより, $h(a)$ の最小値は $a=2$ のときで, 値は 4 である。

- (1) $a \leq 2$ のとき $M(a) = -6a + 19$

$$a > 2 \text{ のとき } M(a) = 2a + 3$$

- (2) $a \leq 0$ のとき $m(a) = 2a + 3$

$$0 < a < 4 \text{ のとき } m(a) = -a^2 + 2a + 3$$

$$a \geq 4 \text{ のとき } m(a) = -6a + 19$$

- (3) $a=2$ のとき 4

①3-B-5

2次関数 $f(x)=x^2-2x+3$ の $t \leq x \leq t+1$ における最大値を $M(t)$, 最小値を $m(t)$ とするとき, $M(t)$ の最小値と $m(t)$ の最小値を求めよ。

$M(t)$ の最小値 $\frac{9}{4}$ ($t=\frac{1}{2}$ のとき),

$m(t)$ の最小値 2 ($0 \leq t \leq 1$ のとき)

$$y=x^2-2x+3 \\ = (x-1)^2+2 \text{ より, 図1}$$

のように $x=t$ で最大となるか, 図2のように $x=t+1$ で最大となる。

よって,

$t < \frac{1}{2}$ のとき,

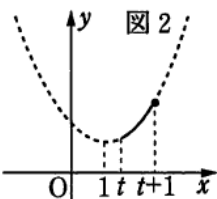
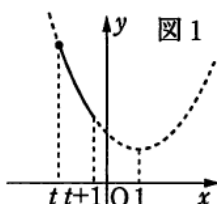
$$M(t)=t^2-2t+3$$

$t \geq \frac{1}{2}$ のとき,

$$M(t)=(t+1)^2-2(t+1)+3$$

$$\text{よって, } M(t)=\begin{cases} t^2-2t+3 & (t < \frac{1}{2}) \\ t^2+2 & (t \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

これより, $M(t)$ の最小値は $\frac{9}{4}$ となり, このときの t の値は $\frac{1}{2}$ である。



$m(t)$ は右のような3通りとなる。 $t+1 < 1$ すなわち $t < 0$ のとき, 図3のようになり,

$$m(t)=(t+1)^2-2(t+1)+3 \\ = t^2+2$$

$t \leq 1 \leq t+1$ すなわち

$0 \leq t \leq 1$ のとき, 図4の

ようになり, $m(t)=2$

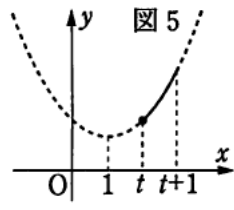
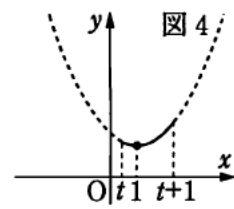
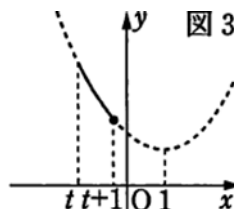
$t > 1$ のとき, 図5の

$$\text{ようになり, } m(t)=t^2-2t+3$$

以上より,

$$m(t)=\begin{cases} t^2+2 & (t < 0) \\ 2 & (0 \leq t \leq 1) \\ t^2-2t+3 & (t > 1) \end{cases}$$

これより, $m(t)$ の最小値は 2 となり, このときの t の値は $0 \leq t \leq 1$ である。



①3-B-6

(1) $x \geq 0, y \geq 0, x+y=2$ のとき, x^2+y^2-xy の最大値と最小値を求めよ。

(1) $x \geq 0, y \geq 0, x+y=2$ より

$$0 \leq x \leq 2 \dots\dots \textcircled{1}$$

$y=-x+2$ を x^2+y^2-xy に代入して,

$$x^2+(-x+2)^2-x(-x+2)=3(x-1)^2+1$$

ここで①より $x=0$ または 2 で最大値 4, $x=1$ で最小値 1 をとる。

(1) 最大値 4 ($x=0, y=2$ または $x=2, y=0$), 最小値 1 ($x=1, y=1$)

①3-B-7

- (1) $0 \leq x \leq 2$ における $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^2 - 3x^2 - 6x + 3$ の最大値と最小値を求めよ。
- (2)* $y = (x^2 - 4x + 5)^2 - 2a(x^2 - 4x + 5) + 3$ の最小値が 10 になるように定数 a の値を定めよ。

41 (1) 最大値 100 ($x=2$), 最小値 12 ($x=0$)

解答

(2) $a = -3$

(1) $X = x^2 + 2x + 3$ とすると,

$$f(x) = X^2 - 3X + 12 = \left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}$$

$0 \leq x \leq 2$ より, $3 \leq X \leq 11$ だから $f(x)$ は $X=3$ すなわち $x=0$ のとき最小値 12 をとり, $X=11$ すなわち $x=2$ のとき最大値 100 をとる。

(2) $x^2 - 4x + 5$

$$= (x-2)^2 + 1 \text{ より,}$$

$x^2 - 4x + 5$ の最小値は 1 である。

$X = x^2 - 4x + 5$ とする
とき, $y = X^2 - 2aX + 3$

($X \geq 1$) の最小値が
10 となればよい。

$$y = X^2 - 2aX + 3$$

$$= (X-a)^2 - a^2 + 3$$

より, 図1のように

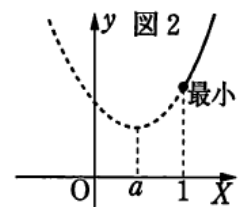
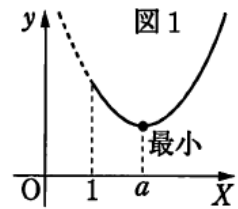
$a \geq 1$ のとき, 最小値

は $-a^2 + 3$ より,

$-a^2 + 3 = 10$ で, 不適。

$a < 1$ のとき, 図2より, $X=1$ で最小値

$4 - 2a$ だから, $4 - 2a = 10$ より, $a = -3$



①3-B-8

(1)* 不等式 $x^2 + kx + k^2 - 2k - 4 < 0$ を満たす x の値が存在するような定数 k の値の範囲を求めよ。

(1) $x^2 + kx + k^2$

$-2k - 4 < 0$ を満たす x

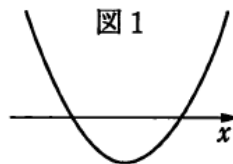
が存在するには, 図1

のようになればよいから,

条件は $D > 0$ である。

$$D = k^2 - 4(k^2 - 2k - 4)$$

$$= -(k-4)(3k+4) > 0 \text{ より, } -\frac{4}{3} < k < 4$$



$$-\frac{4}{3} < k < 4$$

解答

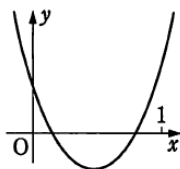
① 3-B-9

2 次方程式 $4x^2 - 2ax + 1 = 0$ の異なる 2 つの解がともに $0 < x < 1$ の範囲にあるための定数 a の値の範囲を求めよ。

$$f(x) = 4x^2 - 2ax + 1 \text{ とする。}$$

条件を満たすには右図のようになればよい。

$$\text{よって, } \begin{cases} D > 0 \\ 0 < \text{軸} < 1 \\ f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$$



が成立すればよい。

$$\frac{D}{4} = a^2 - 4 > 0 \text{ より, } a < -2, 2 < a \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{軸は } x = \frac{a}{4} \text{ より, } 0 < \frac{a}{4} < 1 \text{ から, } 0 < a < 4 \cdots \textcircled{2}$$

$$f(0) = 1 > 0 \text{ より, これは成立している。}$$

$$f(1) = 4 - 2a + 1 > 0 \text{ より, } a < \frac{5}{2} \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{以上}\textcircled{1}\sim\textcircled{3}\text{より, } 2 < a < \frac{5}{2}$$

解答

$$2 < a < \frac{5}{2}$$

① 3-B-10

2 次方程式 $ax^2 - (a-1)x - 6 = 0$ が $-2 < x < -1$ と $1 < x < 2$ の両方の範囲で解をもつように定数 a の値の範囲を定めよ。

$$f(x) = ax^2 - (a-1)x - 6 \text{ とする。}$$

2 次方程式であるから, $a \neq 0$

$$1 < x < 2 \text{ で解をもつから } \begin{array}{c} \text{ } \\ f(1)f(2) < 0 \end{array}$$

$$-2 < x < -1 \text{ で解をもつから, } f(-2)f(-1) < 0$$

$$\text{これらを連立して } \begin{cases} f(1)f(2) < 0 \\ f(-2)f(-1) < 0 \end{cases}$$

$$\text{すなわち, } \begin{cases} 2a - 4 > 0 \\ (6a - 8)(2a - 7) < 0 \end{cases}$$

$$\text{これを解いて, } 2 < a < \frac{7}{2}$$

解答

$$2 < a < \frac{7}{2}$$

C 問題

① 3-C-1

放物線 $y=x^2$ 上の動点 $P(x, y)$ と、 y 軸上の点 $A(0, a)$ (ただし、 $a>0$) を考える。このとき、 AP^2 の最小値を求めよ。

解答 $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき a^2 , $a \geq \frac{1}{2}$ のとき $\frac{4a-1}{4}$

$$\begin{aligned} AP^2 &= x^2 + (y-a)^2 = y + (y-a)^2 \\ &= y^2 - 2ay + y + a^2 = y^2 - (2a-1)y + a^2 \\ &= \left(y - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + \frac{4a-1}{4} \end{aligned}$$

ここで $y \geq 0$ より、 $\frac{2a-1}{2} \geq 0$ のとき、最小

値は $\frac{4a-1}{4}$

$\frac{2a-1}{2} < 0$ のとき、 $y=0$ で最小値は a^2 より、

$a \geq \frac{1}{2}$ のとき $\frac{4a-1}{4}$, $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき a^2

① 3-C-2

a, b を実数として、 $P=a^4-4a^2b+b^2+6b$ とおく。

(1) すべての実数 b に対して $P \geq 0$ となるような a の範囲を求めよ。

(2) すべての実数 a に対して $P \geq 0$ となるような b の範囲を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad P &= a^4 - 4a^2b + b^2 + 6b \\ &= b^2 - 2(2a^2 - 3)b + a^4 \geq 0 \end{aligned}$$

がすべての実数 b に対して成り立つから

$$(2a^2 - 3)^2 - a^4 \leq 0, (a^2 - 1)(a^2 - 3) \leq 0$$

$$(a + \sqrt{3})(a + 1)(a - 1)(a - \sqrt{3}) \leq 0$$

$$-\sqrt{3} \leq a \leq -1, 1 \leq a \leq \sqrt{3}$$

$$(2) \quad P = (a^2 - 2b)^2 + 6b - 3b^2$$

$a^2 = t$ とおき、この式を $f(t)$ とすると、

$$f(t) = (t - 2b)^2 + 6b - 3b^2 \quad (t \geq 0)$$

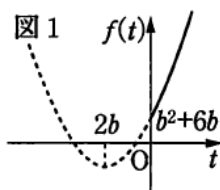
(i) $b < 0$ のとき図1

より、 $f(0) \geq 0$ のとき

題意を満たす。

$$\begin{cases} b < 0 \\ b^2 + 6b \geq 0 \end{cases} \text{より,}$$

$$b \leq -6$$



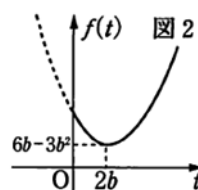
(ii) $b \geq 0$ のとき図2より、 $f(2b) \geq 0$ のとき題意を満たす。

$$\begin{cases} b \geq 0 \\ 6b - 3b^2 \geq 0 \end{cases} \text{より,}$$

$$0 \leq b \leq 2$$

以上より、 $b \leq -6$

または $0 \leq b \leq 2$



解答

50 (1) $-\sqrt{3} \leq a \leq -1, 1 \leq a \leq \sqrt{3}$

(2) $b \leq -6$ または $0 \leq b \leq 2$

① 3-C-3

$2x^2+x-1>0\cdots\textcircled{1}$, $x^2+(2-a)x-2a<0\cdots\textcircled{2}$ を考える。

- (1) ①, ②を同時に満たす整数値が1だけであるように a の値の範囲を定めよ。
 (2) ①, ②を同時に満たす整数値が3つ以下であるように a の値の範囲を定めよ。

解答

(1) $1<a\leq 2$ (2) $-6\leq a\leq 4$

①より, $(2x-1)(x+1)>0$ より

$x<-1, \frac{1}{2}<x\cdots\cdots\textcircled{3}$

②より $(x+2)(x-a)<0$ から

(i) $a>-2$ のとき $-2<x<a$

(ii) $a=-2$ のとき解なし

(iii) $a<-2$ のとき $a<x<-2$

(1) 右図のようになればよいから,

$1<a\leq 2$

(2) $a\geq -2$ のとき

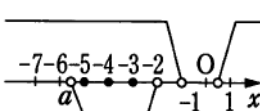
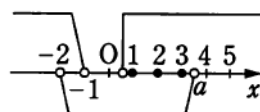
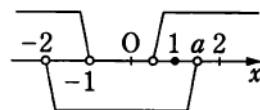
右図より,

$-2\leq a\leq 4$

$a\leq -2$ のとき右図

より, $-6\leq a\leq -2$

よって, $-6\leq a\leq 4$



① 3-C-4

$0\leq x\leq 2$ における関数 $f(x)=-x^2+4|x-a|+1$ の最小値を $g(a)$ とする。

- (1) $g(a)$ を求めよ。 (2) $g(a)$ の最小値を求めよ。

解答 (1)

a	$a<0$	$0\leq a\leq 2$	$a>2$
$g(a)$	$-4a+1$	$-a^2+1$	$4a-11$

 (2) 最小値 -3

(1) $x\geq a$ のとき

$f(x)=-(x-2)^2-4a+5$

$x<a$ のとき $f(x)=-(x+2)^2+4a+5$

$y=f(x)$ のグラフは次のようになる

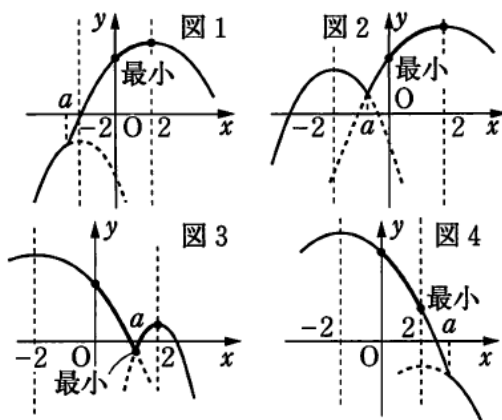
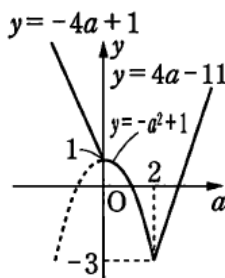


図1または図2のとき, すなわち $a<0$ のとき $g(a)=f(0)=-4a+1$

図3のとき, すなわち $0\leq a\leq 2$ のとき, $g(a)=f(a)=-a^2+1$

図4のとき, すなわち $a>2$ のとき, $g(a)=f(2)=4a-11$

- (2) $y=g(a)$ のグラフをかくと右図のようになる。これから, $g(a)$ は $a=2$ で最小値 -3 をとる。



第4章 三角比

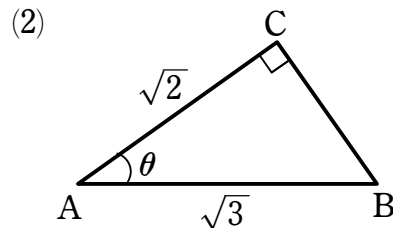
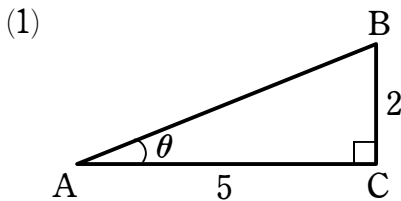
《学習項目》

- ・ 三角比の定義
- ・ 鋭角 $\Rightarrow$ 鈍角 (三角形 $\Rightarrow$ 円)
- ・ 相互関係
- ・ 正弦定理
- ・ 余弦定理
- ・ 三角形の面積公式
- ・ 三角形の内接円半径公式
- ・ 中線定理
- ・ 内角の二等分線の性質
- ・ 鋭角鈍角の判定
- ・ 三角形の成立条件
- ・ 三角形の形状決定問題

A 問題

①4-A-1

下の図において、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を、それぞれ求めよ。



解答 (1) $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $\tan \theta = \frac{2}{5}$

(2) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

①4-A-2

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (2) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $\tan \theta = 1$

解答 (1) $\theta = 30^\circ, 150^\circ$ (2) $\theta = 135^\circ$ (3) $\theta = 45^\circ$

①4-A-3

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ のうちの1つが次のように与えられたとき、他の2つの値を求めよ。

(1) $\cos \theta = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$ (2) $\tan \theta = -\frac{\sqrt{15}}{3}$

解答 (1) $\sin \theta = \frac{2}{7}$, $\tan \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$ (2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{4}$

① **4-A-4**

$\triangle ABC$ において、外接円の半径を R とする。次のものを求めよ。

(1) $b=10$, $A=105^\circ$, $C=30^\circ$ のとき B , c , R

(2) $b=\sqrt{6}$, $R=\sqrt{2}$ のとき B

解答 (1) $B=45^\circ$, $c=5\sqrt{2}$, $R=5\sqrt{2}$ (2) $B=60^\circ$, 120°

① **4-A-5**

(1) $\triangle ABC$ において、 $a=2\sqrt{2}$, $b=3$, $C=135^\circ$ のとき c を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ において、 $a=13$, $b=7$, $c=15$ のとき A を求めよ。

解答 (1) $c=\sqrt{29}$ (2) $A=60^\circ$

① **4-A-6**

$\triangle ABC$ において、 $a=8$, $b=3$, $c=7$ のとき、次のものを求めよ。

(1) $\cos A$ の値

(2) $\triangle ABC$ の面積 S

(3) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r

(4) $\triangle ABC$ の外接円の半径 R

解答 (1) $-\frac{1}{7}$ (2) $6\sqrt{3}$ (3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{7}{\sqrt{3}}$

B 問題

①4-B-1

$(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$ のとき, $\cos A:\cos B:\cos C$ を求めよ。

解答

$$-7:11:13$$

$$b+c=4k, \quad c+a=5k,$$

$$a+b=6k \text{ とすると,}$$

$$a=\frac{7}{2}k, \quad b=\frac{5}{2}k, \quad c=\frac{3}{2}k \text{ より,}$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{11}{14}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{13}{14}$$

$$\text{よって, } \cos A:\cos B:\cos C = -7:11:13$$

①4-B-2

$\sin A:\sin B:\sin C=15:13:4$ のとき, $\tan A$ の値を求めよ。●中部大●

$$-\frac{12}{5}$$

解答

$$\sin A:\sin B:\sin C=15:13:4 \text{ より,}$$

$$a:b:c=15:13:4$$

$$\text{ゆえに, } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{5}{13} \text{ と な}$$

$$\text{り, } A \text{ は鈍角だから, } \tan A < 0$$

$$\text{よって, } 1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \text{ に代入して,}$$

$$\tan A = -\frac{12}{5}$$

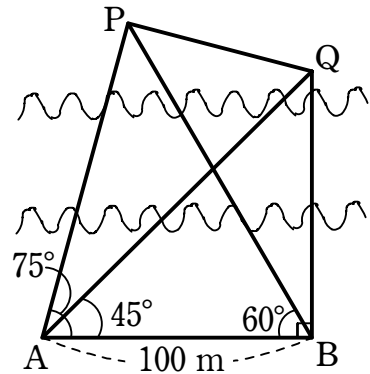
①4-B-3

右の図のように、100 m 離れた2地点 A, B から川を隔てた対岸の2地点 P, Q を観測して、次の値を得た。

$$\angle PAB = 75^\circ, \angle QAB = 45^\circ, \angle PBA = 60^\circ, \angle QBA = 90^\circ$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A, P 間の距離を求めよ。
- (2) P, Q 間の距離を求めよ。



(1) $50\sqrt{6}$ m (2) $50\sqrt{2}$ m

解答

(1) $\triangle PAB$ において $\angle APB = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により $\frac{AP}{\sin 60^\circ} = \frac{100}{\sin 45^\circ}$

ゆえに $AP = \frac{100 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = 50\sqrt{6}$ (m)

(2) $\triangle QAB$ は $\angle QBA = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから $AQ = 100\sqrt{2}$

$\angle PAQ = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$ であるから、 $\triangle PAQ$ において、余弦定理により

$$PQ^2 = (50\sqrt{6})^2 + (100\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 50\sqrt{6} \cdot 100\sqrt{2} \cos 30^\circ = 5000$$

$PQ > 0$ であるから $PQ = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$ (m)

①4-B-4

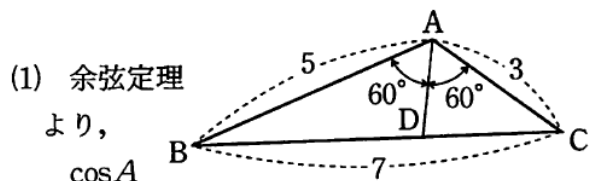
$\triangle ABC$ において、 $AB=5$, $BC=7$, $CA=3$ とする。

- (1) $\angle A$ の大きさを求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (3) $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき、 AD の長さを求めよ。

●立教大●

(1) 120° (2) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

解答



(1) 余弦定理

より,

$\cos A$

$$= \frac{9+25-49}{30} = -\frac{1}{2} \text{ から, } A=120^\circ$$

$$(2) S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

(3) $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ より,

$$\begin{aligned} \frac{15\sqrt{3}}{4} &= \frac{1}{2} \times 5 \times AD \times \sin 60^\circ \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 3 \times AD \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{4} AD + \frac{3\sqrt{3}}{4} AD = 2\sqrt{3} AD \end{aligned}$$

$$\text{これから, } AD = \frac{15}{8}$$

① **4-B-5**

$\triangle ABC$ において, $a=8$, $b=4$, $c=6$ とする。線分 BC の中点を M , 線分 BM の中点を D とするとき,

(1) AM の長さを求めよ。

(2) AD の長さを求めよ。

解答 $AM = \sqrt{10}$, $AD = \sqrt{19}$

① **4-B-6**

次の等式が成り立つとき, $\triangle ABC$ はどのような形状か。

(1) $\sin A = 2\cos B \sin C$

(2)* $a\cos B - b\cos A = c$

(3)* $\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$

(4) $b\sin^2 A + a\cos^2 B = a$

◎松山大◎

(1) $AB=AC$ の二等辺三角形 (3) $C=90^\circ$ の直角三角形

解答 (2) $A=90^\circ$ の直角三角形

(4) $CA=CB$ の二等辺三角形

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sin A &= \frac{a}{2R}, \\
 \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \sin C = \frac{c}{2R} \\
 &\text{を与えられた等式に代入すると,} \\
 \frac{a}{2R} &= 2 \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \times \frac{c}{2R} \text{ から, } b^2 = c^2 \\
 &\text{すなわち, } b = c \\
 (2) \quad a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= c \\
 &\text{整理して } a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{よって, } A = 90^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sin C &= \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} \\
 \sin C(\cos A + \cos B) &= \sin A + \sin B \text{ より,} \\
 \frac{c}{2R} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right) &= \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} \\
 &\text{整理して,} \\
 (a+b)c^2 - (a^3 + b^3) - ab(a+b) &= 0 \\
 \text{よって, } (a+b)(c^2 - a^2 - b^2) &= 0 \text{ より,} \\
 a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{よって, } C &= 90^\circ \\
 (4) \quad b \sin^2 A + a(1 - \sin^2 B) &= a \text{ より,} \\
 b \sin^2 A &= a \sin^2 B \\
 \text{よって, } b \times \frac{a^2}{4R^2} - a \times \frac{b^2}{4R^2} &= 0 \text{ から, } a = b
 \end{aligned}$$

① 4-B-7

円に内接する四角形 ABCD の4 辺の長さが AB=4, BC=4, CD=6, DA=10 であるとき,

- (1) $\angle ADC = \theta$ とするとき, $\cos \theta$ の値と AC の長さを求めよ。
 (2) 四角形 ABCD が内接している円の半径と四角形 ABCD の面積を求めよ。

解答 (1) $\cos \theta = \frac{13}{19}$, $AC = \frac{32\sqrt{19}}{19}$ (2) 半径 $\frac{2\sqrt{57}}{3}$, 面積 $16\sqrt{3}$

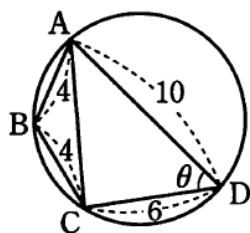
(1) $\triangle ACD$ において,

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= 10^2 + 6^2 - 2 \\
 &\times 10 \times 6 \times \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC \text{ において,} \\
 AC^2 &= 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \\
 &\times 4 \times \cos(180^\circ - \theta) \\
 &\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

①, ②を連立して,

$$\cos \theta = \frac{13}{19}, \quad AC = \frac{32\sqrt{19}}{19}$$



$$(2) \quad 2R = \frac{AC}{\sin \theta} \text{ より, } R = \frac{2\sqrt{57}}{3}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} BA \times BC \sin(180^\circ - \theta) \\
 &\quad + \frac{1}{2} DA \times DC \sin \theta \\
 &= 16\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

C 問題

①4-C-1

- (1) $\triangle ABC$ において, $A=60^\circ$ のとき, $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{c+a}$ の値を求めよ。
 (2) $\triangle ABC$ において, $A=60^\circ$, $a=\frac{\sqrt{6}}{2}c$ のとき, $\sin B$ と $\sin C$ の値を求めよ。

● 釧路公立大 ●

(1) 1 (2) $\sin B = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

解答

(1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ より,

$$b^2 + c^2 = a^2 + bc$$

これから,

$$\begin{aligned} \frac{c}{a+b} + \frac{b}{c+a} &= \frac{c^2 + ca + ab + b^2}{(a+b)(c+a)} \\ &= \frac{a^2 + bc + ac + ab}{(a+b)(a+c)} = \frac{(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)} = 1 \end{aligned}$$

(2) (1) の $b^2 + c^2 = a^2 + bc$ に $a = \frac{\sqrt{6}}{2}c$ を代

入すると $b^2 + c^2 = \frac{6}{4}c^2 + bc$ から,

$$2b^2 - 2bc - c^2 = 0 \quad \text{これより, } b = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}c$$

ここで, $b > 0$ より, $b = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}c$

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin B}$$

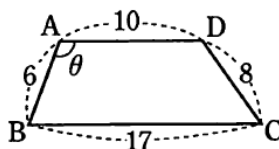
$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{b}{a} \sin 60^\circ = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}c}{\frac{\sqrt{6}}{2}c} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin C} \text{ より,}$$

$$\sin C = \frac{c}{a} \sin 60^\circ = \frac{c}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}c} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

①4-C-2

右図のように $AD \parallel BC$ である台形 $ABCD$ がある。辺の長さは $AB=6$, $BC=17$, $CD=8$, $DA=10$ である。 $\angle DAB = \theta$ とするとき, 次の問いに答えよ。



- (1) $\cos \theta$ を求めよ。
 (2) 対角線 BD の長さを求めよ。
 (3) 台形 $ABCD$ の面積を求めよ。

● 専修大 ●

(1) $\cos \theta = -\frac{1}{4}$ (2) $BD = \sqrt{166}$ (3) $\frac{81\sqrt{15}}{4}$

解答

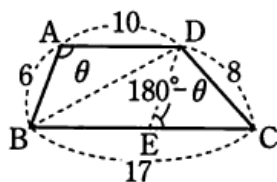
(1) AB と
平行な直線 DE を
引く。

△DEC について

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{1}{4}$$

よって,

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \text{ から, } \cos \theta = -\frac{1}{4}$$



(2) △ABD において,

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \theta \\ &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= 166 \end{aligned}$$

(3) 台形の高さは $6\sin(180^\circ - \theta) = 6\sin \theta$

$$\text{ここで, } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ より,}$$

台形の面積は

$$\frac{1}{2}(10+17) \times 6 \times \sin \theta = \frac{81\sqrt{15}}{4}$$

① 4-C-3

円に内接する四角形 ABCD において, $AB=1$, $BC=2$, $CD=3$, $DA=4$ とする。

(1) BD の長さと, $\cos \angle BAD$ の値を求めよ。

(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

(3) AC と BD の交点を P とするとき, $AC:BD$, $BP:PD$, $AP:PC$ を求めよ。

(4) 4 つの三角形の面積比 $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDA$ を求めよ。

解答

$$(1) BD = \frac{\sqrt{385}}{5}, \cos \angle BAD = \frac{1}{5}$$

$$(2) 2\sqrt{6}$$

$$(3) AC:BD=5:7, BP:PD=1:6, AP:PC=2:3$$

$$(4) 2:3:18:12$$

(1) $\angle BAD$

$=\theta$ とすると,

$$\angle BCD = 180^\circ - \theta$$

より, 余弦定理から,

$$BD^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \cos \theta \dots\dots ①$$

$$\times 4 \cos \theta \dots\dots ①$$

$$BD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(180^\circ - \theta)$$

$$= 2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3 \times \cos \theta \dots\dots ②$$

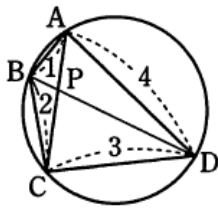
$$①, ② \text{ を解いて, } \cos \theta = \frac{1}{5}, BD = \frac{\sqrt{385}}{5}$$

$$(2) \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \theta$$

$$+ \frac{1}{2} CB \times CD \times \sin(180^\circ - \theta)$$

$$= 2\sqrt{6}$$



(3) (1)と同様にして AC を求めると,

$$\angle ABC = \theta \text{ とおくと, } \angle ADC = 180^\circ - \theta$$

$$\cos \theta = -\frac{5}{7} \text{ より, } AC = \frac{\sqrt{385}}{7} \text{ となり,}$$

$$AC:BD = \frac{\sqrt{385}}{7} : \frac{\sqrt{385}}{5} = 5:7$$

$$BP:PD = \triangle BAC : \triangle DAC$$

$$= \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin \angle ABC : \frac{1}{2} DA \times DC$$

$$\times \sin \angle ADC$$

$$= BA \times BC : DA \times DC = 1 \times 2 : 4 \times 3 = 1:6$$

同様に,

$$AP:PC = AB \times AD : CB \times CD = 4:6 = 2:3$$

(4) $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCD:\triangle PDA$

$$= (PA \times PB) : (PB \times PC) : (PC \times PD) :$$

$$(PD \times PA)$$

ここで, $PB=k$ とおくと $PD=6k$

$$PA=2m \text{ とおくと, } PC=3m$$

また, $(PA+PC):(PB+PD)=5:7$ より,

$$5m:7k=5:7$$

ゆえに, $m=k=1$ とおいて考えると,

$$(PA \times PB) : (PB \times PC) :$$

$$(PC \times PD) : (PD \times PA)$$

$$= 2 \times 1 : 1 \times 3 : 3 \times 6 : 6 \times 2 = 2:3:18:12$$

①4-C-4

三角形 ABC において, $AB=2$, $AC=1$ とする。∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を P とし, $\angle PAC=\theta$ とする。

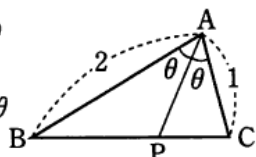
(1) AP を θ を用いて表せ。 (2) $AP=BP$ のとき, θ の値を求めよ。

◎広島大◎

(1) $AP=\frac{4}{3}\cos\theta$ (2) $\theta=30^\circ$

解答

(1) $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin 2\theta \\ &= \sin 2\theta \end{aligned}$$


$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle ACP$ より,

$$\begin{aligned} & \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times AP \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 1 \times AP \times \sin \theta \\ &= \frac{3}{2}AP \sin \theta \end{aligned}$$

これより, $2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2}AP \sin \theta$

よって, $AP = \frac{4}{3}\cos \theta$

(2) $BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2AB \cdot AP \cos \theta$

ここで条件と(1)の結果より,

$AP=BP=\frac{4}{3}\cos \theta$, $AB=2$ を代入して,

$$\left(\frac{4}{3}\cos \theta\right)^2 = 4 + \left(\frac{4}{3}\cos \theta\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3}\cos^2 \theta$$

これより, $\cos^2 \theta = \frac{3}{4}$ $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

ここで(1)の結果 $AP = \frac{4}{3}\cos \theta > 0$ より,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

①4-C-5

三角形 ABC において, 次の等式が成り立つとき, この三角形はどのような三角形か。

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc\left(\frac{1}{2} + \cos A\right) + ca\left(\frac{1}{2} + \cos B\right) + ab\left(\frac{1}{2} + \cos C\right)$$

◎日本女子大◎

右辺を余弦定理を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= bc\left(\frac{1}{2} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &\quad + ca\left(\frac{1}{2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right) \\ &\quad + ab\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \end{aligned}$$

よって, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

すなわち, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

等号が成り立つのは $a=b=c$ のとき。

解答

正三角形

①4-C-6

の長さがそれぞれ $AB=10$, $BC=6$, $AC=8$ の $\triangle ABC$ がある。辺 AB 上に点 P , 辺 AC 上に点 Q を, $\triangle APQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ になるようにとる。

(1) 2 辺の長さの和 $AP+AQ$ を u とおく。 $\triangle APQ$ の周りの長さ l を u を用いて表せ。

(2) l が最小となるときの AP , AQ , l の値を求めよ。 ◎名古屋大◎

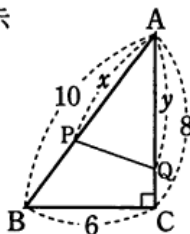
$$(1) \quad l = u + \sqrt{u^2 - 144}$$

$$(2) \quad AP=AQ=2\sqrt{10} \text{ のとき}$$

$$\text{最小値 } 4(\sqrt{10} + 1)$$

解答

(1) $\triangle ABC$ を図示すると右図のようになり,
 $\angle C=90^\circ$, $\sin A = \frac{3}{5}$,
 $\cos A = \frac{4}{5}$



ここで $AP=x$, $AQ=y$ とおくと,

$\triangle APQ$ の面積は $\frac{1}{2}xy\sin A$

これが $\triangle ABC$ の $\frac{1}{2}$ と等しいから,

$$\frac{1}{2}xy \times \frac{3}{5} = \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8\right) \times \frac{1}{2} \text{ より } xy=40$$

また, $\triangle APQ$ において余弦定理より,

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A$$

$$= x^2 + y^2 - 2 \times 40 \times \frac{4}{5}$$

$$= x^2 + y^2 - 64 = (x+y)^2 - 2xy - 64$$

$$= (x+y)^2 - 2 \times 40 - 64 = u^2 - 144$$

これより, $PQ = \sqrt{u^2 - 144}$ から,

$$l = x + y + \sqrt{u^2 - 144}$$

$$= u + \sqrt{u^2 - 144} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(2) (1)より u が増加すれば l も増加し, u が最小のとき l も最小となる。

相加平均と相乗平均の関係より,

$$u = x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{40} = 4\sqrt{10}$$

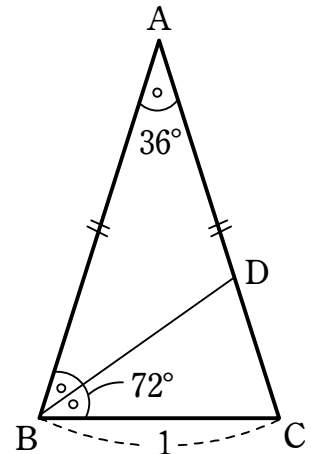
等号成立は $x=y=2\sqrt{10}$ のとき。

$u=4\sqrt{10}$ を①に代入して最小値 $4\sqrt{10} + 4$

①4-C-7

右の図の $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1) 辺 AB の長さ
- (2) $\sin 18^\circ$ の値
- (3) $\cos 36^\circ$ の値

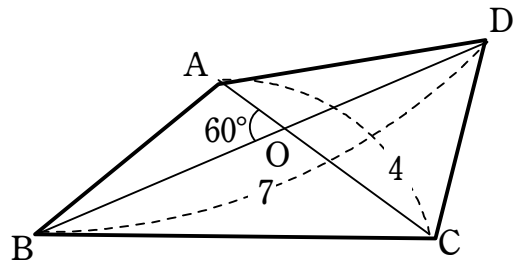


- (1) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

解答

①4-C-8

四角形 $ABCD$ の2つの対角線 AC , BD の交点を O とする。 $AC=4$, $BD=7$, $\angle AOB=60^\circ$ であるとき、四角形 $ABCD$ の面積 S を求めよ。



解答 $7\sqrt{3}$

①4-C-9

正方形 $ABCD$ を底面にもち、すべての辺の長さが2である四角錐 $EABCD$ がある。辺 EA 上に点 P , 辺 EB 上に点 Q を $EP=EQ$ が満たされるようにとる。 P および Q から底面 $ABCD$ に下ろした垂線の足をそれぞれ P' および Q' とし、正方形 $ABCD$ の2本の対角線の交点を O とする。

- (1) $\angle PAO$ の大きさを求めよ。
- (2) 四角形 $PP'Q'Q$ の面積は、 $EP=\boxed{\text{ア}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる。
- (3) (2)の場合、 $\cos \angle POQ$ を求めよ。

◎上智大◎

解答 (1) 45° (2) $1, \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$

(1) $AC=2\sqrt{2}$ より, $AO=\sqrt{2}$

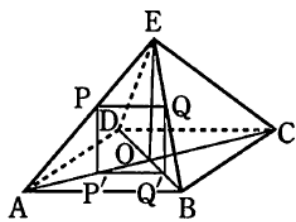
$AE=2$ から,

$EO=\sqrt{2}$

よって, $\triangle EAO$

は直角二等辺三角

形で $\angle PAO=45^\circ$



(2) $\triangle EPQ$ は正三角形より $EP=t$ とおくと

$PQ=t$, $PP'=AP \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-t}{\sqrt{2}}$

四角形 $PP'Q'Q$ の面積を S として,

$S = \frac{1}{\sqrt{2}} t(2-t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{-(t-1)^2 + 1\}$ から,

$EP=1$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

(3) $\triangle EAO$ は直角二等辺三角形で, $EP=1$

よって, $OP=OQ=PQ=1$

であるから, $\angle POQ=60^\circ$

よって, $\cos \angle POQ = \frac{1}{2}$

①4-C-10

三角錐 ABCD が $\triangle BCD$ を底面にして、机の上に置かれている。辺の長さをそれぞれ

$$AB=1, AC=\sqrt{2}, AD=\sqrt{5}, BC=\sqrt{3},$$

$$BD=\sqrt{6}, CD=3$$

とする。

- (1) 三角錐 ABCD の体積を求めよ。
 (2) 三角錐 ABCD を、辺 CD を軸として、頂点 A が机につくまで回転させるとき、三角錐が通過する部分の体積を求めよ。 ●一橋大●

解答

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}$

【解き方】 (1) $AB^2 + AC^2$

$$= 1^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$= 3 = BC^2$$

よって、

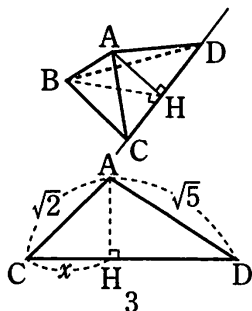
$$\angle BAC = 90^\circ$$

同様にして、

$$\angle BAD = 90^\circ$$

よって、 $AB \perp$ 面 ACD

ここで、AB を含み、直線 CD に垂直な平面



を考え、これと CD の交点を H とおくと、

$$AH \perp CD, BH \perp CD$$

$\triangle ACD$ において、 $CH = x$ とおくと、

$$AH^2 = (\sqrt{2})^2 - x^2$$

$$\text{また、} AH^2 = (\sqrt{5})^2 - (3-x)^2$$

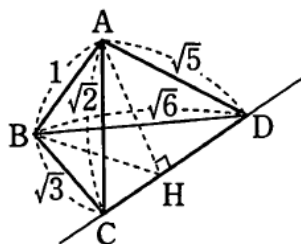
$$\text{よって、} 2 - x^2 = 5 - (3-x)^2 \quad x = 1$$

$$\text{すなわち、} AH = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 1$$

ゆえに、三角錐 ABCD の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \times \triangle ACD \times AB &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 1 \right) \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

別解 点Aから直線CDに下ろした垂線の足をHとし、 $CH=x$ とすると、



$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 2 - x^2$$

$$AH^2 = AD^2 - DH^2 = 5 - (3-x)^2$$

$$= -4 + 6x - x^2$$

$$2 - x^2 = -4 + 6x - x^2 \quad x=1$$

また、点Bから直線CDに下ろした垂線の足をH'とし、 $CH'=x'$ とすると、

$$BH'^2 = BC^2 - CH'^2 = 3 - x'^2$$

$$BH'^2 = BD^2 - DH'^2 = 6 - (3-x')^2$$

$$= -3 + 6x' - x'^2 \quad x'=1$$

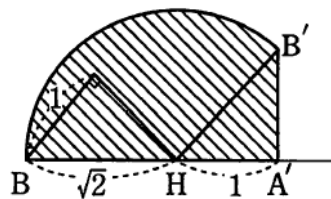
よって、HとH'は一致する。これより直線CDは3点ABHを通る平面に垂直である。よって、底面が $\triangle ABH$ 、高さがCDの立体の体積を求めればよい。

$AH=1$, $BH=\sqrt{2}$ より $\triangle ABH$ は

$\angle BAH=90^\circ$ の三角形で、底面積 $\frac{1}{2}$, 高

さ3より, $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$

(2) $\triangle ABH$ をHを中心として回転したときの通過面積は右図のよ



うになる。したがって、求める体積は図の斜線部分を底面とし、高さがCDの立体の体積である。底面積は、

$$S = (\sqrt{2})^2 \pi \times \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2}$$

高さが3より、

$$V = \frac{1}{3} S h = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2} \right) \times 3 = \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2}$$

第5章 数え上げの基礎

《学習項目》

・数え上げ, 算数っぽい問題

A 問題

①5-A-1

200 から 300 までの整数のうちで, 3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる整数の個数を求めよ。

【解答】 48

200 から 300 までの整数のうち, 3 で割り切れる整数全体の集合を A , 5 で割り切れる整数全体の集合を B とすると, 3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる整数全体の集合は $A \cup B$ である。

$$A = \{3 \cdot 67, 3 \cdot 68, \dots, 3 \cdot 100\} \text{ から } n(A) = 100 - 67 + 1 = 34$$

$$B = \{5 \cdot 40, 5 \cdot 41, \dots, 5 \cdot 60\} \text{ から } n(B) = 60 - 40 + 1 = 21$$

$A \cap B$ は, 15 で割り切れる整数全体の集合であるから

$$A \cap B = \{15 \cdot 14, 15 \cdot 15, \dots, 15 \cdot 20\} \text{ よって } n(A \cap B) = 20 - 14 + 1 = 7$$

$$\text{以上より, } n(A \cup B) = 34 + 21 - 7 = 48$$

①5-A-2

7 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 から, 異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作るとき, 次のような数は何個できるか。

(1) 3 桁の整数

(2) 偶数

【解答】 (1) 180 個 (2) 105 個

(1) 百の位は, 1 ~ 6 から 1 個を取るから 6 通り

それぞれについて, 十, 一の位は 0 を含めた残りの 6 個から 2 個取る順列で ${}_6P_2$ 通り

よって, 求める個数は $6 \times {}_6P_2 = 6 \times 6 \cdot 5 = 180$ (個)

(2) 偶数であるから, 一の位は 0, 2, 4, 6 のどれか。

[1] 一の位が 0 のとき 百, 十の位は 0 以外の 6 個から 2 個取る順列で ${}_6P_2$ 通り

[2] 一の位が 2, 4, 6 のとき 百の位は 0 を除く残り 5 個から 1 個を取るから 5 通り

よって $(5 \times 5) \times 3$ 個

求める個数は ${}_6P_2 + 5 \times 5 \times 3 = 30 + 75 = 105$ (個)

①5-A-3

A, B, C, D, E, F の6文字を全部使ってできる文字列を, アルファベット順の辞書式に並べる。

(1) CDABEF は何番目にあるか

(2) 339 番目の文字列は何か。

解答 (1) 289 番目 (2) CFADBE

(1) 百の位は, 1 ~ 6 から1個を取るから 6通り

それぞれについて, 十, 一の位は0を含めた残りの6個から2個取る順列で ${}_6P_2$ 通り

よって, 求める個数は $6 \times {}_6P_2 = 6 \times 6 \cdot 5 = 180$ (個)

(2) 偶数であるから, 一の位は0, 2, 4, 6のどれか。

[1] 一の位が0のとき 百, 十の位は0以外の6個から2個取る順列で ${}_6P_2$ 通り

[2] 一の位が2, 4, 6のとき 百の位は0を除く残り5個から1個を取るから 5通り

よって $(5 \times 5) \times 3$ 個

求める個数は ${}_6P_2 + 5 \times 5 \times 3 = 30 + 75 = 105$ (個)

B 問題

①5-B-1

ある大学の入学者のうち、他の a 大学, b 大学, c 大学を受験したものの集合を、それぞれ A, B, C で表すと、次の通りであった。

$$n(A) = 65, n(B) = 40, n(A \cap B) = 14, n(A \cap C) = 11$$

$$n(A \cup C) = 78, n(B \cup C) = 55, n(A \cup B \cup C) = 99$$

- (1) c 大学を受験したものは何人か。
- (2) a 大学, b 大学, c 大学のすべてを受験した者は何人か。
- (3) a 大学, b 大学, c 大学のどれか 1 大学のみを受験した者は何人か。

【解答】 (1) 24 人 (2) 4 人 (3) 73 人

$$(1) \quad n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C) \text{ であるから } 78 = 65 + n(C) - 11$$

よって $n(C) = 24$ ゆえに、c 大学を受験した者は 24 人

$$(2) \quad \text{求める人数は } n(A \cap B \cap C) \text{ で表される。}$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \text{ であるから}$$

$$55 = 40 + 24 - n(B \cap C) \quad \text{よって} \quad n(B \cap C) = 9$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\text{であるから} \quad 99 = 65 + 40 + 24 - 14 - 9 - 11 + n(A \cap B \cap C) \quad \therefore n(A \cap B \cap C) = 4$$

(3) 各集合の人数を右のように定めると、求める人数は

$a + b + c$ である。条件と (1), (2) から

$$n(A) = a + d + g + f = 65 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$n(B) = b + d + e + g = 40 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$n(C) = c + e + g + f = 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$n(A \cap B) = d + g = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

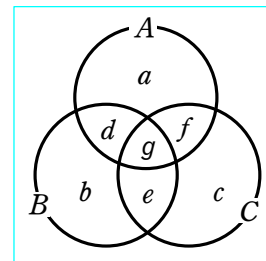
$$n(A \cap C) = f + g = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$n(B \cap C) = e + g = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$n(A \cap B \cap C) = g = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{4} \sim \textcircled{7} \text{ から } d = 10, \quad f = 7, \quad e = 5$$

$$\textcircled{1} \text{ とあわせて } a = 44, \quad b = 21, \quad c = 8 \quad \text{よって, } a + b + c = 44 + 21 + 8 = 73 \text{ (人)}$$



①5-B-2

5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 から異なる 3 個を選んで 3 桁の整数を作る。

- (1) 全部で何個の 3 桁の整数ができるか。
- (2) 9 の倍数は何個できるか。また、4 の倍数は何個できるか。

【解答】 (1) 48 個 (2) 6 個, 15 個

(1) 百の位は、1~4 から1個を取るから 4通り

それぞれについて、十、一の位は0を含めた残りの4個から2個取る順列で ${}_4P_2$ 通り

よって、求める個数は $4 \times {}_4P_2 = 4 \times 4 \cdot 3 = {}^{\text{ア}}48$ (個)

(3) 9の倍数となるのは、各位の数字の和が9の倍数のときである。0~4から異なる3つの数字を選ぶとき、その和が9の倍数になるのは、2, 3, 4の場合に限る。この3つの数を並べて3桁の整数を作ればよい。よって、9の倍数は ${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = {}^{\text{イ}}6$ (個)

4の倍数となるのは、下2桁が4の倍数つまり 04, 12, 20, 24, 32, 40 のとき。

[1] 下2桁が04, 20, 40のとき 百の位は残り3個から1個取るから3通り

よって $3 \times 3 = 9$ (個)

[2] 下2桁が12, 24, 32のとき 百の位は0を除く残り2個から1個取るから2通り

よって $3 \times 2 = 6$ (個)

ゆえに、4の倍数は $9 + 6 = {}^{\text{エ}}15$ (個)

C 問題

①5-C-1

$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 150$ の末尾に続く 0 の個数を求めよ。

解答 37 個

0 の個数は、 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 150$ に含まれる因数 10 の個数であり、10 は 2×5 と素因数分解される。

1, 2, 3, $\cdots$, 150 に含まれる因数 2 の個数が因数 5 の個数より多いのは明らかであるから、因数 5 の個数を求めればよい。

1, 2, 3, $\cdots$, 150 に含まれる

5 の倍数は $150 = 5 \cdot 30$ から 30 個

$5^2 (= 25)$ の倍数は $150 = 25 \cdot 6$ から 6 個

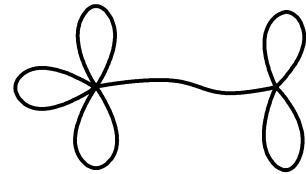
$5^3 (= 125)$ の倍数は $150 = 125 \cdot 1 + 25$ から 1 個

ゆえに、1, 2, 3, $\cdots$, 150 に含まれる因数 5 の個数は全部で

$$30 + 6 + 1 = 37 \text{ (個)}$$

①5-C-2

右の図において、これを一筆書きする仕方の総数を求めよ。



解答 768 通り

書き始める位置は、右の図の A, B の 2 通りある。

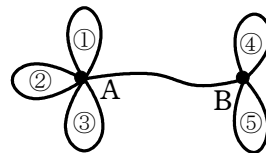
①, ②, ③ の部分はどの順序で書くかで ${}_3P_3$ 通り

それぞれの輪を右回りで書くか、左回りで書くかで 2^3 通り

④, ⑤ の部分はどの順序で書くかで ${}_2P_2$ 通り

それぞれの輪を右回りで書くか、左回りで書くかで 2^2 通り

よって、一筆書きする方法は $2 \times ({}_3P_3 \times 2^3) \times ({}_2P_2 \times 2^2) = 2 \times (6 \times 8) \times (2 \times 4) = 768$ (通り)



①5-C-3

50 人のクラスで、兄弟のいる人は 33 人、姉妹のいる人は 27 人であった。

(1) 一人っ子の人数の範囲を求めよ。(何人以上何人以下などと答える)

(2) 兄弟だけいる人の人数の範囲を求めよ。

(3) 姉妹だけいる人の人数の範囲を求めよ。

解答 (1) 17 人以下 (2) 6 人以上 23 人以下 (3) 17 人以下

クラス全員，兄弟のいる人，姉妹のいる人の集合をそれぞれ U ， A ， B とする。

$n(A) > n(B)$ であるから， $A \supset B$ のとき

ひとりっ子の人数 $n(\overline{A \cap B})$ は最大で

$$n(U) - n(A) = 50 - 33 = {}^{\pi}17$$

兄弟だけの人数 $n(A \cap \overline{B})$ は最小で

$$n(A) - n(B) = 33 - 27 = {}^{\cup}6$$

$\overline{A \cap B} = \phi$ のとき， $n(A \cap B)$ は最小で

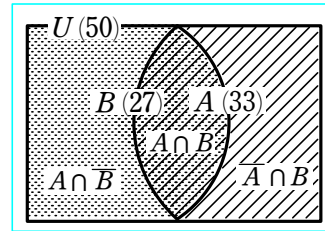
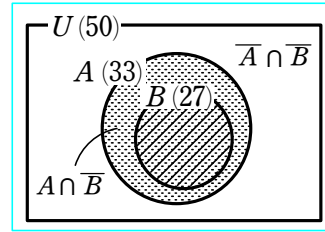
$$n(A) + n(B) - n(U) = 33 + 27 - 50 = {}^{\iota}10$$

兄弟だけの人数 $n(A \cap \overline{B})$ は最大で

$$n(A) - n(A \cap B) = 33 - 10 = {}^{\pm}23$$

姉妹だけの人数 $n(\overline{A} \cap B)$ は最大で

$$n(B) - n(A \cap B) = 27 - 10 = {}^{\ast}17$$



① **5-C-4**

500 以下の自然数を全体集合とし， A を 8 の倍数の集合， B を 12 の倍数の集合， C を 15 の倍数の集合とする。次の集合の個数を求めよ。

- (1) 8 または 15 の倍数の集合
- (2) 8 でも 15 でも割り切れない数の集合
- (3) 8 または 12 または 15 の倍数の集合
- (4) $(A \cup C) \cap B$

解答 (1) 91 個 (2) 409 個 (3) 108 個 (4) 24 個

あ

① **5-C-5**

1. 2, 3, 5, 6, 8, 9 の 7 個の数字がある。

- (1) この中の 2 個を並べてできる 2 桁の整数は全部で何個あるか。
- (2) この中の 2 個を並べてできる 2 桁の整数の総和を求めよ。

解答 (ア) 42 (イ) 2244

(ア) 異なる 7 個の数字から 2 個を取って並べる順列の総数で

$${}_7P_2 = 7 \cdot 6 = {}^{\pi}42 \text{ (個)}$$

(イ) 一の位が 1 のとき，できる整数は 21, 31, 51, 61, 81, 91 の 6 通り。

他の数字が一の位の場合も，同様に 6 通りの整数ができる。

よって，一の位の数の総和は

$$(1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9) \times 6 = 204$$

十の位の数の総和も同じになるから，求める 2 桁の整数の総和は

$$204 + 204 \times 10 = {}^{\iota}2244$$

① **5-C-6**

5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 を使ってできる 3 桁の整数のうち, 次のような整数は何個あるか。ただし, 同じ数字は 2 度以上使わないとする。

- (1) 偶数
(2) 3 の倍数

【解答】 (1) 30 個 (2) 20 個

(2) 3 の倍数になるのは, 各位の数字の和が 3 の倍数になるときである。

よって, 3 の倍数になる 3 個の数字の組は (0, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4)

[1] (0, 1, 2), (0, 2, 4) のとき 百の位は 0 でないから $(2 \times 2!) \times 2 = 8$ (個)

[2] (1, 2, 3), (2, 3, 4) のとき $3! \times 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 = 12$ (個)

[1], [2] から, 求める個数は $8 + 12 = 20$ (個)

① **5-C-7**

次の場合, 硬貨の一部または全部を使って, 支払うことができる金額は何通りあるか。

- (1) 10 円硬貨 4 枚, 50 円硬貨 1 枚, 100 円硬貨 3 枚
(2) 10 円硬貨 2 枚, 50 円硬貨 3 枚, 100 円硬貨 3 枚
(3) 10 円硬貨 7 枚, 50 円硬貨 1 枚, 100 円硬貨 3 枚

【解答】 (1) 39 通り (2) 29 通り (3) 42 通り

(1) 異なる硬貨を用いて, 同じ金額を表すことはない。

10 円硬貨の使い方は 0 枚～4 枚の 5 通り

50 円硬貨の使い方は 0 枚～1 枚の 2 通り

100 円硬貨の使い方は 0 枚～3 枚の 4 通り

ただし, 全部 0 枚の場合は支払うことができない。

よって, 支払える金額は $5 \times 2 \times 4 - 1 = 39$ (通り)

(2) 50 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚は同じ金額を表すから, 100 円硬貨 3 枚は 50 円硬貨 6 枚と考えると, 10 円硬貨 2 枚, 50 円硬貨 9 枚となる。

10 円硬貨の使い方は 0 枚～2 枚の 3 通り

50 円硬貨の使い方は 0 枚～9 枚の 10 通り

ただし, 全部 0 枚の場合は支払うことができない。

よって, 支払える金額は $3 \times 10 - 1 = 29$ (通り)

(3) 10 円硬貨 5 枚と 50 円硬貨 1 枚は同じ金額を表すから, 50 円硬貨 1 枚は 10 円硬貨 5 枚と考えると, 10 円硬貨 12 枚, 100 円硬貨 3 枚となる。

10 円硬貨 10 枚と 100 円硬貨 1 枚は同じ金額を表すから, 100 円硬貨 3 枚は 10 円硬貨 30 枚と考えると, 10 円硬貨 42 枚となる。

よって, 支払える金額は 42 通り

【注意】 (3) と同様に考えて, (2) において, さらに 50 円硬貨を 10 円硬貨に換算してはいけ
ない。もとの硬貨で表せない金額 (30 円や 40 円) まで表せるようになるからである。

第6章 場合の数

《学習項目》

- ・ その道具
 - ① 並べる道具 $n!$
 - ② 選ぶ道具 $n k C$
 - ・ 道具の運用
 - ・ 流れ作業はかけざん
 - ・ 場合分けはたしざん
 - ・ 場合分けがメンドウなとき, (～でないとき) を考えて全体からひきざん
 - ・ 区別のできない同じものを数えるときは, その個数の階乗でわりざん。
- ※ 場合わけでは, モレ・ダブリが発生しないように注意することが大切。

運用の例 ～ 公式化しているもの

- ・ 円順列 $\Rightarrow$ 固定がポイント
- ・ ネックレス順列 $\Rightarrow$ 円順列 $\div 2$
- ・ 重複順列 $\Rightarrow$ 流れ作業 = かけざん がわかっていれば公式不要
- ・ 重複組み合わせ
- ・ 異なる種類のものから, 重複を許して 個選ぶ選び方は, 通り
- ・ 組分け問題
- ・ 順番キーブ問題
- ・ 最短経路問題

A 問題

① 6-A-1

(1) 4種類の記号○, △, □, ×から重複を許して合計5個を取って1列に並べるとき, 並べ方は何通りあるか。

(2) 4人が1回じゃんけんをするとき, 手の出し方は全部で何通りあるか。

解答 (1) 1024通り (2) 81通り

① 6-A-2

次の総数を求めよ。

(1) 7個の文字 a, a, a, b, b, c, c の全部を1列に並べるときの並べ方

(2) 8個の数字 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3 の全部を使ってできる8けたの数

(3) AKASAKA の7文字をすべて使ってできる文字列

解答 (1) 210通り (2) 280通り (3) 105通り

① 6-A-3

男子5人, 女子3人が1列に並ぶとき, 次のような並び方は何通りあるか。

(1) 女子3人が続いて並ぶ。 (2) 両端が男子である。

解答 (1) 4320通り (2) 14400通り

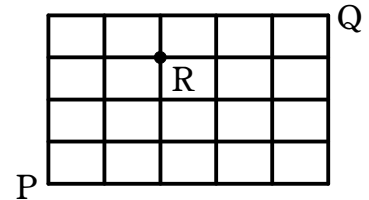
①6-A-4

- (1) 7人が円卓に着席する方法は何通りあるか。
- (2) 異なる6個の玉を用いて作る首飾りは何通りできるか。

解答 (1) 720通り (2) 60通り

①6-A-5

右の図のような道がある。遠回りをしない道順で、次のような道順は何通りあるか。



- (1) PからQへ行く。
- (2) PからRを通ってQへ行く。
- (3) PからRを通らないでQへ行く。

解答 (1) 126通り (2) 40通り (3) 86通り

①6-A-6

男子10人、女子5人の中から選ぶとき、次の選び方は何通りあるか。

- (1) 男子4人、女子3人を選ぶ。
- (2) 特定の2人を含むように7人選ぶ。
- (3) 3人を選ぶのに、女子から少なくとも1人を選ぶ。

解答 (1) 2100通り (2) 1287通り (3) 335通り

①6-A-7

柿、りんご、みかん、キウイの4種類の果物の中から10個の果物を買う。次のような買い方は何通りあるか。

- (1) 買わない果物があってもよい。
- (2) どの果物も1個は買う。

解答 (1) 286通り (2) 84通り

①6-A-8

medicineの文字をすべて使って横1列に並べるとき、次のような並べ方は何通りあるか。

- (1) mがdより左側にある。
- (2) m, d, c, nがこの順に並ぶ。

解答 (1) 5040通り (2) 420通り

B 問題

①6-B-1

男子 3 人, 女子 4 人が一列に並ぶとき, 次のような並び方は何通りあるか。

(1) 男子 3 人が隣り合う

(2) 男子どうしが隣り合わない。

解答 ① 720 通り ② 1440 通り

(1) ① 男子 3 人を 1 人とみなして $5! = 120$ (通り)。男子 3 人の並び方は $3! = 6$ (通り)。よって, 全部で $120 \times 6 = 720$ (通り)。

② まず, 女子 4 人の並び方は $4!$ 通り。次に, 女子の間と両端の 5 か所のうち, 3 か所に男子がくればよいから, ${}_5P_3 = 60$ (通り)。よって, $4! \times 60 = 1440$ (通り)。

①6-B-2

STUDENTS の 8 文字を一列に並べるとき, 次のような並べ方は何通りあるか。

(1) すべての並べ方。

(2) 同じ文字が隣り合わない並べ方。

解答 (1) 10080 通り

(2) 5760 通り

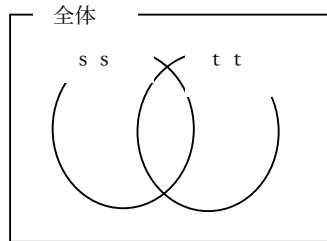
《解説》

$$\text{全体} : \frac{8!}{2!2!} = 10080$$

$$\text{ss が隣り合う} : \frac{7!}{2!} = 2520$$

$$\text{tt が隣り合う} : \frac{7!}{2!} = 2520$$

$$\text{ss, tt が隣り合う} : 6! = 720$$



$$\begin{aligned} \therefore \text{ss も tt も隣り合わない} \\ &= (\text{全体}) - \{(\text{ss が隣り合う}) + (\text{tt が隣り合う}) - (\text{ss, tt が隣り合う})\} \\ &= 10080 - \{2520 + 2520 - 720\} = 5760 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

①6-B-3

9 人の生徒を次のようにグループ分けする。分け方はそれぞれ何通りあるか。

(1) 2 人, 3 人, 4 人の 3 つの組

(2) 3 人ずつ A, B, C の 3 つの組

(3) 3 人ずつ 3 つの組

解答 ① 1260 通り ② 1680 通り ③ 280 通り

$$\begin{aligned} \text{① } &{}_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 \\ &= \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } &{}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \\ &= \frac{9!}{3! \times 3! \times 3!} = 1680 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

$$\text{③ } 1680 \div 3! = 280 \text{ (通り)}$$

①6-B-4

2人の先生と6人の生徒が円卓に座るとき、

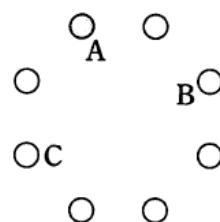
- (1) 先生どうしが向かい合う座り方は何通りあるか。
- (2) 先生どうしが向かい合い、特定の生徒2人も向かい合う座り方は何通りあるか。
- (3) 先生の間に生徒が1人座る座り方は何通りあるか。
- (4) この8人の性別が男子4人、女子4人のとき、男女が交互に座る座り方は何通りあるか。

解答 (1) 720 通り (2) 144 通り (3) 1440 通り (4) 144 通り

(1) 1人の先生を決めると、もう1人の先生の場所はただ1通りに決まる。空いている6つの席に6人が座るから、座り方は、 $6! = 720$ (通り)

- (2) 先生どうしが向かい合う場所を決めると、特定の2人の生徒が向かい合える場所は3通り、さらに2人が入れかわってもよいから2倍して6通り。残った4人は自由に座れるから、 $4! = 24$ (通り)
よって、 $1 \times 6 \times 24 = 144$ (通り)

(3) 最初に先生を1人座らせる。この場所を右



図のAとする。すると条件より、もう1人の先生の座る場所はB

かCの2通り。
生徒6人は自由に座ってよいから、 $6! = 720$ (通り)。

以上より、全部で、 $2 \times 720 = 1440$ (通り)。

- (4) 男子4人の座り方は円順列で考えて $(4-1)! = 6$ (通り)。その間に座る4人の女子の座り方は $4! = 24$ (通り)。
よって、 $6 \times 24 = 144$ (通り)。

①6-B-5

青玉4個、白玉3個、黒玉1個がある。

- (1) これらを円形に並べる方法は何通りあるか。
- (2) これらの玉にひもを通して輪を作る方法は何通りあるか。

解答 (1) 35 通り (2) 19 通り

- (1) 黒玉1個を固定すると、残り青玉4個と白玉3個の順列に等しい。

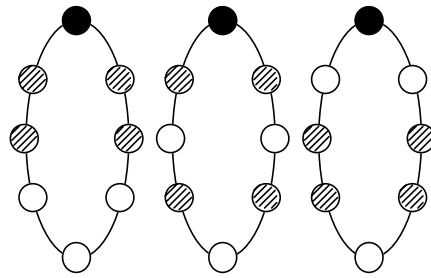
よって $\frac{7!}{4!3!} = 35$ (通り)

- (3) (1)のうち、左右対称であるものは右の図から 3通り

輪の場合、左右対称である円順列は裏返すと自分自身になるから1個と数える。

一方、左右対称でない円順列は裏返すと同じになるペアがあるから $\div 2$ となる。

したがって $3 + \frac{35-3}{2} = 19$ (通り)



① 6-B-6

6色のペンキと立方体がある。この立方体の各面を次のようにペンキで塗り分けるのに何通りの方法があるか。ただし、隣り合う面は異なる色で塗るとし、また、回転して同じ色の配置になるものは1通りとして数えることにする。

- (1) 6色で塗り分ける。 (2) 3色で塗り分ける。 (3) 4色で塗り分ける。

●埼玉医科大●

(1) 30通り (2) 20通り (3) 90通り

6色を赤、黒、黄、緑、青、紫として考える。

- (1) 上面を赤に固定すると、下面は5通り。

側面の塗り方は残り4色の円順列だから $(4-1)!$ 通り。これから、

$5 \times (4-1)! = 30$ (通り)

- (2) 3色の選び方は ${}_6C_3$ 通り。

赤、黒、黄を選んだとすると、塗り方は1

通りだから、 ${}_6C_3 \times 1 = 20$ (通り)

- (3) 4色の選び方は ${}_6C_4$ (通り)。

赤、黒、黄、緑を選んだとすると、これらのうち、2色は2回使うことになる。この2つの選び方は ${}_4C_2$ 通り。

これによりたとえば6面を赤、赤、黒、黒、黄、緑で塗るとき、その塗り方は1通りである。これから、 ${}_6C_4 \times {}_4C_2 \times 1 = 90$ (通り)

① 6-B-7

正十二角形の3頂点を結んでできる三角形について、正十二角形と辺を共有しないものは全部で何個できるか。

●芝浦工業大●

解答 (1) 112個

3 頂点を結んでできる三角形の総数は ${}_{12}C_3$ 個。このうち正十二角形と1辺のみ共有する三角形は、1 辺を決めると他の頂点は 12 個の頂点のうち辺の両端および両隣の 2 頂点以外の個数を選ぶので $12-4=8$ (個)。

よって、 $8 \times 12 = 96$ (個)。

また、2 辺を共有する三角形は隣り合う 2 辺でできる三角形であるから、12 個。

したがって、求める三角形の個数は

$${}_{12}C_3 - (96 + 12) = 112 \text{ (個)}$$

① 6-B-8

(1) $x+y+z=10$ を満たす 0 以上の整数解は何組あるか。

●山梨学院大●

(2) $x+y+z=10$ を満たす正の整数解は何組あるか。

●名城大●

(3) $5 \leq x+y+z \leq 8$ を満たす正の整数解は何組あるか。

●関西大・改●

解答 (1) 66 組 (2) 36 組 (3) 52 組

(1) 10 個のりんごを 3 つのかご (x, y, z) に分けるのと同じことである。3 種類の x, y, z から 10 個をとる重複組合せだから、 ${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$ (組)。

(2) 10 個のりんごを異なる 3 つのかご (x, y, z) に入れる。ただし、どのかごにも少なくとも 1 個は入るようにする入れ方と同じである。よって、まず、1 個ずつ 3 つのかごに入れ、次に、残った 7 個のりんごを(1)と同様にして入れるので、 ${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$ (組)

(3) $x+y+z=8$ のときは、8 個のりんごを 3 人で分ける (全員が少なくとも 1 個はもらう) ときの分け方を考えればよい。最初に各自に 1 個ずつ分け与え、残りの 5 個を(1)と同じ条件で分けると考えて、 ${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$ (通り)。同様に $x+y+z=7$ のときは、 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ (通り)。 $x+y+z=6$ のときは、 ${}_5C_2 = 10$ (通り)。 $x+y+z=5$ のときは、 ${}_4C_2 = 6$ (通り)以上を加えて、52 通り。

①6-B-9

6人の人を3つの部屋に分けたい。どの部屋にも少なくとも1人は入るものとして、分ける方法は何通りあるか。次の(1)~(3)のそれぞれの場合について答えよ。

- (1) 人も部屋も区別しないで、人数の分け方だけ考えた場合
 (2) 人は区別しないが、部屋は区別して考えた場合
 (3) 人も部屋も区別して考えた場合

●立教大●

解答 (1) 3通り (2) 10通り (3) 540通り

【解き方】 (1) 人数の分け方は、

(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2) の3通り。

(2) (1, 1, 4) のとき3通り。

(1, 2, 3) のとき6通り。

(2, 2, 2) のとき1通り。

以上を加えて10通り。

(3) (i) (1, 1, 4) のとき、

$$3 \times {}_6C_1 \times {}_5C_1 = 90 \text{ (通り)}$$

(ii) (1, 2, 3) のとき、

$$3! \times {}_6C_1 \times {}_5C_2 = 360 \text{ (通り)}$$

(iii) (2, 2, 2) のとき、 ${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 90$ (通り)

以上を加えて540通り。

①6-B-10

1から10までの自然数の各数字を1つずつ記入した10枚のカードがある。これらをA, B, Cの3つの箱に分けて入れる。

- (1) 空の箱があってもよいものとする、分け方は何通りあるか。
 (2) 空の箱があってはならないとする、分け方は何通りあるか。

解答 (1) 59049通り (2) 55980通り

(1) 1枚のカードを3つの箱A, B, Cに入れる方法は3通りある。

よって、10枚のカードを3つの箱A, B, Cに入れる方法は $3^{10} = 59049$ (通り)

(2) Aを空にして、10枚のカードを2つの箱B, Cに入れる方法は 2^{10} 通り

この場合において、B, Cのうち一方の箱が空になる場合を除いて $2^{10} - 2$ (通り)

同様に、Bだけを空にする場合は $2^{10} - 2$ (通り)

Cだけを空にする場合は $2^{10} - 2$ (通り)

ゆえに、求める場合の数は $3(2^{10} - 2) = 3066$ (通り)

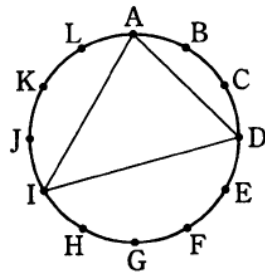
2つの箱が空になる場合は 3通り

よって、空の箱がない場合は $59049 - 3066 - 3 = 55980$ (通り)

C 問題

①6-C-1

右図のように円周を12等分する点A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, Lが与えられている。これらの中から相異なる3点を選んで線で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, Iを選べば, 図のような三角形が得られる。



- (1) 正三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。
- (2) 二等辺三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。
- (3) 直角三角形を与えるような3点の選び方の総数を求めよ。 ●九州大●

解答 (1) 4通り (2) 52通り (3) 60通り

①6-C-2

平面上に11個の相異なる点がある。このとき2点ずつを結んでできる直線が全部で48本であるとする。

- (1) 与えられた11個の点のうち3個以上の点を含む直線は何本であるか。また, そのそれぞれの直線上に何個の点が並ぶか。
- (2) 与えられた11個の点から3点を選び三角形を作ると, 全部で何個できるか。 ●熊本大●

解答 (1) 2本, 1本は3点が並び, もう1本は4点が並ぶ (2) 160個

(1) 3点以上を通る直線が1本もないとすると, 与えられた11点から2点を選んでもできる直線の本数は ${}_{11}C_2=55$ (本)。ところが条件から48本しかないため, $55-48=7$ より7本少ない。

同一直線上に3点以上あるとき,

- (i) 3点を通る直線が1本あると, ${}_3C_2-1=2$ (本)の直線が減る。

(ii) 4点を通る直線が1本あると, ${}_4C_2-1=5$ (本)の直線が減る。

したがって, 7本減るためには, 3点以上通る直線は2本あり, そのうち1本は3点, 他の1本は4点が並ぶ。

- (2) 三角形の個数は ${}_{11}C_3$ から一直線上にある3点の組の総数を引いて, ${}_{11}C_3-{}_3C_3\times 1-{}_4C_3\times 1=165-1-4=160$ (個)

①6-C-3

次の条件を満たす4桁の正の整数 $d_4d_3d_2d_1$ の個数をそれぞれの場合について求めよ。

- (1) $9 \geq d_4 > d_3 > d_2 > d_1 \geq 0$ (2) $9 \geq d_4 \geq d_3 \geq d_2 \geq d_1 \geq 0$ ●津田塾大●

解答 (1) 210 個 (2) 714 個

(1) 10 個の整数 0, 1, 2, …, 9
から 4 個をとる組合せを考えて,
 ${}_{10}C_4 = 210$ (個)

(2) 10 個の整数 0, 1, 2, …, 9 から重複
を許して 4 個を取る組合せは
 ${}_{10}H_4 = {}_{13}C_4 = 715$ (個)
これから、4 個とも 0 である場合を除いて、
 $715 - 1 = 714$ (個)

①6-C-4

次の問いに答えよ。ただし、同じ色の玉は区別できないものとし、空の箱があってもよいものとする。

- (1) 赤玉 10 個を区別できる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか。
(2) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を、区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるか。 ●千葉大●

解答 (1) 286 通り (2) 2940 個

(1) 10 個のりんごを 4 人で分ける
分け方と同様に考えて、
 ${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3$ (通り)。

(2) 赤玉 6 個の分け方は(1)と同様に考えて
 ${}_4H_6 = {}_9C_3$ (通り)。白玉 4 個の分け方は
 ${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3$ (通り)。
これより、全部で ${}_9C_3 \times {}_7C_3$ 通り。

① 6-C-5

7個横に並んでいる正方形のすべてを下図のように白または黒に塗る。

- (1) 異なる塗り方は何通りあるか。
- (2) 図2のように、黒が5個以上連続する部分がある塗り方は何通りあるか。
- (3) 図3のように、黒が4個連続する部分があって、5個以上連続しない塗り方は何通りあるか。
- (4) 黒が3個連続する部分があって、4個以上連続しない塗り方は何通りあるか。

◎上智大◎



解答

(1) 128通り

(2) 8通り

(3) 12通り

(4) 27通り

(1) それぞれの正方形に対して2通りの塗り方があるから $2^7=128$ (通り)。

(2) 黒をB, 白をW, どちらでもよいものを○とする。

BBBBB○○となるのは4通り。

WBBBBB○となるのは2通り。

○WBBBBBとなるのは2通り。

以上を加えて、8通り。

(3) BBBBW○○となるのは4通り。

WBBBBW○となるのは2通り。

○WBBBBWとなるのは2通り。

○○WBBBBとなるのは4通り。

以上を加えて、12通り。

(4) BBBW○○○となるのは8通り。

WBBBBW○○となるのは4通り。

○WBBBBW○となるのは4通り。

○○WBBBBWとなるのは4通り。

○○○WBBBとなるのは8通り。

このうち BBBWBBB は二次数えているため、 $8+4+4+4+8-1=27$ (通り)。

補充問題

①6-C-6

- (1) $x + y + z = 15$ の正の整数解は何通りあるか。
 (2) (1) のうちで $x = y$ となる解は何通りあるか。
 (3) (1) のうちで $x > y$ となる解は何通りあるか。

(1) $x - 1 = X, y - 1 = Y, z - 1 = Z$ とおく。

$x + y + z = 15$ に代入すると $(X + 1) + (Y + 1) + (Z + 1) = 15$

よって $X + Y + Z = 12 \quad X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$

この整数解の個数は、異なる3種のものから12個を取る重複組合せの数で

$${}_3H_{12} = {}_{3+12-1}C_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = 91 \text{ (通り)}$$

(2) $x = y$ とすると $2x + z = 15$

正の整数解は $(x, z) = (1, 13), (2, 11), (3, 9), (4, 7),$

$(5, 5), (6, 3), (7, 1)$ の 7通り

(3) (1) の整数解については、 $x > y, x = y, x < y$ の3通りの場合に分けられ、しかも、

x と y について対称であるから、 $x > y$ と $x < y$ の場合の数は等しい。

よって、求める解の数は、(1) の個数から (2) の場合を除いた半分で

$$(91 - 7) \div 2 = 42 \text{ (通り)}$$

①6-C-7

10 段の階段を登るとき、次の問いに答えよ。

- (1) すべての階段を1段上がり (途中の階段をジャンプしないで1段ずつ登ること) で登るとき、登り方は何通りあるか。
 (2) 1回だけ2段上がり (1段をジャンプする登り方) を行い、残りの階段を1段上がりするときの登り方は何通りあるか。
 (3) 少なくとも1回は2段上りをするとき、登り方は何通りあるか。
 (4) 最大3段上がり (2段をジャンプする登り方) まで許すとき、可能な登り方の総数は何通りあるか。

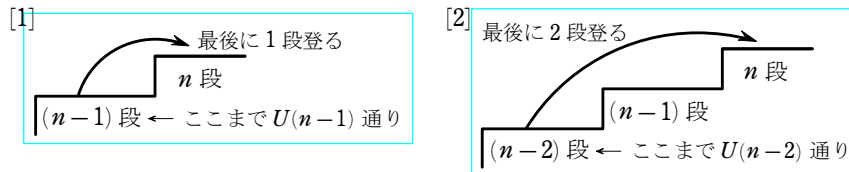
- (1) 1通り
- (2) 2段上がりが1回, 1段上がりが8回の場合である。
9回のうちのどの1回が2段上がりかで場合が分かれるから 9通り
- (3) 1段上がりと2段上がりで, n 段の階段を登る方法の総数を $U(n)$ とする。
 n 段の階段を登るとき, 次の2つの場合に分けられる。

[1] 最後に1段上りの場合

この場合の数は, $(n-1)$ 段目までの登り方の総数と等しく $U(n-1)$ 通り

[2] 最後に2段上りの場合

この場合の数は, $(n-2)$ 段目までの登り方の総数と等しく $U(n-2)$ 通り



したがって $U(n) = U(n-1) + U(n-2)$ [$n \geq 3$]

$U(1) = 1, U(2) = 2$ であるから

$$U(3) = U(2) + U(1) = 2 + 1 = 3$$

同様に $U(4) = U(3) + U(2) = 3 + 2 = 5, U(5) = U(4) + U(3) = 5 + 3 = 8$

$$U(6) = U(5) + U(4) = 8 + 5 = 13, U(7) = U(6) + U(5) = 13 + 8 = 21$$

$$U(8) = U(7) + U(6) = 21 + 13 = 34, U(9) = U(8) + U(7) = 34 + 21 = 55$$

$$U(10) = U(9) + U(8) = 55 + 34 = 89$$

よって, 少なくとも1回は2段上がりをして10段登る方法の数は, $U(10)$ からすべて

1段で登る方法の数を引いて

$$U(10) - 1 = 89 - 1 = 88 \text{ (通り)}$$

- (4) 1段上がりと2段上がりと3段上がりで, n 段の階段を登る方法の総数を $V(n)$ とする。(3)と同様に, 最後に1段上がり, 最後に2段上がり, 最後に3段上りの3つの場合に分けて考えると

$$V(n) = V(n-1) + V(n-2) + V(n-3) \quad [n \geq 4]$$

$$V(1) = 1, V(2) = 2, V(3) = 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, \dots$$

よって, 求める登り方の総数は 274通り

①6-C-8

1 から n までの番号を 1 列に並べたとき、左から k 番目の番号が k でないような並べ方の総数を $f(n)$ で表す。

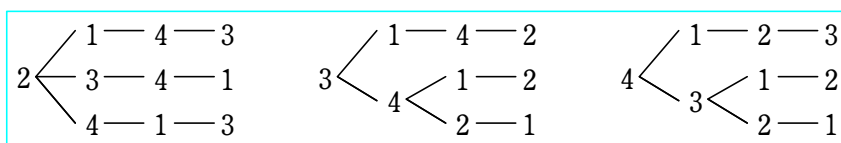
(1) $f(3)$, $f(4)$ を求めよ。

(2) $f(5)$ を求めよ。

(1) $n=3$ のとき 題意の順列は 231, 312

よって $f(3)=2$

$n=4$ のとき 題意の順列を樹形図でかいて調べると



よって $f(4)=9$

(2) [1] $f(4)$ の場合で、5 を左から 1 ~ 4 番目のどれかの番号と入れかえてもとの数を右端に入れると、左からの順番と番号は一致しないから、この場合の個数は

$$4 \times f(4) \text{ 個}$$

[2] 4 個の順列で 1 個だけ左からの順番と番号が一致しているものを考えると、4 種類の数字ごとにその個数は $f(3)$ 個ある。よって、この一致している数と 5 とを入れかえて、もとの数を右端に入れると左からの順番と番号は一致しないから、この場合の個数は $4 \times f(3)$ 個

$$[1] + [2] \text{ から } f(5) = 4\{f(4) + f(3)\}$$

$$\text{したがって、(1) から } f(5) = 4(9 + 2) = 44$$

第7章 確率

《学習項目》

- ・ 確率の定義 確率 = $\frac{\text{条件を満たす場合の数}}{\text{全体の場合の数}}$
- ・ 確率では、区別のないものも「区別して」数えなければならない。
- ・ 確率では、全体の場合の数と、条件を満たす場合の数の数え方を統一しなければならない。
- ・ 確率の問題は、できるだけ場合の数で解く方がよい。
- ・ 確率では、起こりうるすべての事象を把握しなければならない。
- ・ 復元抽出（さいころ型）、非復元抽出（くじびき型）の区別に注意
- ・ 「途中で終了」する問題も、最後までやり遂げる（オープン参加問題）

特殊な確率の求め方のチェックシート

- ・ 反復試行の確率（ n 回中 k 回）
- ・ じゃんけん
- ・ くりぬき確率（最大値の確率）
- ・ トーナメント

A 問題

① 7-A-1

赤玉 6 個と白玉 5 個が入った袋から、同時に 4 個の玉を取り出すとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも 1 個は白玉が出る確率
- (2) 赤玉が 2 個以上出る確率
- (3) 4 個とも同じ色である確率
- (4) 赤玉も白玉も少なくとも 1 個は出る確率

解答 (1) $\frac{21}{22}$ (2) $\frac{53}{66}$ (3) $\frac{2}{33}$ (4) $\frac{31}{33}$

① 7-A-2

当たる確率が $\frac{1}{7}$ であるくじを 3 回引くとき、ちょうど 2 回当たる確率を求めよ。ただし、

引いたくじは 1 回ごとにもとに戻す。

解答 $\frac{18}{343}$

①7-A-3

3個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 出る目の最大値が4以下である確率
- (2) 出る目の最大値が4である確率

解答 (1) $\frac{8}{27}$ (2) $\frac{37}{216}$

①7-A-4

5人がじゃんけんを1回するとき、次の確率を求めよ。

- (1) 1人だけが勝つ確率
- (2) 2人が勝つ確率
- (3) あいこになる確率

解答 (1) $\frac{5}{81}$ (2) $\frac{10}{81}$ (3) $\frac{17}{27}$

①7-A-5

血液型がA型、B型のどちらかである100人を調べたところ、男子60人、女子40人で、そのうちA型の人は男子36人、女子25人である。次の確率を求めよ。

- (1) この中から選ばれた1人が女子のとき、その人がA型である確率
- (2) この中から選ばれた1人がB型のとき、その人が男子である確率

解答 (1) $\frac{5}{8}$ (2) $\frac{8}{13}$

①7-A-6 (数学Bの選択分野)

1から9までの整数が1つずつ書かれたカードが9枚ある。この中から7枚のカードを取り出して得られる7つの整数のうち最大のものを X とする。

- (1) X が8である確率 $P(X=8)$ を求めよ。
- (2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

解答 (1) $\frac{7}{36}$ (2) $\frac{35}{4}$

B 問題

①7-B-1

- (3) 白球 7 個, 黒球 3 個の入った箱から 6 球を同時に取り出したとき, 白球の個数が黒球の個数より多い確率を求めよ。

●創価大●

(1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{29}{60}$ (3) $\frac{5}{6}$

解答

(1) 9 個の並べ方は, 9 か所から赤球を入れる場合を選べばよいから,
 ${}_9C_3=84$ (通り)
 赤球が連続するのは, 赤球 3 個を 1 つと見なして, それを白球 6 個の両端かまたは間の 7 か所のどこかに入れることになるから, 赤球が連続する場合は 7 通り。

よって, $\frac{7}{84}=\frac{1}{12}$

- (2) 2 個がともに白になる場合と, ともに赤になる場合に分けて考える。

ともに白となる確率は, $\frac{6}{10} \times \frac{5}{12}$

ともに赤となる確率は, $\frac{4}{10} \times \frac{7}{12}$

以上により, 求める確率は,

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{12} + \frac{4}{10} \times \frac{7}{12} = \frac{29}{60}$$

- (3) 全体の取り出し方は ${}_{10}C_6$ 通り。
 題意を満たさない場合は, 白 3 個, 黒 3 個のときより,

${}_7C_3 \times {}_3C_3=35$ (通り)

よって, 余事象から求める確率は,

$$1 - \frac{35}{{}_{10}C_6} = 1 - \frac{35}{210} = \frac{5}{6}$$

①7-B-2

- 160* A が 1 つのさいころを投げて出た目を x とし, B が 2 つのさいころを投げて出た目の和を y とする。このとき, $2x > y$ となる確率を求めよ。

解答

$\frac{11}{24}$

B が投げたさいころの目の和 y の

出方は,

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
出方 (通り)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2

$2x > y$ となるのは,

$x=2$ のとき $y=2, 3$ で, 上の表より 3 通り。

$x=3$ のとき $y=2, 3, 4, 5$ で, 10 通り。

$x=4$ のとき $y=2, 3, \dots, 7$ で, 21 通り。

$x=5$ のとき $y=2, 3, \dots, 9$ で, 30 通り。

$x=6$ のとき $y=2, 3, \dots, 11$ で, 35 通り。

以上を加えて 99 通り。さいころの目の出方

は $6^3=216$ (通り)だから, $\frac{99}{216}=\frac{11}{24}$

①7-B-3

袋の中に白球, 赤球, 黒球が1個ずつ入っている。袋から無作為に球を1個取り出し, 白球ならAの勝ち, 黒球ならBの勝ち, 赤球なら引き分けとする。取り出した球をもとに戻し, このゲームを繰り返す。A, Bのうち, 先に3回ゲームに勝った方を優勝とする。

- (1) 5回目のゲームでAの優勝が決定する確率を求めよ。
- (2) 6回目のゲームでAの優勝が決定する確率を求めよ。
- (3) 引き分けが1回も起こらずにAの優勝が決定する確率を求めよ。

●山形大●

解答 (1) $\frac{8}{81}$ (2) $\frac{70}{729}$ (3) $\frac{8}{81}$

(1) 4回までにAが2勝し, 5回目にAが勝てばよい。よって求める確率は,

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

(2) 5回までにAは2勝, Bは2勝以下で6回目にAが勝てばよい。5回までにAが2勝する確率から, Aが2勝し, Bが3勝する確率を引いて,

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - {}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

これに6回目にAが勝つ確率を掛けて,

$$\left\{{}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - {}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\} \times \frac{1}{3} = \frac{70}{729}$$

①7-B-4

金の硬貨10枚と銀の硬貨20枚が入った袋がある。この袋から硬貨を13枚同時に取り出すとき, その中に金の硬貨が n 枚含まれる確率を P_n とする。このとき, P_n が最大となる n の値を求めよ。

●島根大

解答 $n = 4$

(1) 金の硬貨の枚数を n 枚とする。

このとき,

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{{}_{10}C_n \cdot {}_{20}C_{13-n}}{{}_{30}C_{13}} \\ &= \frac{1}{{}_{30}C_{13}} \left\{ \frac{10!}{n!(10-n)!} \times \frac{20!}{(13-n)!(n+7)!} \right\} \\ \frac{P_{k+1}}{P_k} &= \frac{10!}{(k+1)!(10-k-1)!} \\ &\quad \times \frac{20!}{(13-k-1)!(k+8)!} \\ &\quad \times \frac{k!(10-k)!}{10!} \times \frac{(13-k)!(k+7)!}{20!} \\ &= \frac{10-k}{k+1} \times \frac{13-k}{k+8} = \frac{(k-10)(k-13)}{(k+1)(k+8)} \end{aligned}$$

(3) Aが3回目に優勝する確率を P_3 とする

$$\text{と, } P_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

同様に4回目, 5回目に優勝する確率を P_4 , P_5 とすると,

$$P_4 = \left\{{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)\right\} \times \frac{1}{3}$$

$$P_5 = \left\{{}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} \times \frac{1}{3}$$

以上を加えて求める確率は,

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{8}{81}$$

$$(2) \frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \text{ を解くと, } \frac{(k-10)(k-13)}{(k+1)(k+8)} > 1$$

より, $32k < 122$ すなわち $k < 3.8 \cdots$

よって, $0 \leq k \leq 3$ のとき $\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1$

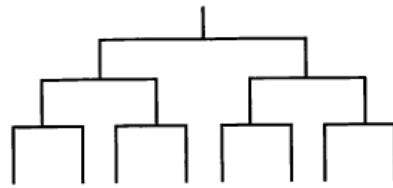
$4 \leq k \leq 9$ のとき $\frac{P_{k+1}}{P_k} < 1$

これより, $P_1 < P_2 < P_3 < P_4 > P_5 > \cdots > P_{10}$

よって, $n = 4$

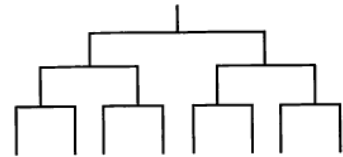
①7-B-5

同等の技能をもった8人がトーナメント形式で優勝を争うことになった。抽選で右図のように対戦相手を決めるものとする。このトーナメント戦に参加した特定の2人を甲、乙とすると、次の確率を求めよ。



- (1) 甲、乙が1回戦で対戦する確率
- (2) 甲、乙が2回戦で対戦する確率
- (3) 甲、乙がこのトーナメント戦で対戦する確率

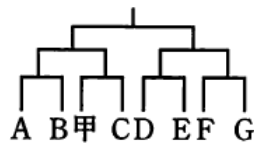
●姫路工業大●



解答 (1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{1}{14}$ (3) $\frac{1}{4}$

(1) 甲が他の7人と対戦する確率はいずれも等しいから、 $\frac{1}{7}$

(2) まず、甲の位置を右図のようにどこかに決める。甲と乙が2回戦で対戦するた



めには乙はAかBでなくてはならない。

そうなる確率は $\frac{2}{7}$

さらに、甲、乙ともに初戦で勝たなければならない。よって、求める確率は、

$$\frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$$

(3) (2)と同様に、3回戦(決勝)で対戦するためには乙は上図においてD, E, F, Gのいずれかに入らなくてはならない。そうなる確率は $\frac{4}{7}$

さらに、甲、乙ともに2連勝すれば3回戦で対戦できる。

よって、3回戦で対戦する確率は、

$$\frac{4}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{28}$$

以上により、初戦から3回戦(決勝)までにどこかで2人が対戦する確率は、(1), (2)より、

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4}$$

①7-B-6

独立な事象 A, B に対し, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{5}{6}$ のとき,

$P(A)$ と $P(B)$ を求めよ。ただし $P(A) > P(B)$ とする。 ●福岡大●

解答 $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$

解き方 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ より, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$

条件から $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{5}{6}$ より, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

A と B は独立だから, $P(A)P(B) = \frac{1}{6} \dots \dots \textcircled{1}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ に

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A)P(B) = \frac{1}{6}$ を代入して,

$P(A) + P(B) = \frac{5}{6} \dots \dots \textcircled{2}$

①, ②と $P(A) > P(B)$ より

$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$

①7-B-7

A の箱には赤玉 2 個, 白玉 3 個が入っている。B の箱には赤玉 3 個, 白玉 3 個が入っている。C の箱には赤玉 4 個, 白玉 3 個が入っている。無作為に 1 箱選んで 1 個の玉を取り出したところ赤玉であった。選んだ箱が A の箱であった確率を求めよ。 ●旭川医科大

解答 $\frac{28}{103}$

A から赤を取る確率を $P(A)$ とすると, $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$

B から赤を取る確率を $P(B)$ とすると,

$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

C から赤を取る確率を $P(C)$ とすると,

$P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{7}$

以上より, 求める確率は,

$\frac{P(A)}{P(A) + P(B) + P(C)} = \frac{28}{103}$

①7-B-8

箱の中に1番から N 番までの番号札が1枚ずつ合計 N 枚入っている。
この箱から同時に4枚の番号札を取り出す。この4枚の札の中で、最小の
番号が3である確率を P_N とする。ただし、 $N \geq 6$ とする。

- (1) P_N を求めよ。
- (2) $P_N < P_{N+1}$ となる N をすべて求めよ。
- (3) P_N を最大にする N とその最大値を求めよ。

◎宮城教育大◎

解答 (1) $P_N = \frac{4(N-4)(N-5)}{N(N-1)(N-2)}$ (2) 6, 7, 8, 9, 10 (3) $N=11, 12$ のとき最大値 $\frac{28}{165}$

(1) すべて3以上の確率からすべて

4以上の確率を引いて、

$$\begin{aligned} & \frac{{}_{N-2}C_4}{{}_NC_4} - \frac{{}_{N-3}C_4}{{}_NC_4} \\ &= \frac{(N-2)(N-3)(N-4)(N-5) - (N-3)(N-4)(N-5)(N-6)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \\ &= \frac{4(N-4)(N-5)}{N(N-1)(N-2)} \end{aligned}$$

(2) $P_{N+1} - P_N$

$$\begin{aligned} &= \frac{4(N-3)(N-4)}{(N+1)N(N-1)} - \frac{4(N-4)(N-5)}{N(N-1)(N-2)} \\ &= \frac{4(N-4)(11-N)}{(N+1)N(N-1)(N-2)} \end{aligned}$$

より $P_{N+1} - P_N > 0$ とすると、 $N \geq 6$ より、
 $6 \leq N < 11$

(3) (2)より、 $6 \leq N < 11$ のとき、 $P_{N+1} > P_N$

$N=11$ のとき $P_{N+1} = P_N$

$11 < N$ のとき $P_{N+1} < P_N$

これより、

$$P_6 < P_7 < \dots < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > \dots$$

よって、 $N=11, 12$ のとき最大で最大値

$$\frac{28}{165}$$

①7-B-9

1つのさいころを n 回投げる試行において、出た目がすべて奇数で、
かつ1の目がちょうど k 回 ($0 \leq k \leq n$) 出る確率を p_k とする。

- (1) $n=3$ のとき、 p_1 を求めよ。
- (2) p_k を n と k の式で表せ。
- (3) 出た目がすべて奇数で、かつ1の目が少なくとも1回出る確率 q を求めよ。

◎広島大◎

解答 (1) $p_1 = \frac{1}{18}$ (2) $p_k = {}_nC_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$ (3) $q = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(1) 1の目が1回と、3または5の

目が2回出る確率だから、

$$p_1 = {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

- (2) 1の目が k 回と、3または5の目が
($n-k$) 回出る確率だから、

$$p_k = {}_nC_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{2}{6}\right)^{n-k}$$

- (3) n 回とも奇数となる確率から、1の目が
1回も出ない。すなわち、 n 回とも3また
は5の出る確率を引く。 $q = \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n$

C 問題

①7-C-1

1つのさいころを n 回投げ、出た n 個の目の積を A_n とする。このとき、

- (1) $A_n=6$ になる確率を求めよ。 (2) $A_n=12$ になる確率を求めよ。

◎大阪女子大◎

解答 (1) $n^2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ (2) $\frac{n(n-1)(n+2)}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

(2) $A_n=12$ となるのは、次のいずれかである。

- (i) 2の目が2回、3の目が1回、あとはすべて1の目が出るとき、

$$\begin{aligned} p_1 &= {}_nC_2 \times {}_{n-2}C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^{n-3} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

- (ii) 3の目が1回、4の目が1回、あとはすべて1の目が出るとき、

$$\begin{aligned} p_2 &= {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} \\ &= n(n-1) \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

- (iii) 2の目が1回、6の目が1回、あとはすべて1の目が出るとき、

$$\begin{aligned} p_3 &= {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} \\ &= n(n-1) \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

以上から求める確率は、

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{n(n-1)(n+2)}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(1) $A_n=6$ となるのは、次のいずれかである。

- (i) 6の目が1回、あとはすべて1の目が出るとき、

$$p_1 = {}_nC_1 \left(\frac{1}{6}\right)^n = n \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

- (ii) 2の目が1回、3の目が1回、あとはすべて1の目が出るとき、

$$\begin{aligned} p_2 &= {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} \\ &= (n^2 - n) \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

以上から、求める確率は

$$p = p_1 + p_2 = n^2 \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

①7-C-2

n を6以上の自然数とする。1, 2, …, n から、異なる6つの数を無作為に選び、それらを小さい順に並びかえたものを、

$X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5 < X_6$ とする。

- (1) $X_3=5$ となる確率 p_n を求めよ。

- (2) p_n を最大にする自然数 n を求めよ。

◎一橋大◎

解答 (1) $\frac{720(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$ (2) 9, 10

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{720(n-5)(n-6)}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)} \\
 &\quad \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{720(n-6)(n-7)} \\
 &= \frac{(n-4)(n-5)}{(n+1)(n-7)} = \frac{n^2-9n+20}{n^2-6n-7}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \frac{p_{n+1}}{p_n} < 1 \iff n > 9$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 \iff n = 9, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} > 1 \iff n < 9$$

これより,

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_8 < p_9 = p_{10} > p_{11} > \cdots$$

よって, p_n を最大にする自然数は
 $n = 9, 10$

(1) $X_3=5$ となるのは, X_1, X_2 は
 $1 \sim 4$ の中の異なる 2 つで, その選び方は
 ${}_4C_2$ 通り, X_4, X_5, X_6 は $6 \sim n$ までの数
 の中から異なる 3 つの数を選ぶときで, そ
 の選び方は ${}_{n-5}C_3$ 通り。

これより, $X_3=5$ となる確率は,

$$\begin{aligned}
 p_n &= \frac{{}_4C_2 \times {}_{n-5}C_3}{{}_nC_6} \\
 &= \frac{720(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}
 \end{aligned}$$

① 7-C-3

H 大学には 4 つの食堂があり, A 君と Bさんは, それぞれ毎日正午
 に, 前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとるこ
 とにしている。最初の日, 2 人は別々の食堂で食事をしたとして, 次の確
 率を求めよ。

(1) n 日後に, 初めて 2 人が食堂で出会う確率。ただし, $n \geq 1$ とする。

(2) n 日後に, 2 人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率。た
 だし, $n \geq 2$ とする。

◎一橋大◎

$$(1) \quad \frac{2 \cdot 7^{n-1}}{9^n} \quad (2) \quad \frac{6(4n-1) \cdot 7^{n-3}}{9^n}$$

解答

① 7-C-4

白球 9 個, 赤球 3 個の計 12 個の球の入った袋がある。いま, この袋から 1 個ずつ順に 3 回球を
 取り出したとき, 次の確率を求めよ。ただし, 取り出した球はもとに戻さないものとする。

(1) 3 回目に取り出した球が白である確率

(2) 3 回目に取り出した球が白であるときに, 1 回目に取り出した球も白であった確率

●浜松医科大

$$(1) \quad \frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{8}{11}$$

解答

(1) 白, 白, 白と出る確率は,

$$p_1 = \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10}$$

白, 赤, 白と出る確率は, $p_2 = \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{8}{10}$

赤, 白, 白と出る確率は, $p_3 = \frac{3}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{8}{10}$

赤, 赤, 白と出る確率は, $p_4 = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{9}{10}$

以上より, 求める確率は, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{3}{4}$

(2) 求める確率を q とすると, (1)より,

$$q = \frac{p_1 + p_2}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4} = \frac{8}{11}$$

と, (1)については, 1個目と2個目を見ないで3個目だけを見ることにより, 12個中9

個が白だから, 求める確率は $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

(2)については, 3個目を見て, 白が確定したあと, 次に2個目を無視して1個目を見る。

すると, 残った11個中, 白は8個だから,

求める確率は $\frac{8}{11}$

①7-C-5

5回に1回の割合で帽子を忘れるくせのあるK君が, 正月にA, B, C3軒を順に年始回りをして家に帰ったとき, 帽子を忘れてきたことに気が付いた。2番目の家Bに忘れてきた確率を求めよ。

●早稲田大

解答

$\frac{20}{61}$

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5},$$

$$P(C) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$$

これより求める確率を P とすると,

A, B, Cで帽子を忘れる確率をそれぞれ $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ とすると,

$$P = \frac{P(B)}{P(A) + P(B) + P(C)} = \frac{20}{61}$$

①7-C-6

正四面体ABCDの辺上を動くアリは, 1つの頂点を訪れた1秒後に他の頂点のいずれかを, おのおの確率 $\frac{1}{3}$ で訪れる。最初に頂点Aにいるアリをその n 秒後まで観察する。最初にいる頂点Aは, 訪れた頂点として考え, 次の問いに答えよ。

(1) 頂点A, Bは訪れているが, 頂点C, Dは訪れていない確率 p_n を求めよ。

(2) 頂点A, B, Cは訪れているが, 頂点Dは訪れていない確率 q_n を求めよ。

(3) 全頂点を訪れている確率 r_n を求めよ。

●一橋大●

解答

$$(1) p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (2) q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (3) r_n = 1 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(1) 最初の頂点 A から B を訪れ、次に頂点 B から A を訪れ、以降 A, B を往復して訪れればよい。

頂点 A から B を訪れる確率、頂点 B から A を訪れる確率はともに $\frac{1}{3}$ であるから、

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(2) A, B, C それぞれの頂点から D を訪れない確率は $\frac{2}{3}$ だから、 n 秒後までに D を訪れない確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ である。ただし、この中には A, B のみと A, C のみを訪れている場合が含まれており、その確率はいずれも p_n であるから、(1)を用いて、

$$q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3) 全頂点を訪れていない場合は、2点のみを訪れている場合と3点のみを訪れている場合がある。前者は A, B のみ, A, C のみ, A, D のみの3通りの場合があり、それぞれの確率は p_n である。後者は、B 以外, C 以外, D 以外の3通りの場合があり、それぞれの確率は q_n である。

よって、

$$\begin{aligned} r_n &= 1 - 3p_n - 3q_n \\ &= 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= 1 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

第8章 整数問題

《学習項目》

- ・ 整数の整除 (あまりのあるわりざん)
- ・ 約数倍数
- ・ 素数と素因数分解
- ・ 公約数と公倍数, 最大公約数と最小公倍数
 正の整数 a, b の最大公約数を G , 最小公倍数を L とすると,

$$a = a_1 G, b = b_1 G, L = a_1 b_1 G$$
 と表せる。このことより,

$$ab = GL$$
- ・ 互いに素
- ・ 整数の「余りによる類別」
- ・ 整数問題
 - (1) 整数 $\times$ 整数 = 整数
 - (2) 一文字整理
 - (3) 余りで類別
 - (4) 範囲を絞り込む
- ・ 合同式
 $a \equiv c \pmod{m}, b \equiv d \pmod{m}$ のとき

$$a + b \equiv c + d \pmod{m}$$

$$a - b \equiv c - d \pmod{m}$$
 $a \equiv c \pmod{m}, b \equiv d \pmod{m}$ のとき

$$ab \equiv cd \pmod{m} \quad a^k \equiv c^k \pmod{m}$$

A 問題

① 8-A-1

次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。(3)は最大公約数のみでよい。

- (1) $2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (2) 18, 252 (3) 4984, 3471

解答 (1) 6, 180 (2) 18, 252 (3) 89

(1) $2 \cdot 3^2$
 $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

よって、最大公約数は $2 \cdot 3 = 6$

最小公倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

(2) $18 = 2 \cdot 3^2$
 $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

よって、最大公約数は $2 \cdot 3^2 = 18$

最小公倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$

(3) $4984 = 3471 \cdot 1 + 1513$
 $3471 = 1513 \cdot 2 + 445$
 $1513 = 445 \cdot 3 + 178$
 $445 = 178 \cdot 2 + 89$
 $178 = 89 \cdot 2 + 0$

よって、最大公約数は 89

① 8-A-2

次の数の正の約数の和を求めよ。

- (1) 3^7 (2) $3^4 \cdot 7^3$ (3) 864

解答 (1) 3280 (2) 48400 (3) 2520

(1) 求める和は $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^7 = \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 3280$

(2) 求める和は $(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \times \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 121 \times 400 = 48400$

(3) $864 = 2^5 \cdot 3^3$ であるから、求める和は
 $(1 + 2 + \cdots + 2^5)(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 63 \times 40 = 2520$

① 8-A-3

次の $\square$ に当てはまる 0 以上の整数のうち、最も小さいものを求めよ。

- (1) $9 \equiv \square \pmod{3}$ (2) $13 \equiv \square \pmod{4}$ (3) $100 \equiv \square \pmod{15}$

解答 (1) 0 (2) 1 (3) 10

B 問題

①8-B-1

等式 $4x+2y+z=15$ を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

解答 $(x, y, z)=(1, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 5), (1, 4, 3), (1, 5, 1), (2, 1, 5),$
 $(2, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 1)$

$y \geq 1, z \geq 1$ であるから

$$4x = 15 - 2y - z \leq 15 - 2 \cdot 1 - 1 = 12$$

よって $x \leq 3$ x は自然数であるから $x=1, 2, 3$

[1] $x=1$ のとき $2y+z=11$

y は自然数であるから $y=1, 2, 3, 4, 5$

したがって $(y, z)=(1, 9), (2, 7), (3, 5), (4, 3), (5, 1)$

[2] $x=2$ のとき $2y+z=7$

y は自然数であるから $y=1, 2, 3$ したがって $(y, z)=(1, 5), (2, 3), (3, 1)$

[3] $x=3$ のとき $2y+z=3$

y は自然数であるから $y=1$ したがって $(y, z)=(1, 1)$

以上から、求める自然数 x, y, z の組は

$(x, y, z)=(1, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 5), (1, 4, 3), (1, 5, 1), (2, 1, 5),$
 $(2, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 1)$

①8-B-2

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $30x+17y=2$

(2) $29x+42y=5$

(3) $46x-35y=4$

解答 k は整数とする。

(1) $x=17k+8, y=-30k-14$ (2) $x=42k-65, y=-29k+45$

(3) $x=35k+64, y=46k+84$

(1) $30x+17y=2$ ①

$x=4, y=-7$ は、 $30x+17y=1$ の整数解の 1 つである。

よって $30 \cdot 4 + 17 \cdot (-7) = 1$

$30 \cdot 8 + 17 \cdot (-14) = 2$ ②

①-② から $30(x-8) + 17(y+14) = 0$ ③

30 と 17 は互いに素であるから、③ のすべての整数解は

$x-8=17k, y+14=-30k$ (k は整数)

$x=17k+8, y=-30k-14$ (k は整数)

(2) $29x+42y=5$ ①

$x=-13, y=9$ は、 $29x+42y=1$ の整数解の 1 つである。

よって $29 \cdot (-13) + 42 \cdot 9 = 1$

$29 \cdot (-65) + 42 \cdot 45 = 5$ ②

①-② から $29(x+65) + 42(y-45) = 0$ ③

29 と 42 は互いに素であるから、③ のすべての整数解は

$x+65=42k, y-45=-29k$ (k は整数)

$x=42k-65, y=-29k+45$ (k は整数)

① **8-B-3**

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $xy - 3x - y - 1 = 0$

(2) $xy - 4x + 2y + 1 = 0$

解答 (1) $(x, y) = (2, 7), (5, 4), (3, 5), (0, -1), (-3, 2), (-1, 1)$

(2) $(x, y) = (-1, -5), (-11, 5), (1, 1), (-5, 7), (7, 3), (-3, 13)$

(1) 与えられた方程式を変形すると

$$(x-1)(y-3)=4$$

積が 4 になる整数 $x-1, y-3$ の組は

$$(x-1, y-3) = (1, 4), (4, 1), (2, 2), (-1, -4), (-4, -1), (-2, -2)$$

よって $(x, y) = (2, 7), (5, 4), (3, 5), (0, -1), (-3, 2), (-1, 1)$

(2) 与えられた方程式を変形すると

$$(x+2)(y-4)=-9$$

積が -9 になる整数 $x+2, y-4$ の組は

$$(x+2, y-4) = (1, -9), (-9, 1), (3, -3), (-3, 3), (9, -1), (-1, 9)$$

よって $(x, y) = (-1, -5), (-11, 5), (1, 1), (-5, 7), (7, 3), (-3, 13)$

① **8-B-4**

n は自然数とする。 $n^2 - 14n + 40$ が素数となるような n をすべて求めよ。

解答 $n = 3, 11$

$$n^2 - 14n + 40 = (n-4)(n-10)$$

$$\text{または } n^2 - 14n + 40 = (4-n)(10-n)$$

$n-4 > n-10, 4-n < 10-n$ であるから, $n^2 - 14n + 40$ が素数であるとき

$$n-10=1 \quad \text{または} \quad 4-n=1$$

$$n-10=1 \text{ より } n=11$$

$$4-n=1 \text{ より } n=3$$

$$n=11 \text{ のとき } n^2 - 14n + 40 = 7 \cdot 1 = 7 \text{ (素数)}$$

$$n=3 \text{ のとき } n^2 - 14n + 40 = 1 \cdot 7 = 7 \text{ (素数)}$$

よって, $n^2 - 14n + 40$ が素数となるような自然数 n は

$$n = 3, 11$$

① 8-B-5

x, y がともに整数のとき、次の方程式を満たす (x, y) を求めよ。

(1) $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ (2) $x^2 + xy + y - 2 = 0$

解答 (1) $(x, y) = (3, 2), (4, 3)$ (2) $(x, y) = (0, 2), (-2, 2)$

(1) x について整理すると $x^2 - 2(y+1)x + 3y^2 - 8y + 13 = 0$ ①

この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = 2^2(y+1)^2 - 4(3y^2 - 8y + 13) \\ = -8(y^2 - 5y + 6) = -8(y-2)(y-3)$$

① の解は整数 (実数) であるから $D \geq 0$ である。

よって $-8(y-2)(y-3) \geq 0$ ゆえに $2 \leq y \leq 3$

y は整数であるから $y = 2, 3$

[1] $y = 2$ のとき ① は $x^2 - 6x + 9 = 0$ ゆえに $x = 3$

[2] $y = 3$ のとき ① は $x^2 - 8x + 16 = 0$ ゆえに $x = 4$

[1], [2] から $(x, y) = (3, 2), (4, 3)$

(2) x について解くと $x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4y + 8}}{2}$ ②

x が整数であるためには $y^2 - 4y + 8$ が平方数であることが必要。

よって $y^2 - 4y + 8 = k^2$ (k は 0 以上の整数)

$$(y-2)^2 - k^2 = -4 \quad (y-2+k)(y-2-k) = -4$$

y, k は整数で $y-2+k \geq y-2-k$ であるから

$$(y-2+k, y-2-k) = (1, -4), (2, -2), (4, -1)$$

y, k は整数であることを考慮して解くと $(y, k) = (2, 2)$

このとき、② より $x = 0, -2$ よって $(x, y) = (0, 2), (-2, 2)$

①8-B-6

次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

(1) $2xyz = x + 3y + 4z \quad (x < y < z)$

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (x \leq y \leq z)$

(3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \quad (x \leq y \leq z)$

【解答】(1) $(x, y, z) = (1, 3, 5)$

(2) $(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

(3) $(x, y, z) = (1, 3, 6), (1, 4, 4), (2, 2, 2)$

(1) $x < y < z$ であるから
 $2xyz = x + 3y + 4z < z + 3z + 4z = 8z$

よって $2xyz < 8z$

両辺を正の数 $2z$ で割ると $xy < 4$

これを満たす $x < y$ である自然数 x, y は

$(x, y) = (1, 2), (1, 3)$

$(x, y) = (1, 2)$ のとき、与えられた等式は

$2 \cdot 1 \cdot 2z = 1 + 3 \cdot 2 + 4z$

これを満たす z はない。

$(x, y) = (1, 3)$ のとき、与えられた等式は

$2 \cdot 1 \cdot 3z = 1 + 3 \cdot 3 + 4z$

これを解くと $z = 5$ ($y < z$ を満たす)

したがって $(x, y, z) = (1, 3, 5)$

(2) $1 \leq x \leq y \leq z$ であるから

$\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ ①

よって $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

ゆえに $x \leq 3$

x は自然数であるから $x = 1, 2, 3$

[1] $x = 1$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

これを満たす自然数 y, z はない。

[2] $x = 2$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ ②

① から $\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$

ゆえに $y \leq 4$

y は自然数で、 $2 = x \leq y$ であるから

$y = 2, 3, 4$

$y = 2$ のとき、② から $\frac{1}{z} = 0$

これを満たす自然数 z はない。

$y = 3$ のとき、② から $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$

よって $z = 6$ ($y \leq z$ を満たす)

$y = 4$ のとき、② から $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$

よって $z = 4$ ($y \leq z$ を満たす)

(3) $1 \leq x \leq y \leq z$ であるから

$\frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ ①

よって

$\frac{3}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

ゆえに $x \leq 2$

x は自然数であるから $x = 1, 2$

[1] $x = 1$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ ②

① から $\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$

ゆえに $y \leq 4$

y は自然数で、 $1 = x \leq y$ であるから

$y = 1, 2, 3, 4$

$y = 1$ のとき、② から $\frac{1}{z} = -\frac{1}{2}$

これを満たす自然数 z はない。

$y = 2$ のとき、② から $\frac{1}{z} = 0$

これを満たす自然数 z はない。

$y = 3$ のとき、② から $\frac{1}{z} = \frac{1}{6}$

よって $z = 6$ ($y \leq z$ を満たす)

$y = 4$ のとき、② から $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$

よって $z = 4$ ($y \leq z$ を満たす)

[2] $x = 2$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ③

① から $1 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$

ゆえに $y \leq 2$

y は自然数で、 $2 = x \leq y$ であるから $y = 2$

このとき、③ から $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

よって $z = 2$ ($y \leq z$ を満たす)

以上から

$(x, y, z) = (1, 3, 6), (1, 4, 4), (2, 2, 2)$

[3] $x=3$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ ③

① から $\frac{2}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$

ゆえに $y \leq 3$

y は自然数で, $3=x \leq y$ であるから $y=3$

このとき, ③ から $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$

よって $z=3$ ($y \leq z$ を満たす)

以上から

$(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

① **8-B-7**

3桁の自然数 N を 7 進法で表すと $a0b$ となり, 5 進法で表すと逆の並び $b0a$ になるという。 a, b を求めよ。また, N を 10 進法で表せ。

解答 $a=2, b=4; N=102$

$a0b$ は 7 進数であるから $1 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 6$

$b0a$ は 5 進数であるから $1 \leq b \leq 4, 0 \leq a \leq 4$

よって $1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4$ ①

N を 10 進法で表すと $N = a0b_{(7)} = a \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + b \cdot 7^0 = 49a + b$

$N = b0a_{(5)} = b \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + a \cdot 5^0 = 25b + a$

よって $49a + b = 25b + a$ 整理すると $2a = b$

これと ① を満たす整数 a, b の組は $(a, b) = (1, 2), (2, 4)$

[1] $(a, b) = (1, 2)$ のとき

$N = 49 \cdot 1 + 2 = 51$ これは 3 桁でないから適さない。

[2] $(a, b) = (2, 4)$ のとき

$N = 49 \cdot 2 + 4 = 102$ これは 3 桁であるから適する。

したがって $a=2, b=4, N=102$

① **8-B-8**

次のものを求めよ。

(1) 4^{200} を 5 で割った余り

(2) 整数 n を 7 で割った余りが 2 であるとき, n^{30} を 7 で割った余り

(3) 123^{120} の一の位

(4) 7^{251} の下 2 桁

解答 (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 43

(1) $4^2 \equiv 1 \pmod{5}$ であるから

$4^{200} \equiv 1^{100} \pmod{5}$

すなわち $4^{200} \equiv 1 \pmod{5}$

よって, 4^{200} を 5 で割った余りは 1

(2) $n \equiv 2 \pmod{7}$ のとき $n^{30} \equiv 2^{30} \pmod{7}$

$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ であるから $2^{30} \equiv 1^{10} \pmod{7}$

よって $n^{30} \equiv 1 \pmod{7}$

したがって、 n^{30} を 7 で割った余りは 1

$$(3) \quad 123 \equiv 3 \pmod{10} \text{ であるから}$$

$$123^{120} \equiv 3^{120} \pmod{10}$$

また、 $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ であるから

$$3^{120} \equiv 1^{30} \pmod{10}$$

よって $123^{120} \equiv 1 \pmod{10}$

したがって、 123^{120} の一の位は 1

$$(4) \quad 7^4 = 2401 \text{ より } 7^4 \equiv 1 \pmod{100}$$

また、 $7^{251} = (7^4)^{62} \cdot 7^3$, $7^3 = 343$ より

$$7^{251} \equiv 1^{62} \cdot 7^3 \equiv 43 \pmod{100}$$

よって、 7^{251} の下 2 桁は 43

① 8-B-9

次のことを証明せよ。

(1) n が 3 以上の奇数のとき、 $n^3 - n$ は 24 の倍数である。

(2) m, n が異なる自然数のとき、 $m^3n - mn^3$ は 6 の倍数である。

(3) n が整数のとき、 $n^9 - n^3$ は 9 で割り切れる。

解答

(1) n は 3 以上の奇数であるから、 m を自然数として、 $n = 2m + 1$ と表される。

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1) \quad \dots\dots ①$$

$$= 2m(2m+1)(2m+2) = 4m(m+1)(2m+1) \quad \dots\dots ②$$

① において、連続する 3 つの整数、 $n-1, n, n+1$ のいずれかは 3 の倍数であるから、その 3 つの整数の積 $(n-1)n(n+1)$ は 3 の倍数である。

よって、 $n^3 - n$ は 3 の倍数である。

また ② において、 $m(m+1)$ は連続する 2 つの整数の積であるから、2 の倍数である。

ゆえに、 $n^3 - n$ は 8 の倍数である。

以上より、 $n^3 - n$ は 3 の倍数かつ 8 の倍数であるから、24 の倍数である。

$$(2) \quad m^3n - mn^3 = (m^3 - m)n - (n^3 - n)m = (m-1)m(m+1)n - (n-1)n(n+1)m$$

$(m-1)m(m+1), (n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であるから、ともに 6 の倍数である。

したがって、 $m^3n - mn^3$ は 6 の倍数である。

(3) すべての整数 n は k を整数として $n = 3k-1, n = 3k, n = 3k+1$ のいずれかの形で表される。

$$\text{ここで } n^9 - n^3 = n^3(n^6 - 1) = n^3(n^3 + 1)(n^3 - 1)$$

[1] $n = 3k-1$ のとき

$$n^3 + 1 = (3k-1)^3 + 1 = 27k^3 - 27k^2 + 9k - 1 + 1 = 9(3k^3 - 3k^2 + k)$$

[2] $n = 3k$ のとき $n^3 = (3k)^3 = 27k^3 = 9 \cdot 3k^3$

[3] $n = 3k+1$ のとき $n^3 - 1 = (3k+1)^3 - 1 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k)$

以上から、 n がいずれの場合も、 $n^3 + 1, n^3, n^3 - 1$ のいずれかが 9 の倍数となる。

よって、 $n^9 - n^3$ は 9 で割り切れる。

C 問題

①8-C-1

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ は、 $x=1, -1, -2$ で整数値 $f(1)=r$, $f(-1)=s$, $f(-2)=t$ をとるものとする。

(1) a, b, c をそれぞれ r, s, t の式で表せ。

(2) すべての整数 n について、 $f(n)$ は整数になることを示せ。

解答 (1) $a=\frac{r+3s-t}{6}, b=\frac{r+s}{2}, c=\frac{2r-6s+t}{6}$

(1) $f(1)=r, f(-1)=s, f(-2)=t$

から、 $a+b+c=r, \dots\dots①$

$-a+b-c=s \dots\dots②$

$-8a+4b-2c=t \dots\dots③$

①, ②, ③を解いて、 $a=\frac{r+3s-t}{6}$

$b=\frac{r+s}{2} \quad c=\frac{2r-6s+t}{6}$

(2) (1)より、

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{r+3s-t}{6}n^3 + \frac{r+s}{2}n^2 + \frac{2r-6s+t}{6}n \\ &= r \cdot \frac{n^3+3n^2+2n}{6} + s \cdot \frac{n^3+n^2-2n}{2} \\ &\quad + t \cdot \frac{-n^3+n}{6} \\ &= r \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &\quad + s \cdot \frac{(n-1)n(n+2)}{2} - t \cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

連続する3整数の積は6の倍数だから、

$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ と $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ は整数

である。

また、連続する2整数の積は偶数だから、

$\frac{(n-1)n}{2}$ も整数である。

ゆえに、 $f(n)$ は整数になる。

①8-C-2

直角三角形の直角をはさむ2辺の長さを m, n とし、斜辺の長さを l とする。 n が3以上の素数であり、 m, l が自然数であるとき、この直角三角形の面積 S を n だけで表し、その S が整数であることを示せ。

解答 (1) $S=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)$

(証明) 条件より、

$n^2=l^2-m^2=(l-m)(l+m)$

n は素数で $l+m>l-m$ より、

$l+m=n^2, l-m=1$

これを解いて、 $m=\frac{n^2-1}{2}$ から、

$S=\frac{1}{2}mn=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)$

n が3以上の素数より、 n は奇数である。

よって、 $n-1, n+1$ はともに偶数だから

S は整数である。

① 8-C-3

$a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ がある。 a_n が偶数となる n を決定せよ。

解答 $n=3m$ (m は整数)

解き方 (2) $a_1=1, a_2=3, a_3=2, a_4=-15,$
 $a_5=-59, a_6=-72, a_7=197,$
 $a_8=1095, a_9=1906, \dots$ これより,
 a_1, a_2 は奇数で n が自然数のとき, a_{3n}
 は偶数, a_{3n+1}, a_{3n+2} は奇数と推測できる。
 これを数学的帰納法で証明する。

別解 $a_1=1, a_2=3, a_3=2 \dots\dots$ ①

$$a_{n+3}=3a_{n+2}-7a_{n+1} \\ =3(3a_{n+1}-7a_n)-7a_{n+1}=2a_{n+1}-21a_n$$

より, $a_{n+3}-a_n=2(a_{n+1}-11a_n) \dots\dots$ ②

②より, $a_{n+3}-a_n$ は偶数である。

ゆえに, a_n が奇数ならば a_{n+3} も奇数であり, a_n が偶数ならば a_{n+3} も偶数である。

これと①より, a_n が偶数となるのは $n=3m$ のときである。

① 8-C-4

θ_n ($n=1, 2, \dots$) を $\tan \theta_n = \frac{1}{n}$ ($-90^\circ < \theta_n < 90^\circ$) で定めるとき,
 $\tan(\theta_2 + \theta_i + \theta_j) = 1$ を満たす組 (i, j) で $i \leq j$ であるものをすべて求めよ。

解答 $(i, j) = (4, 13), (5, 8)$

解き方 $\tan(\theta_2 + \theta_i + \theta_j)$

$$= \frac{\tan \theta_2 + \tan(\theta_i + \theta_j)}{1 - \tan \theta_2 \tan(\theta_i + \theta_j)} = \frac{\frac{1}{2} + \tan(\theta_i + \theta_j)}{1 - \frac{1}{2} \tan(\theta_i + \theta_j)}$$

$$\text{よって, } \frac{\frac{1}{2} + \tan(\theta_i + \theta_j)}{1 - \frac{1}{2} \tan(\theta_i + \theta_j)} = 1$$

$$\tan(\theta_i + \theta_j) = \frac{1}{3}$$

$$\tan(\theta_i + \theta_j) = \frac{\tan \theta_i + \tan \theta_j}{1 - \tan \theta_i \tan \theta_j} \\ = \frac{\frac{1}{i} + \frac{1}{j}}{1 - \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{j}} = \frac{i+j}{ij-1}$$

$$\text{より, } \frac{i+j}{ij-1} = \frac{1}{3} \text{ から, } ij - 3i - 3j - 1 = 0$$

$$\text{すなわち, } (i-3)(j-3) = 10$$

$i \leq j$ で, i, j は自然数より, $-2 \leq i-3 \leq j-3$

$$\text{よって, } (i-3, j-3) = (1, 10), (2, 5)$$

$$\text{したがって, } (i, j) = (4, 13), (5, 8)$$

① 8-C-5

(1)* 自然数 a, b, c が $a < b < c$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3}$ を満たす。このような組 (a, b, c) のうち, c の最も小さいものをすべて求めよ。

解答 (1) $(a, b, c) = (8, 9, 11), (8, 10, 11), (9, 10, 11)$

(1) $a < b < c$ ……①かつ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} \quad \text{……②より,}$$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} = \frac{3}{c} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{3} > \frac{3}{c} \text{ から, } c > 9$$

これより, $c \geq 10$

$c = 10$ のとき ①より, $a \leq 8, b \leq 9$ である

$$\text{から, } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{121}{360} > \frac{1}{3}$$

となり②に反する。

次に, $c = 11$ のとき ①, ②より,

$$a < b < 11 \quad \text{……③}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{11} < \frac{1}{3} \quad \text{……④}$$

$$\text{④より, } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{8}{33} \text{ であるから,}$$

$$\frac{8}{33} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b} \text{ これより, } \frac{33}{4} < b$$

$$\text{これと③より, } \frac{33}{4} < b < 11 \text{ となり, これ}$$

を満たすのは $b = 9, 10$ である。

(i) $b = 9$ のとき, ③, ④に代入して

$$a < 9, \frac{1}{a} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} < \frac{1}{3} \text{ より,}$$

$$\frac{99}{13} < a < 9 \quad \text{よって, } a = 8$$

$$\text{これより, } (a, b, c) = (8, 9, 11)$$

(ii) $b = 10$ のとき, ③, ④に代入して,

$$a < 10, \frac{1}{a} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} < \frac{1}{3} \text{ より,}$$

$$\frac{330}{47} < a < 10 \quad \text{よって, } a = 8, 9$$

$$\text{これより, } (a, b, c) = (8, 10, 11),$$

$$(9, 10, 11)$$

$$\text{以上より, } (a, b, c) = (8, 9, 11),$$

$$(8, 10, 11), (9, 10, 11)$$

①8-C-6

m を正の整数とする。 $m^3 + 3m^2 + 2m + 6$ はある正の整数の3乗である。 m を求めよ。

解答 $m = 5$

) ある正の整数を n とすると,

$$m^3 + 3m^2 + 2m + 6 = n^3 \quad \text{……①}$$

となる。 m は正の整数だから,

$$m^3 < m^3 + 3m^2 + 2m + 6 \quad \text{……②}$$

であり, また

$$(m+2)^3 = m^3 + 6m^2 + 12m + 8$$

$$> m^3 + 3m^2 + 2m + 6 \quad \text{……③}$$

である。よって, ②, ③および①により

$$m^3 < n^3 < (m+2)^3 \text{ となり, } m \text{ も } n \text{ も正の}$$

$$\text{数だから, } m < n < m+2$$

また, m も n も整数だから, これを満たす

n は $n = m+1$ しかない。これを①に代

$$\text{入すると, } m^3 + 3m^2 + 2m + 6 = (m+1)^3$$

$$m = 5$$

第9章 平面図形（および空間図形）

《学習項目》

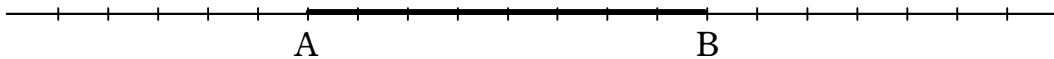
- ・ 三角形の成立条件（再）
- ・ 角の二等分線の性質
- ・ 三角形の重心・外心・内心・垂心
- ・ 正三角形の性質
 - ① 重心＝外心＝内心＝垂心
 - ② 重心・外心・内心・垂心のいずれか2つが一致すれば正三角形
- ・ メネラウスの定理，拡張メネラウスの定理
- ・ チェバの定理，拡張チェバの定理
- ・ 円と接線
- ・ 2円の共通接線（共通内接線，共通外接線）
- ・ 2つの円の位置関係
- ・ 円周角の定理，その逆
- ・ 円に内接する四角形の性質，その逆
- ・ 接弦定理，その逆
- ・ 方べきの定理，その逆
- ・ 方べきの定理の証明
- ・ 補助線の引き方

A 問題

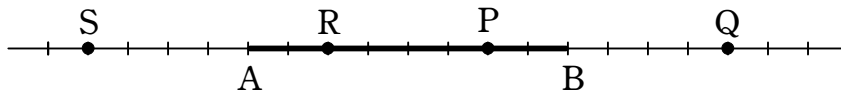
① 9-A-1

線分 AB について，次の点を下の図にしろ。

- | | |
|----------------------|----------------------|
| (1) $3:1$ に内分する点 P | (2) $3:1$ に外分する点 Q |
| (3) $1:3$ に内分する点 R | (4) $1:3$ に外分する点 S |



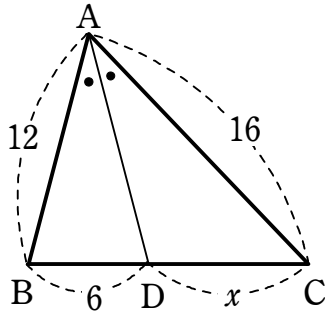
【解答】 [図]



①9-A-2

次の図において、 x の値を求めよ。

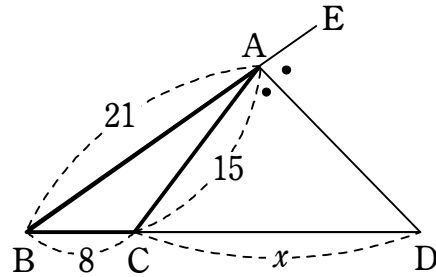
(1)



$$\angle BAD = \angle DAC$$

解答 (1) $x=8$ (2) $x=20$

(2)



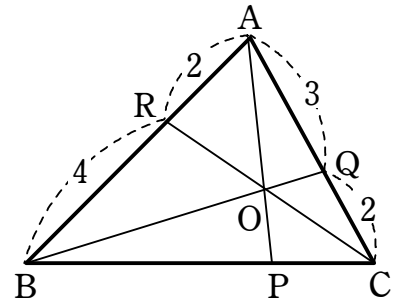
$$\angle CAD = \angle DAE$$

①9-A-3

右の図において、次の比を求めよ。

(1) $BP : PC$

(2) $AO : OP$



解答 (1) $3 : 1$ (2) $2 : 1$

①9-A-4

$\triangle ABC$ の内部に点 O をとり、直線 AO , BO , CO が BC , CA , AB と交わる点をそれぞれ D , E , F とすると、 $AF : FB = 5 : 6$, $BD : DC = 3 : 1$ である。

(1) $AE : EC$ を求めよ。

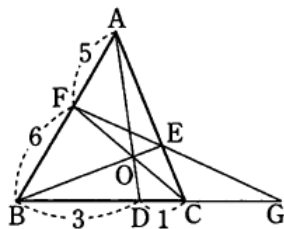
(2) 直線 EF と辺 BC の延長との交点を G とすると、 $BC : CG$ を求めよ。

解答 (1) $5 : 2$ (2) $2 : 1$

(1) $\triangle ABC$ においてチェバの定理を用いると、

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1 \text{ より、}$$

$$\frac{3}{1} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{5}{6} = 1 \quad AE : EC = 5 : 2$$



(2) $\triangle ABC$ と直線 GF にメネラウスの定理

を用いると、 $\frac{BG}{GC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$ より

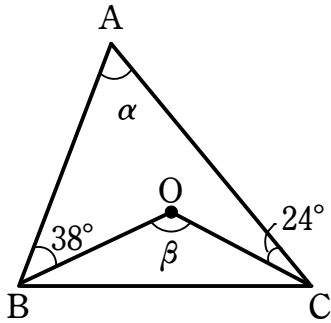
$$\frac{BG}{GC} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{6} = 1 \text{ から、} BG : GC = 3 : 1$$

よって、 $BC : CG = 2 : 1$

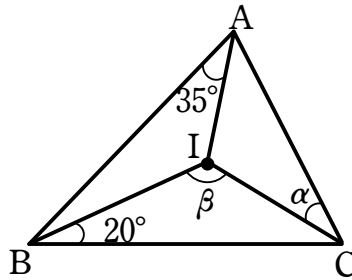
①9-A-5

$\triangle ABC$ の外心を O , 内心を I とする。次の図の α, β の大きさを求めよ。

(1)



(2)



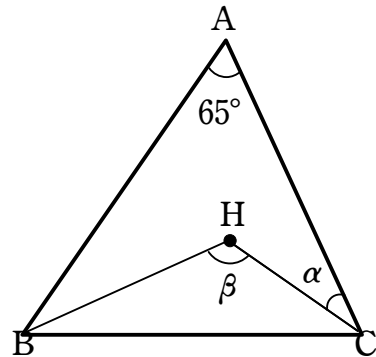
解答

(1) $\alpha = 62^\circ, \beta = 124^\circ$ (2) $\alpha = 35^\circ, \beta = 125^\circ$

①9-A-6

右の図において、点 H は $\triangle ABC$ の垂心である。

α, β を求めよ。

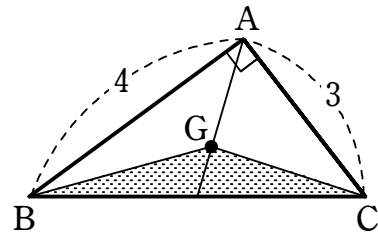


解答

$\alpha = 25^\circ, \beta = 115^\circ$

①9-A-7

$\angle A = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 3$ である直角三角形 ABC について、その重心を G とするとき、 $\triangle GBC$ の面積を求めよ。



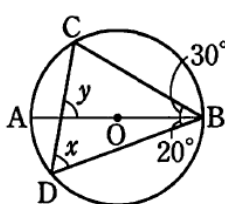
解答

2

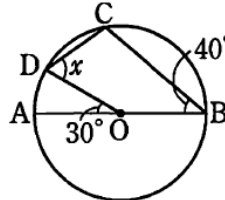
①9-A-8

次の各図で角 x, y を求めよ。ただし、 O は円の中心とする。

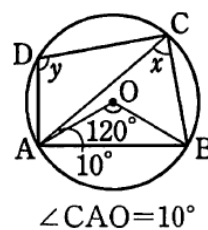
(1)



(2)



(3)



(1) $x = 60^\circ, y = 80^\circ$

(2) $x = 65^\circ$

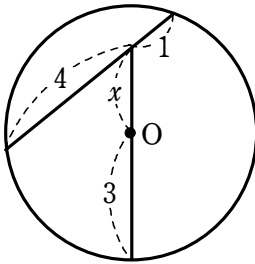
(3) $x = 60^\circ, y = 100^\circ$

____ | (1) $\angle ADC = \angle ABC = 30^\circ$ より (3) $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ$
 $x = 90^\circ - 30^\circ$, $y = 60^\circ + 20^\circ$
 (2) $\angle AOC = 2 \angle ABC = 80^\circ$ から $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$
 $\angle COD = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$ $= \frac{1}{2} (180^\circ - 10^\circ \times 2) = 80^\circ$
 これより $x = (180^\circ - 50^\circ) \times \frac{1}{2} = 65^\circ$ よって, $y = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

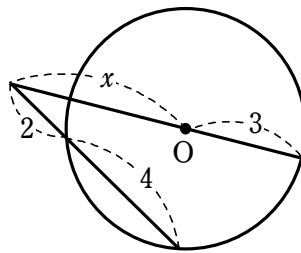
① 9-A-9

下の図において, x を求めよ。ただし, O は円の中心, 直線 PT は円の接線で, T は接点である。

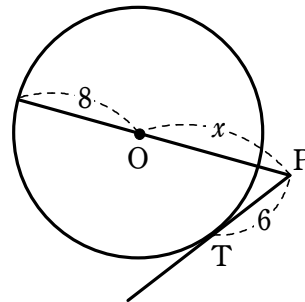
(1)



(2)



(3)



【解答】 (1) $x = \sqrt{5}$ (2) $x = \sqrt{21}$ (3) $x = 10$

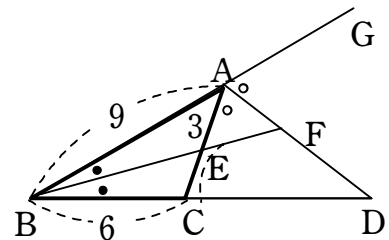
B 問題

① 9-B-1

右の図において,

$\angle ABF = \angle FBD$, $\angle CAD = \angle DAG$

のとき, EC , CD , $AF : FD$ の値を求めよ。



【解答】 $EC = 2$, $CD = \frac{15}{2}$, $AF : FD = 2 : 3$

∠Bの二等分線と辺ACの交点がEであるから

$$BA : BC = AE : EC \quad \text{すなわち} \quad BA \cdot EC = BC \cdot AE$$

よって $9 \cdot EC = 6 \cdot 3$ ゆえに $EC = 2$

また、∠Aの外角の二等分線と辺BCの延長の交点がDであるから

$$AB : AC = BD : DC \quad \text{すなわち} \quad AB \cdot DC = AC \cdot BD$$

$$AC = AE + EC = 3 + 2 = 5 \text{ であるから } 9 \cdot CD = 5 \cdot (6 + CD)$$

$$\text{ゆえに } CD = \frac{15}{2}$$

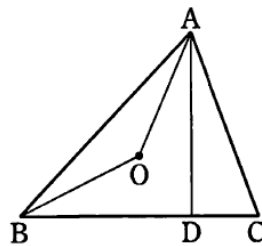
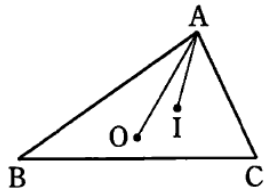
更に、∠Bの二等分線と辺ADの交点がFであるから $BA : BD = AF : FD$

$$\text{また } BD = BC + CD = 6 + \frac{15}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\text{ゆえに } AF : FD = 9 : \frac{27}{2} = 2 : 3$$

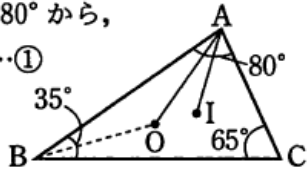
①9-B-2

- (1) 下図の△ABCで、∠B=35°、(2) △ABCの外心をO、AからBCへ引いた垂線をAD、
 ∠C=65°である。△ABCの内心をI、外心をOとする。∠IAOは何度か。
 ∠CAD=20°とする。
 ∠ABOは何度か。

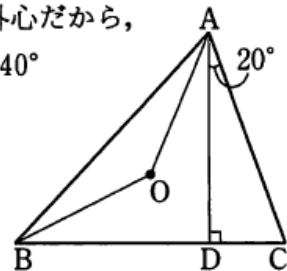


解答 (1) 15° (2) 20°

(1) ∠A=80°から、
 ∠BAI=40° ……①
 Oは外心より、
 ∠AOB=65°×2
 =130°
 となり、∠BAO=25° ……②
 ①-②より、∠IAO=15°



(2) ∠C=70°、Oは外心だから、
 ∠AOB=70°×2=140°
 OA=OBより
 ∠ABO
 =(180°-140°)÷2
 =20°



①9-B-3

△ABCの辺BC、CA、ABを同じ比2:3に内分する点を、それぞれD、E、Fとし、BEとCFの交点をP、CFとADの交点をQ、ADとBEの交点をRとするとき、

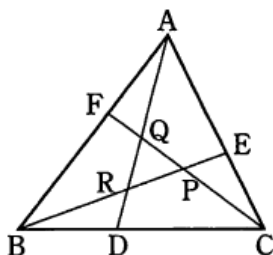
- (1) AR:RDを求めよ。 (2) AQ:QR:RDを求めよ。

解答 (1) 15:4 (2) 10:5:4

(1) $\triangle ADC$
と直線 BE に対して、メネラウスの定理を用いると、

$$\frac{AR}{RD} \times \frac{DB}{BC} \times \frac{CE}{EA} = 1 \text{ より, } \frac{AR}{RD} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = 1$$

よって、 $AR:RD=15:4 \cdots \cdots ①$



(2) $\triangle ABD$ と直線 FC に対して、メネラウスの定理を用いると、

$$\frac{BC}{CD} \times \frac{DQ}{QA} \times \frac{AF}{FB} = 1 \text{ より, } \frac{5}{3} \times \frac{DQ}{QA} \times \frac{2}{3} = 1$$

よって、 $DQ:QA=9:10 \cdots \cdots ②$

$AD=1$ としたとき、②より、 $AQ=\frac{10}{19}$

①より、 $RD=\frac{4}{19}$

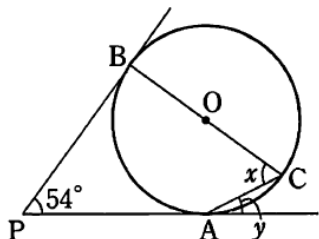
よって、 $QR=1-\frac{10}{19}-\frac{4}{19}=\frac{5}{19}$

以上より、 $AQ:QR:RD=10:5:4$

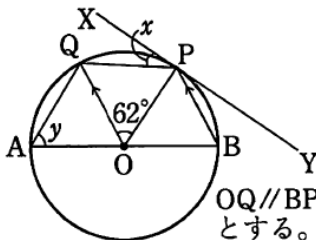
① 9-B-4

次の各図で角 x , y を求めよ。O は円の中心とする。

(1)



(2)



解答

(1) $x=63^\circ$, $y=27^\circ$ (2) $x=31^\circ$, $y=59^\circ$

(1) A と B を結ぶと、 $PA=PB$ より $\angle PBA=63^\circ$

よって、接弦定理により $x=63^\circ$

$\angle BAP=63^\circ$, $\angle BAC=90^\circ$ より、

$$y=180^\circ-63^\circ-90^\circ=27^\circ$$

$$(2) x=\frac{1}{2}\angle POQ=31^\circ$$

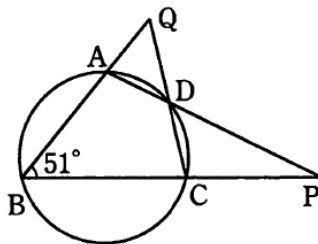
$OQ \parallel BP$ より $\angle OPB=62^\circ$ から、

$$\angle BOP=180^\circ-62^\circ \times 2=56^\circ$$

$$y=\frac{1}{2}\angle QOB=\frac{1}{2}(62^\circ+56^\circ)=59^\circ$$

① 9-B-5

右の図で、四角形 ABCD は円に内接し、 $\angle B=51^\circ$, $\angle Q=2\angle P$ のとき、 $\angle P$ の大きさを求めよ。



解答

26°

$\angle P=x$ とおくと、 $\angle Q=2x$

四角形 ABCD は円に内接するから、

$$\angle B=\angle ADQ=51^\circ$$

$\angle QAD$ は $\triangle ABP$ の外角だから、

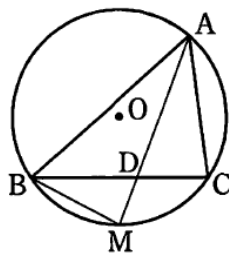
$$\angle QAD=x+51^\circ$$

以上から、 $2x+(x+51^\circ)+51^\circ=180^\circ$

よって、 $x=26^\circ$

①9-B-6

$AB=4.8$, $BC=4$, $CA=3.2$ の $\triangle ABC$ が円 O に内接している。 $\angle A$ の二等分線が BC , $\widehat{BC}$ と交わる点をそれぞれ D , M とする。



- (1) BD の長さを求めよ。
- (2) $AD \cdot DM$ の値を求めよ。

解答 (1) 2.4 (2) 3.84

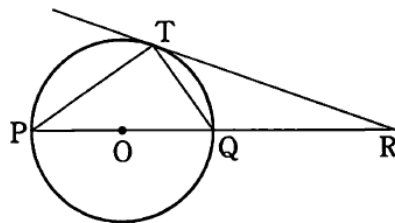
(1) $\angle BAD = \angle CAD$ から
 $AB : AC = BD : CD$

$$\text{これから, } BD = 4 \times \frac{4.8}{4.8 + 3.2} = 2.4$$

$$(2) AD \cdot DM = BD \cdot CD = 2.4 \times (4 - 2.4) = 3.84$$

①9-B-7

円 O の直径 PQ の Q を越えた延長上に PQ に等しく QR をとり, R から円 O に1つの接線を引き, その接点を T とする。
 $PQ=1$ cm として, 次の各問いに答えよ。



- (1) RT の長さを求めよ。
- (2) $PT : QT$ を求めよ。
- (3) PT , QT の長さを求めよ。
- (4) $\triangle PTR$ の面積を求めよ。

解答 (1) $\sqrt{2}$ cm (2) $\sqrt{2} : 1$ (3) $PT = \frac{\sqrt{6}}{3}$ cm, $QT = \frac{\sqrt{3}}{3}$ cm (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm²

$$(1) RT^2 = RQ \cdot RP \text{ より, } RT = \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$(2) \triangle RTQ \sim \triangle RPT \text{ から, } PT : QT = \sqrt{2} : 1$$

$$(3) PT^2 + QT^2 = PQ^2, PT : QT = \sqrt{2} : 1 \text{ よ}$$

$$\text{り, } PT = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ cm, } QT = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$(4) \triangle PTR = 2 \triangle PQT = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$$

①9-B-8

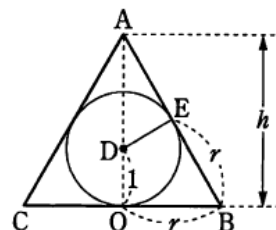
直円錐に半径1の球が内接している。

- (1) 直円錐の高さを h , 底面の半径を r とするとき, r を h で表せ。
- (2) このような直円錐の体積 V の最小値を求めよ。

◎一橋大◎

解答 (1) $r = \sqrt{\frac{h}{h-2}}$, (2) $\frac{8}{3}\pi$

- (1) 右の図より, $AB = \sqrt{h^2 + r^2}$ また, $\triangle ADE \sim \triangle ABO$
 より, $AD : DE = AB : BO$ から, $(h-1) : 1 = \sqrt{h^2 + r^2} : r$
 これより, $\sqrt{h^2 + r^2} = r(h-1)$ 両辺を2乗して,
 $h^2 + r^2 = r^2(h-1)^2$ より, $r = \sqrt{\frac{h}{h-2}}$



(2) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2}$

ここで, $h > 2$ より,

$$\frac{h^2}{h-2} = h + 2 + \frac{4}{h-2}$$

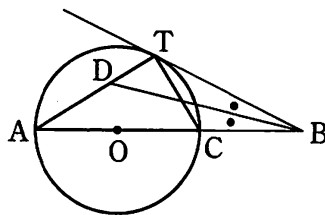
$$= (h-2) + \frac{4}{(h-2)} + 4 \geq 2\sqrt{(h-2) \cdot \frac{4}{(h-2)}} + 4 = 8 \quad (\text{等号は } h=4 \text{ のとき})$$

$\frac{h^2}{h-2}$ の最小値は 8 より, 体積 V の最小値は $\frac{8}{3}\pi$ ($h=4$)

C 問題

①9-C-1

長さ1の線分AB上にA, Bと異なる点Cをとり, 点A, Cを直径の両端とする半径 r の円Oを描く。点Bから円Oへ接線を1本引き, その接点をTとする。∠ABTの二等分線と線分ATとの交点をDとする。



- (1) ∠BDTの大きさを求めよ。
- (2) 線分ATの長さを r で表せ。
- (3) 線分DTの長さを r で表せ。

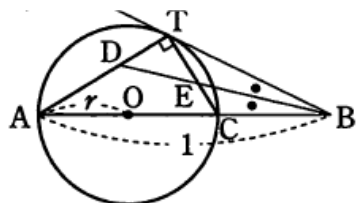
●同志社大●

解答

(1) 45° (2) $\frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1-r}}$ (3) $\frac{\sqrt{1-2r}(1-\sqrt{1-2r})}{\sqrt{2(1-r)}}$

解き方

- (1) TCとBDの交点をEとする。



∠TAB = x

とすると接弦定理により, ∠BTC = x

また, ∠ABD = ∠TBD = y とすると,

△ABDにおいて

∠BDT = ∠DAB + ∠DBA = $x + y$

△TBEにおいて

∠TED = ∠BTE + ∠TBE = $x + y$

よって, ∠BDT = ∠TED

また, ∠DTE = 90° より, ∠BDT = 45°

- (2) 方べきの定理により, $AB \cdot BC = BT^2$ から, $BT^2 = BC = 1 - 2r$

また, △BTC ∽ △BAT から,

$\frac{AT}{CT} = \frac{BT}{BC}$ より,

$AT = \frac{BT \cdot CT}{BC} = \frac{BT \cdot CT}{BT^2} = \frac{CT}{BT}$

$AT = x, CT = y$ とすると, $x = \frac{y}{\sqrt{1-2r}}$

これと $x^2 + y^2 = 4r^2$ から, $x = \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1-r}}$

- (3) ∠ABD = ∠TBD より,

$AD : DT = AB : BT$

$(AT - DT) : DT = 1 : BT$

$$\begin{aligned} DT &= \frac{BT \cdot AT}{1 + BT} = \frac{\sqrt{1-2r}}{1 + \sqrt{1-2r}} \cdot \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1-r}} \\ &= \frac{\sqrt{2}r\sqrt{1-2r}(1-\sqrt{1-2r})}{2r\sqrt{1-r}} \\ &= \frac{\sqrt{1-2r}(1-\sqrt{1-2r})}{\sqrt{2(1-r)}} \end{aligned}$$

①9-C-2

正四面体 T と半径 1 の球面 S とがあって、 T の 6 つの辺がすべて S に接しているという。 T の 1 辺の長さを求めよ。

●東京大●

解答 $2\sqrt{2}$

正四面体の 1 辺を図 1 のように $2x$ とし、その切り口 $\triangle AMD$ を図 2 とする。

図 2 において、 $\triangle MOO'$ の $\triangle MDM'$ より、

$$OO' = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad MO' = \frac{2}{\sqrt{3}x}$$

ここで、 $\triangle MOO'$ に三平方の定理を用いると、

$$\frac{4}{3x^2} + \frac{1}{3} = 1 \text{ より、} x^2 = 2 \quad \text{よって、1 辺の長さは } 2\sqrt{2}$$

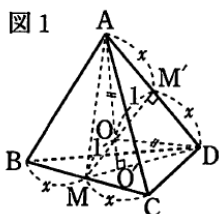


図 1

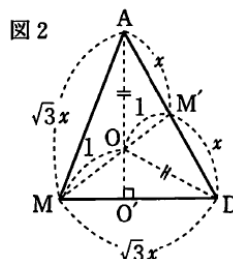


図 2

別解 1

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とし、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$ とする。

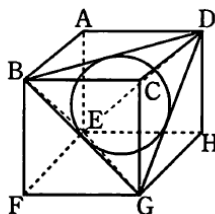
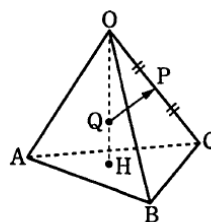
このとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}r^2$, Q を S の中心, P を接点とすると、

$$\vec{OQ} = \frac{3}{4}\vec{OH} = \frac{3}{4} \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \text{ より、}$$

$$\vec{QP} = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{4} \text{ を } |\vec{QP}| = 1 \text{ に代入することにより、} r = 2\sqrt{2}$$

別解 2

半径 1 の球を図のように 1 辺が 2 の立方体に入れる。次に、 $\triangle BGD$ を含む平面で切り取り、さらに $\triangle BDE$, $\triangle BGE$, $\triangle DGE$ を含む平面で順に切っていくと題意を満たす正四面体ができる。よって、この正四面体の 1 辺の長さは BD に等しく、 $2\sqrt{2}$



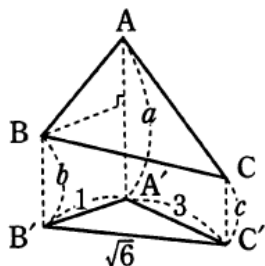
①9-C-3

xyz 空間内に正三角形 ABC があり、 A, B, C から xy 平面に下ろした垂線と xy 平面との交点をそれぞれ A', B', C' とすると、 $A'B' = 1$, $B'C' = \sqrt{6}$, $C'A' = 3$ である。正三角形 ABC の 1 辺の長さを求めよ。

●一橋大●

解答 $\sqrt{10}$

右の図のように、
A の z 座標を a 、
B の z 座標を b 、
C の z 座標を c 、
とする。



$$AB^2 = (a-b)^2 + A'B'^2 \dots\dots ①$$

$$BC^2 = (b-c)^2 + B'C'^2 \dots\dots ②$$

$$CA^2 = (a-c)^2 + C'A'^2 \dots\dots ③$$

ここで、 $a-b=x$ 、 $b-c=y$ とすると、
 $a-c=x+y$

また、 $A'B'=1$ 、 $B'C'=\sqrt{6}$ 、 $C'A'=3$ を①、

②、③に代入して、 $AB^2=x^2+1$ 、 $BC^2=y^2+6$ 、

$$CA^2=(x+y)^2+9$$

ここで、 $\triangle ABC$ は正三角形なので、

$$AB^2=BC^2=CA^2 \text{ から、}$$

$$x^2+1=y^2+6=(x+y)^2+9$$

すなわち、

$$\begin{cases} x^2+1=y^2+6 \dots\dots ④ \\ y^2+6=(x+y)^2+9 \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+1=y^2+6 \dots\dots ④ \\ y^2+6=(x+y)^2+9 \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$④より、x^2-y^2=5 \dots\dots ④'$$

$$⑤より、x^2+2xy=-3 \dots\dots ⑤'$$

④'×3+⑤'×5より、定数項を消して、

$$8x^2+10xy-3y^2=0, \text{ すなわち、}$$

$$(4x-y)(2x+3y)=0, \text{ これから、}$$

(i) $y=4x$ のとき④'に代入して、

$$-15x^2=5 \text{ より不適}$$

(ii) $2x=-3y$ のとき④'に代入して、 $x^2=9$

$$AB^2=x^2+1=10 \text{ から、} AB=\sqrt{10}$$

①9-C-4

半径 r の球面上に4点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは、 $AB=\sqrt{3}$ 、 $AC=AD=BC=BD=CD=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

●東京大●

$$\frac{\sqrt{13}}{3}$$

解答

AB の中点を M、CD の中点を N

とする。このとき、 $AN=BN=\sqrt{3}$ から、

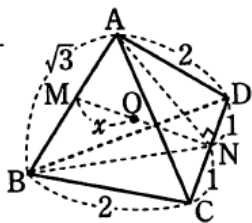
$\triangle ABN$ は1辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形だから、

$$MN=\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

対称性から、中心 O は

MN 上にある。ここで

$OM=x$ とすると、



$$\triangle OAM \text{ において、} OA^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \dots\dots ①$$

$$\triangle ONC \text{ において、} OC^2=\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+1^2 \dots\dots ②$$

OA, OC はいずれも半径 r に等しいから、

$$①、②より、x^2+\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+1$$

$$\text{これを解いて、} x=\frac{5}{6}$$

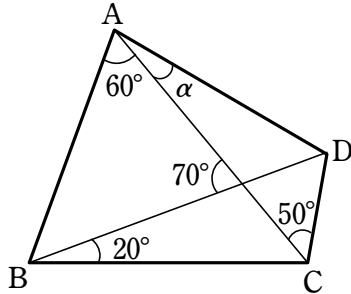
$$\text{これを①に代入して、} OA^2=\frac{13}{9} \quad r=\frac{\sqrt{13}}{3}$$

補充問題

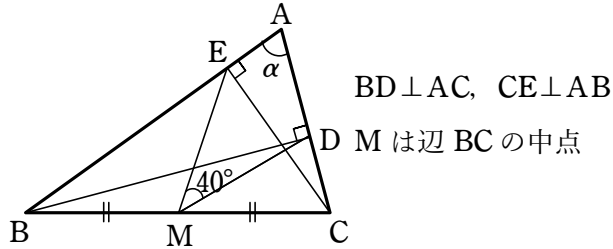
①9-C-5

下の図において、 α を求めよ。

(1)



(2)

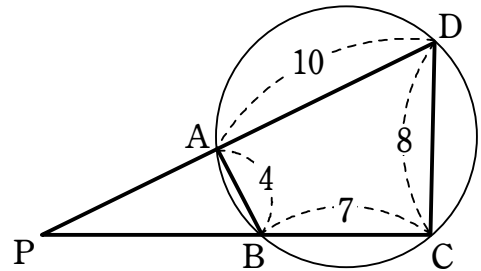


解答 (1) $\alpha = 20^\circ$ (2) $\alpha = 70^\circ$

①9-C-6

右の図のように、円に内接する四角形 ABCD の辺 AD の延長と辺 BC の延長が円の外部の点 P で交わっている。

$AB=4$, $BC=7$, $CD=8$, $DA=10$ のとき、線分 PA, PB の長さを求めよ。



解答 $PA=8$, $PB=9$

四角形 ABCD は円に内接するから $\angle PAB = \angle PCD$

また、 $\angle P$ は共通であるから $\angle APB = \angle CPD$

よって $\triangle PAB \sim \triangle PCD$

$PA=x$, $PB=y$ とすると、 $PA:PC=AB:CD$ であるから

$$x:(y+7)=4:8 \quad \text{よって} \quad 8x=4(y+7) \quad \cdots \cdots \text{①}$$

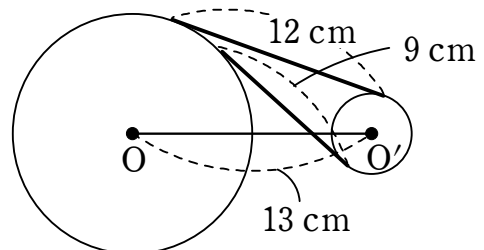
また、 $PB:PD=AB:CD$ であるから

$$y:(x+10)=4:8 \quad \text{よって} \quad 8y=4(x+10) \quad \cdots \cdots \text{②}$$

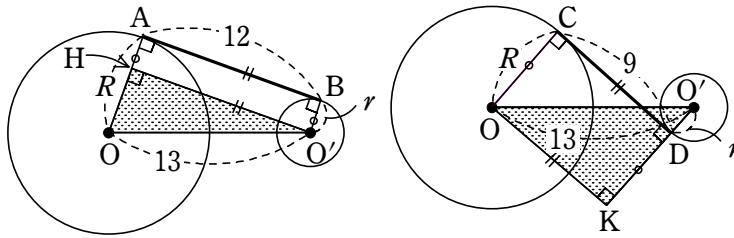
①, ② を解くと $x=8$, $y=9$ よって $PA=8$, $PB=9$

①9-C-7

右の図のように、中心間の距離が 13 cm, 共通外接線の長さが 12 cm, 共通内接線の長さが 9 cm である 2 つの円 O, O' がある。
この 2 つの円の半径を、それぞれ求めよ。



解答 $\left(\sqrt{22} + \frac{5}{2}\right) \text{ cm}, \left(\sqrt{22} - \frac{5}{2}\right) \text{ cm}$



円 O の半径を $R \text{ cm}$, 円 O' の半径を $r \text{ cm}$ ($R > r$) とする。

円 O, O' と共通外接線との接点を, それぞれ A, B とする。

O' から OA に引いた垂線を $O'H$ とすると,

$$\triangle OO'H \text{ において, } \angle H = 90^\circ \text{ であるから } OH^2 + HO'^2 = OO'^2$$

$$\text{すなわち } (R - r)^2 + 12^2 = 13^2 \quad \text{よって, } R - r = 5 \quad \dots\dots ①$$

円 O, O' と共通内接線との接点を, それぞれ C, D とする。

O から $O'D$ の延長に引いた垂線を OK とすると,

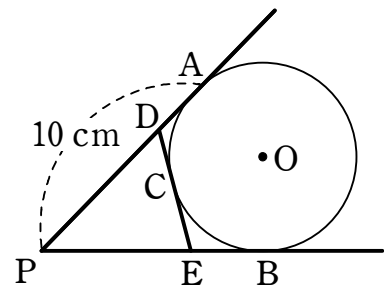
$$\angle C = \angle D = 90^\circ \text{ であるから } OK^2 + KO'^2 = OO'^2$$

$$\text{すなわち } 9^2 + (R + r)^2 = 13^2 \quad \text{よって, } R + r = 2\sqrt{22} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{連立して, } R = \sqrt{22} + \frac{5}{2} \text{ (cm), } r = \sqrt{22} - \frac{5}{2} \text{ (cm)}$$

① **9-C-8**

右の図において, PA, PB, DE はそれぞれ A, B, C を接点とする円 O の接線である。AP = 10 cm のとき, $\triangle DPE$ の周囲の長さを求めよ。



解答 20 cm

$\triangle DPE$ の周囲の長さを s とすると

$$s = PD + PE + DE$$

$$= PD + PE + DC + EC$$

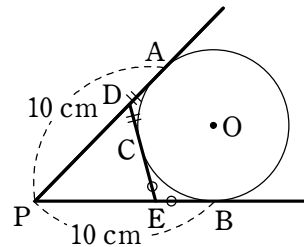
$DC = DA, EC = EB$ であるから

$$s = PD + PE + DA + EB$$

$$= (PD + DA) + (PE + EB)$$

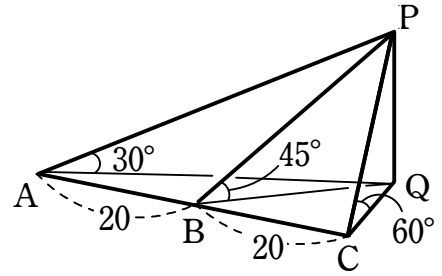
$$= PA + PB$$

$$PB = PA = 10 \text{ (cm)} \text{ であるから } s = 10 + 10 = 20 \text{ (cm)}$$



①9-C-9

右の図のように、一直線上に並んだ3地点 A, B, C から塔 PQ の仰角を測ると、それぞれ 30° , 45° , 60° であった。また、 $AB=20$ m, $BC=20$ m であった。
塔 PQ の高さを求めよ。



解答 $10\sqrt{6}$ m

$$PQ = x \text{ (m)} \text{ とすると } AQ = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x, \quad BQ = \frac{x}{\tan 45^\circ} = x$$

$$, \quad CQ = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\angle ABQ = \theta \text{ とすると } \angle CBQ = 180^\circ - \theta$$

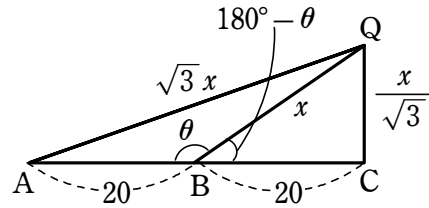
$\triangle ABQ$ で余弦定理により

$$(\sqrt{3}x)^2 = 20^2 + x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x \cos \theta \quad x^2 + 20x \cos \theta - 200 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle CBQ$ で余弦定理により

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 20^2 + x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x \cos(180^\circ - \theta) \quad x^2 + 60x \cos \theta + 600 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{よって, } x = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}, \quad \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{6}} \quad \text{したがって} \quad PQ = 10\sqrt{6} \text{ (m)}$$



第10章 二項定理

《学習項目》

- ・ P, C の定義, 性質
- ・ 二項定理, 多項定理

A 問題

①10-A-1

次の等式を証明せよ。

$$(1) {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$$

$$(2) k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$$

$$\begin{aligned} (1) {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot \{(n-1)-(r-1)\}!} + \frac{(n-1)!}{r! \cdot \{(n-1)-r\}!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r! \cdot (n-r-1)!} = \frac{r \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} + \frac{(n-r) \cdot (n-1)!}{r! \cdot (n-r)!} \\ &\quad \leftarrow (n-r)! = (n-r) \times (n-r-1)! \quad , \quad r! = r \times (r-1)! \\ &= \frac{(n-1)! \cdot \{r + (n-r)\}}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = {}_nC_r \blacksquare \end{aligned}$$

(類題) $r \cdot {}_{n-1}P_{r-1} + {}_{n-1}P_r = {}_nP_r$ を証明せよ。

(2)

①10-A-2

$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^5$ の展開式において, x^4 の係数を求めよ。

解答 720

一般項は,

$$\begin{aligned} {}_5C_k (2x^2)^k \left(\frac{-3}{x}\right)^{5-k} &= {}_5C_k \cdot 2^k \cdot (-3)^{5-k} \cdot x^{2k} \left(\frac{1}{x}\right)^{5-k} \\ &= {}_5C_k \cdot 2^k \cdot (-3)^{5-k} \cdot x^{2k} x^{k-5} \\ &= {}_5C_k \cdot 2^k \cdot (-3)^{5-k} \cdot x^{3k-5} \end{aligned}$$

$3k-5=4$ より, $k=3$ から求める係数は,

$${}_5C_3 2^3 (-3)^2 = 720$$

①10-A-3

(1) $(a+2b-c)^6$ の展開式において, $a^2b^2c^2$ の係数を求めよ。

(2) $\left(x^3 - 2x + \frac{2}{x}\right)^5$ の展開式において, x^3 の係数を求めよ。

解答 (1) 360 (2) 720

$$(1) \frac{6!}{2!2!2!} a^2 \cdot (2b)^2 \cdot (-c)^2$$

$$= \frac{6!2^2}{2!2!2!} a^2 b^2 c^2 = 360 a^2 b^2 c^2$$

(3) 一般項は,

$$\frac{5!}{p!q!r!} (x^3)^p \cdot (-2x)^q \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^r$$

$$= \frac{5! \cdot (-2)^q \cdot 2^r}{p!q!r!} x^{3p+q-r}$$

これより, $3p+q-r=3$ ……①

また, $p+q+r=5$ ……②

①+②より, $4p+2q=8$ から $2p+q=4$

これから,

$(p, q, r) = (0, 4, 1), (1, 2, 2),$

$(2, 0, 3)$ これより, x^3 の係数は

$$\frac{5! \cdot (-2)^4 \cdot 2^1}{4!} + \frac{5! \cdot (-2)^2 \cdot 2^2}{2!2!} + \frac{5! \cdot 2^3}{2!3!}$$

$$= 160 + 480 + 80 = 720$$

①10-A-4

次の式を簡単にせよ。

$$(1) {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$$

$$(2) {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n$$

解答 (1) 2^n (2) 0

二項定理より

$$(x+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \cdots + {}_nC_{n-1} x^{n-1} + {}_nC_n x^n \cdots (*)$$

(*) に $x=1$ を代入して

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = (1+1)^n = 2^n \quad \cdots(1) \text{の答}$$

(*) に $x=-1$ を代入して

$${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^{n-1} {}_nC_{n-1} + (-1)^n {}_nC_n = (-1+1)^n = 0 \quad \cdots(2) \text{の答}$$

B 問題

①10-B-1

次の式を簡単にせよ。

$$(1) {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}$$

$$(2) {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}$$

解答 (1) 2^{2n-1} (2) 2^{2n-1}

二項定理より $(x+1)^{2n} = {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 x + {}_{2n}C_2 x^2 + {}_{2n}C_3 x^3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} x^{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} x^{2n} \cdots (*)$

(*) に $x=1$ を代入して

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_3 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \quad \cdots①$$

(*) に $x=-1$ を代入して

$${}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 - {}_{2n}C_3 + \cdots - {}_{2n}C_{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} = (-1+1)^{2n} = 0 \quad \cdots②$$

(1) ${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}$ を求める [偶数のみ]

$$\{\textcircled{1} + \textcircled{2}\} \times \frac{1}{2} \quad \text{より [奇数を消去]}$$

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = \frac{1}{2} \times (2^{2n} + 0) = \frac{1}{2} \times 2^{2n} = 2^{2n-1} \cdots (\text{答})$$

(2) ${}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}$ を求める [奇数のみ]

$$\{\textcircled{1} - \textcircled{2}\} \times \frac{1}{2} \quad \text{より [偶数を消去]}$$

$${}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} = \frac{1}{2} \times (2^{2n} - 0) = \frac{1}{2} \times 2^{2n} = 2^{2n-1} \cdots (\text{答})$$

① **10-B-2**

次の式を簡単にせよ。

$$(1) 1 \cdot {}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n \cdot {}_nC_n$$

$$(2) \frac{{}_nC_0}{1} + \frac{{}_nC_1}{2} + \frac{{}_nC_2}{3} + \cdots + \frac{{}_nC_n}{n+1}$$

解答 (1) $n \cdot 2^{n-1}$ (2) $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

二項定理より $(x+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + {}_nC_3 x^3 + \cdots + {}_nC_n x^n \cdots (*)$

(1) $(*)$ の両辺を x で微分して,

$$n \cdot (x+1)^{n-1} = 0 + {}_nC_1 \cdot 1 + {}_nC_2 \cdot 2x + {}_nC_3 \cdot 3x^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot n x^{n-1}$$

$x=1$ を代入して,

$$n \cdot (1+1)^{n-1} = 0 + {}_nC_1 \cdot 1 + {}_nC_2 \cdot 2 \cdot 1 + {}_nC_3 \cdot 3 \cdot 1^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot n \cdot 1^{n-1}$$

$$\therefore 1 \cdot {}_nC_1 + 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot {}_nC_3 + \cdots + n \cdot {}_nC_n = \underline{n \cdot 2^{n-1}}$$

(2) $(*)$ の両辺を $x=0$ から $x=1$ で定積分して,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (x+1)^n dx \\ &= {}_nC_0 \int_0^1 dx + {}_nC_1 \int_0^1 x dx + {}_nC_2 \int_0^1 x^2 dx + {}_nC_3 \int_0^1 x^3 dx + \cdots + {}_nC_n \int_0^1 x^n dx \\ & \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = {}_nC_0 \left[\frac{x^1}{1} \right]_0^1 + {}_nC_1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + {}_nC_2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + {}_nC_3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \cdots + {}_nC_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ & \frac{2^{n+1} - 1^{n+1}}{n+1} = {}_nC_0 \cdot \frac{1}{1} + {}_nC_1 \cdot \frac{1}{2} + {}_nC_2 \cdot \frac{1}{3} + {}_nC_3 \cdot \frac{1}{4} + \cdots + {}_nC_n \cdot \frac{1}{n+1} \\ & \therefore \frac{{}_nC_0}{1} + \frac{{}_nC_1}{2} + \frac{{}_nC_2}{3} + \cdots + \frac{{}_nC_n}{n+1} = \underline{\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}} \end{aligned}$$

① **10-B-3**

C 問題

①10-C-1

(1) $\sum_{r=0}^n {}_nC_r \left(\frac{1}{3}\right)^r$ を求めよ。

(2) $(1+x)^{2n}$ を展開したときの x^n の係数に着目して次の等式を証明せよ。
 ${}_nC_0^2 + {}_nC_1^2 + {}_nC_2^2 + \cdots + {}_nC_n^2 = {}_{2n}C_n$

解答 (1) $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ (2) 下参照

(1) $\sum_{r=0}^n {}_nC_r \left(\frac{1}{3}\right)^r = \sum_{r=0}^n {}_nC_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \cdot 1^{n-r} = \left(\frac{1}{3} + 1\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

(2) $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ であり、

また、 $(1+x)^{2n} = \{(1+x)^n\}^2$ と考えると、

$(1+x)^{2n} = ({}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n)^2$

左辺の $(1+x)^{2n}$ の x^n の係数は ${}_{2n}C_n$ ……①

右辺における x^n の係数は、

${}_nC_0 \cdot {}_nC_n + {}_nC_1 \cdot {}_nC_{n-1} + {}_nC_2 \cdot {}_nC_{n-2} + \cdots + {}_nC_n \cdot {}_nC_0$ ……②

ここで、 ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ より②は、

${}_nC_0^2 + {}_nC_1^2 + {}_nC_2^2 + \cdots + {}_nC_n^2$ となる。
 ……③

①, ③から等式は成立する。

