みんなの数学 ヨコプリ

談話室マロニエ

数と式 ①

展開公式

（1） $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

（2） $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

（3） $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

（4） $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

（5） $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

（6） $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

（7） $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

因数分解公式

展開公式を，右辺から左辺へ見る

《追加》$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

例題 1 $6x^2-x-2$ を因数分解せよ。

(Step1)　$6x^2-x-2=(3x-\quad)(2x-\quad)$

または，$6x^2-x-2=(6x-\quad)(x-\quad)$　が候補

(Step2)　1 次の係数が一致するように，定数項を振り分ける。

例題 2 $3x^2-7xy+2y^2$ を因数分解せよ。

$3x^2-7xy+2y^2=(3x\quad y)(x\quad y)$

《因数分解のしかた》

(STEP1) まず（あれば）共通因数でくくる。

(STEP2)（文字数が多ければ）次数の低い文字で整理する。

(STEP3)（必要なら）文字の置き換え。

(STEP4) 因数分解公式を用いる。

(STEP5) 最後に，これ以上因数分解できないかチェックする。

例題3 次の式を因数分解せよ。

（１） $2x^2+3x+1$

（２） $2x^2+9x-5$

（３） $8a^2-50b^2$

（４） $3x^3-6x^2-45x$

（５） $3x^2-2y^2-5xy+x+5y-2$

（６） $x^2y+y^2z-zx^2-y^3$

例題4 次の式を因数分解せよ。

（１） x^4+8x^2-48

（２） $x(x+1)(x+2)(x+3)-8$

例題5 次の式を因数分解せよ。

（１） x^4+x^2+1

（２） x^4+3x^2+4

方程式・不等式

2 次方程式の解の公式

x の 2 次方程式

(**1**) $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(**2**) $ax^2+2Bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

2 次方程式の解法まず因数分解 ⇒ ダメなら解の公式

[解の公式の導出] = (　　　　　　　) の利用

$ax^2+bx+c=0$ より

不等式

(**1**)正の数をかける・わる ⇒ 不等号の向きは（そのまま）

例 $\dfrac{x}{3}<2 \longleftarrow 3$ をかけると

$x<6$

(**2**)負の数をかける・わる ⇒ 不等号の向きは（逆向き）

例 $-2x<8 \longleftarrow -2$ でわると

$x>-4$

(**3**)逆数をとるとき …… 同符号か異符号かに注意

両方正のとき	両辺負のとき	両辺異符号のとき
$5<24$	$-5>-24$	$-5<24$
$\dfrac{1}{5}>\dfrac{1}{24}$	$-\dfrac{1}{5}<-\dfrac{1}{24}$	$-\dfrac{1}{5}<-\dfrac{1}{24}$
逆向き	逆向き	そのまま

例題 6　次の 2 次方程式を解け。

（1） $x^2-x-2=0$　　（2） $x^2-6x+9=0$

（3） $2x^2+5x+1=0$　　（4） $x^2+2x-5=0$

（5） $x^2-x+1=0$　　（6） $6x^2-13x+6=0$

例題 7　次の不等式を解け。

（1） $3x-1 \leqq x-5$　　（2） $x-3<4x+3$

絶対値

$$|A|=\begin{cases} A & (A \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -A & (A<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 8 次の方程式を解け。

（1） $|x-3|=3$　　（2） $|5-2x|=1$

例題 9 次の不等式を解け。

（1） $|x+4|<3$　　（2） $|2x-1| \geqq 2$

例題 10 次の方程式を解け。

$3|x+2|=2-x$

数と式 ②

比例式

$\dfrac{●}{○}=\dfrac{▲}{△}=\dfrac{■}{□}=k$ とおく

例題 11 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}\neq 0$ のとき，$\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ の値を求めよ。

二重根号

（1） $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

（2） $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ （ただし $a>b$ とする）

【証明】

例題 12 次の式を簡単にせよ。

（1） $\sqrt{5-\sqrt{24}}$　　（2） $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

除法の原理（わりざんの原理

$F\div P=Q$ あまり R

$\Longrightarrow F=P\times Q+R$

ただし（P の次数）$>$（R の次数）

【注】因数定理

$f(x)$ が $(x-\alpha)$ を因数にもつ つまり $(x-\alpha)$ で割り切れる。

$\Longleftrightarrow f(x)=(x-\alpha)\times$□と表せる

$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0$

例題 13 （1） 多項式 $f(x)$ を $x-1$ でわると，商が x^2+2x+1，余りが 2 であった。多項式 $f(x)$ を求めよ。

（2） 3 次式 x^3+2x^2+k が $x-1$ でわりきれるとき，定数 k の値を求めよ。

例題 14

x の整式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると 2 あまり，$x-3$ で割ると 4 あまる。

このとき，$f(x)$ を $(x-1)(x-3)$ で割ったときのあまりを求めよ。

対称式

2 文字の対称式（文字を入れ替えても変わらない式）$\Longrightarrow$ 和と積で表せる。

例　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

解と係数の関係（2 次）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 解が $x=\alpha,\ \beta$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

【証明】

例題 15

2 次方程式 $3x^2+2x-4=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とする。このとき，次の式の値を求めよ。

（1）$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$　（2）$\alpha^2+\beta^2$　（3）$\alpha^3+\beta^3$

解と係数の関係（3 次）

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解が $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

【証明】

例題 16　3 次方程式 $x^3+x^2-2x+3=0$ の 3 つの解を $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の式の値を求めよ。

（1）$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \alpha\beta\gamma$

（2）$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　（3）$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$（解法 2 つ）

集合・論理

集合：ものの集まりのこと

【記号・記法の例】奇数の自然数全体の集合を A とする。

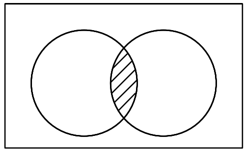
$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ \cdots\}$

$A=\{2n-1 | n$ は自然数 $\}$ などと表す。

x が集合 A の要素（元）のとき，$x \in A$ と表す。

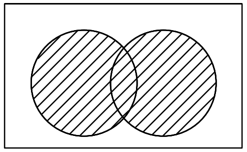
ベン図　A，B を集合とする。

共通部分



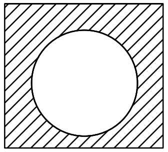
【記号】$A \cap B$
A かつ B

和集合



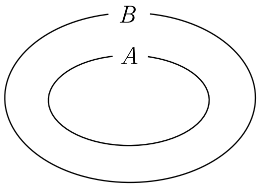
【記号】$A \cup B$
A または B

補集合



【記号】$\overline{A}$
A でない

包含関係



【記号】$A \subset B$
A は B に含まれる
$\Leftrightarrow x \in A$ ならば必ず $x \in B$

ド・モルガンの法則

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

命題：$A \xrightarrow{\text{ならば}} B$　に対し，

逆：$B \xrightarrow{\text{ならば}} A$

裏：$\overline{A} \xrightarrow{\text{ならば}} \overline{B}$

対偶：$\overline{B} \xrightarrow{\text{ならば}} \overline{A}$

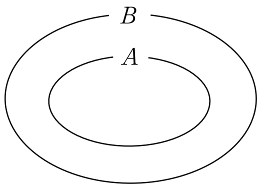
逆・裏・対偶の性質

逆と裏の真偽は一致する。

元の命題と対偶の真偽は一致する。

必要条件・十分条件

条件 a，b を満たす集合を A，B とする。



$A \subset B$ のとき，

$a \xrightarrow{\text{ならば}} b$ は真である。

このとき，

条件 a は条件 b であるための十分条件，

条件 b は条件 a であるための必要条件。

条件の否定　$\overline{p}$，$\overline{q}$：それぞれ条件 p，q の否定 とする

（ｉ）p かつ q の否定は，$\overline{p}$ または $\overline{q}$

（ii）p または q の否定は，$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$

（iii）「すべての x に対して p である」の否定は，「ある x に対して $\overline{p}$ である」

（iv）「ある x に対して p である」の否定は，「すべての x に対して $\overline{p}$ である」

例題 17 $U=\{n \mid 1 \leqq n \leqq 9,\ n$ は自然数 $\}$ を全体集合とする。
$A \cap B=\{3, 7\}$,　$A \cup B=\{2, 3, 6, 7, 9\}$, $\bar{A} \cap B=\{9\}$
であるとき，A, $\bar{B}$, $\bar{A} \cup B$ を求めよ。

例題 18 $\mathrm{A}=\{x \mid -2 \leqq x \leqq 3\}$, $\mathrm{B}=\{x \mid k-6 \leqq x \leqq k\}$ (k は定数) とするとき，$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ となる k の値の範囲を求めよ。

例題 19 $\mathrm{U}=\{x \mid x$ は自然数，$x \leqq 6\}$ を全体集合，
$\mathrm{A}=\{x \mid x \in \mathrm{U},\ x$ は偶数 $\}$, $\mathrm{B}=\{x \mid x \in \mathrm{U},\ x \leqq 3\}$
とするとき，集合 $\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$ を要素を書き並べることで表せ.

例題 20 次の $\boxed{\quad * \quad}$ に入れるのに最も適するものを下の ①〜④ から選べ。
(1) 四角形が正方形であることは，四角形が長方形であるための，$\boxed{\quad ア \quad}$
(2) $x+y>0$ は，$x>0$ または $y>0$ であるための $\boxed{\quad イ \quad}$。
(3) $x \geqq 0$ は，$\sqrt{x^2}=x$ であるための $\boxed{\quad ウ \quad}$。
① 必要条件であるが十分条件でない　② 十分条件であるが必要条件でない
③ 必要十分条件である　④ 必要条件でも十分条件でもない

二次関数

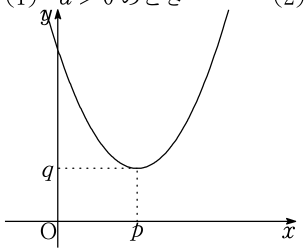
$y=ax^2+bx+c$ で表される関数を x の二次関数という。ただし，a，b，c は定数とする。

平方完成：$(\quad)^2$ をつくること

$$
\begin{aligned}
&x^2+2mx\\
=&x^2+2mx+m^2-m^2\\
=&(x-m)^2-m^2
\end{aligned}
$$

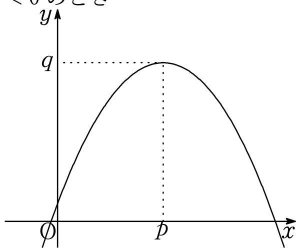
二次関数のグラフ $y=a(x-p)^2+q$

(1)　$a>0$ のとき



$\bigcup$形，頂点 $(p,\ q)$

(2)　$a<0$ のとき



$\bigcap$形，頂点 $(p,\ q)$

2 次関数の最大・最小

平方完成してグラフの y 座標に着目

例題 21 平方完成せよ

(1) $y=x^2-4x+9$

(2) $y=2x^2-4x+1$

(3) $y=-x^2-2x+1$

例題 22 最大値または最小値を求めよ。

(1) $y=x^2+2x+3$ の最小値

(2) $y=-x^2+4x-1$ の最大値

(3) $y=3x^2-6x+2$ の最小値

(4) $y=-2x^2+3x+5$ の最大値

二次方程式

2 次方程式の解の公式（再掲）

x の 2 次方程式

(1) x の $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(2) x の $ax^2+2Bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

※解の公式の「ルートの中身」だけ取り出すと・・・

2 次方程式の判別式

(1) x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に対して，

$D=b^2-4ac$ を判別式という。

(2) x の 2 次方程式 $ax^2+2Bx+c=0$ に対して，

$D'=D/4=B^2-ac$ を判別式という。

$$\begin{cases} D>0 & \text{のとき，異なる 2 つの実数解} \\ D=0 & \text{のとき，重解（1 つの実数解）} \\ D<0 & \text{のとき，実数解なし＝虚数解} \end{cases}$$

例題 23　2 次方程式 $2x^2+3x+a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつための a の条件を求めよ。

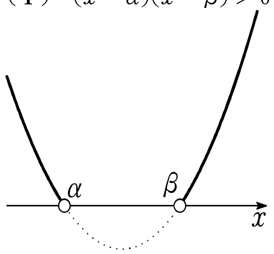
例題 24　2 次方程式 $x^2-ax-2a=0$ が $-1<x<1$ を満たす範囲に異なる 2 つの実数解をもつための a の条件を求めよ。

二次不等式

2 次不等式は，$ax^2 + bx + c > 0$ などの形で表される。ただし，a，b，c は定数とする。

2 次不等式の解き方 → グラフの上下関係を利用

（**1**） $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$

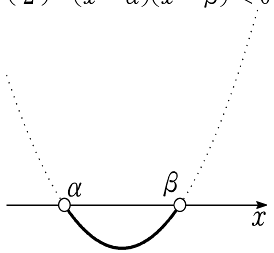


$y = (x-\alpha)(x-\beta)$ の

x 軸より上の部分に対応する x

$$x < \alpha,\ \beta < x$$

（**2**） $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$



$y = (x-\alpha)(x-\beta)$ の

x 軸より下の部分に対応する x

$$\alpha < x < \beta$$

不等式

不等式は，グラフの上下関係に持ち込む。

例題 25

（1） $(x-1)(x-2) > 0$

（2） $(x-1)(x-2) \leqq 0$

（3） $x^2 - x - 6 \geqq 0$

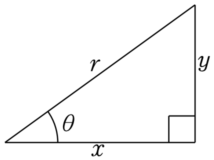
（4） $x^2 - 4x - 12 < 0$

〜〜〜MEMO〜〜〜

〜〜〜MEMO〜〜〜

三角比①

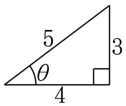
三角比（0° から 90° まで）



図の直角三角形において角 θ に対して

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

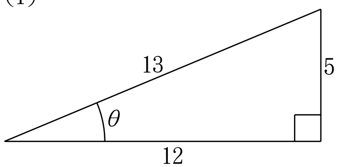
例



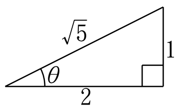
$\sin\theta = \frac{3}{5}$
$\cos\theta = \frac{4}{5}$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$

例題 26 次の各図の角 θ に対して，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を求めよ。

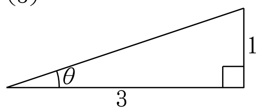
(1)



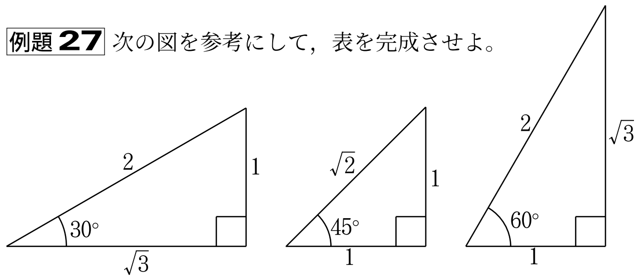
(2)



(3)



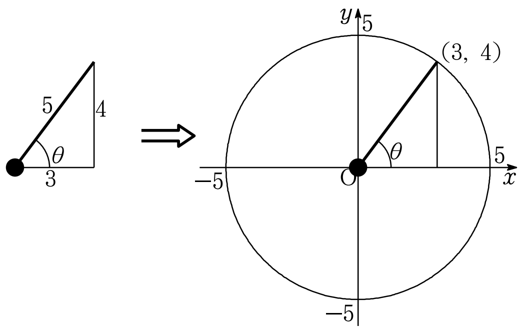
例題 27 次の図を参考にして，表を完成させよ。



$\sin 30^\circ =$	$\cos 30^\circ =$	$\tan 30^\circ =$
$\sin 45^\circ =$	$\cos 45^\circ =$	$\tan 45^\circ =$
$\sin 60^\circ =$	$\cos 60^\circ =$	$\tan 60^\circ =$

【一般化】90° を超えたら？

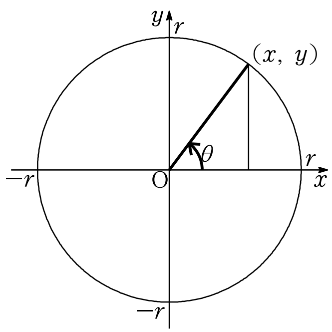
⇐ 解決法：円の中に入れて・・・，座標として捉える。



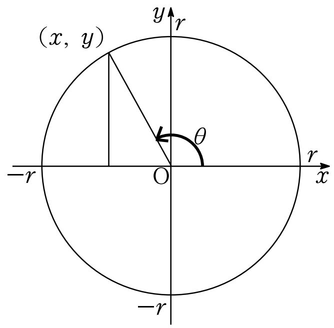
三角関数の定義

角 θ に対して

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



（合言葉）時計の針が３時の向きから逆回転

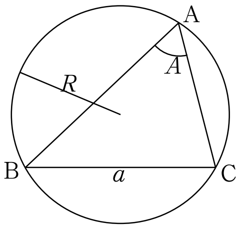


例題 28 次の図を参考にして，表を完成させよ。

$\sin 120^\circ =$	$\cos 120^\circ =$	$\tan 120^\circ =$
$\sin 135^\circ =$	$\cos 135^\circ =$	$\tan 135^\circ =$
$\sin 150^\circ =$	$\cos 150^\circ =$	$\tan 150^\circ =$

三角比②

正弦定理



図の △ABC で，$a = \mathrm{AB}$，$A = \angle\mathrm{BAC}$

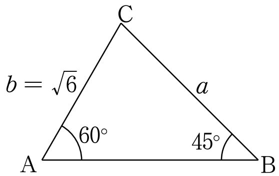
R:△ABC の外接円半径，とする。

このとき，

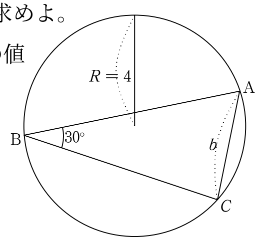
$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

例題 29 各図において，指定された値を求めよ。

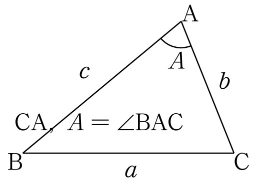
(1) a の値



(2) b の値



余弦定理

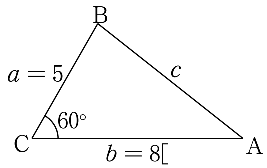


図の △ABC で，$a = \mathrm{AB}$，$b = \mathrm{BC}$，$c = \mathrm{CA}$，$A = \angle\mathrm{BAC}$ とする。このとき，

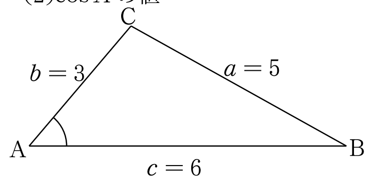
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

例題 30 各図において，指定された値を求めよ。

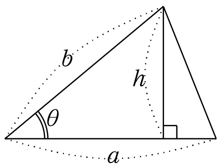
(1) c の値



(2)$\cos A$ の値



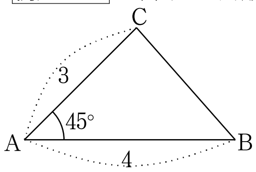
三角形の面積公式



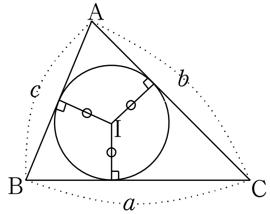
左図の三角形の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

例題 31　下図の三角形 ABC の面積を求めよ。



内接円半径公式



内心 I ＝内接円の中心

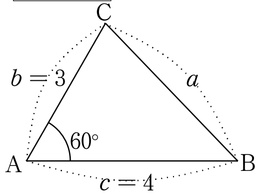
＝内角の二等分線の交点

三角形の面積を S とし，

内接円の半径を r とすると，

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

例題 32



(1)　△ABC の面積 S を求めよ。

(2)　a を求めよ。

(3)　△ABC の内接円半径 r を求めよ。

データの分析①

代表値

変量 x についての n 個のデータ x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n があるとき，

（1）平均値 mean $\overline{x} = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$

（2）中央値 median　データを大きさの順に並べたとき，この中央にくる値。

データの数が偶数のときは，その中央にくる 2 つの値の平均値。

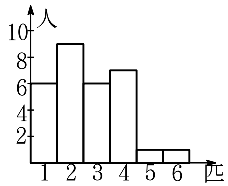
（3）最頻値 mode　度数分布表に整理したときに，度数が最も大きい階級値。

例題 33　ヒストグラム

右のヒストグラムは，とある「犬好きサークル」のメンバー 30 人について，飼っている動物の匹数を調べた結果である。

(1)　匹数の最頻値と中央値を求めよ。

(2)　匹数の平均値を求めよ。



例題 34　度数分布表

右の表は，鳥取市の 2020 年 4 月における最低気温を 30 日間測定した結果の度数分布表である。

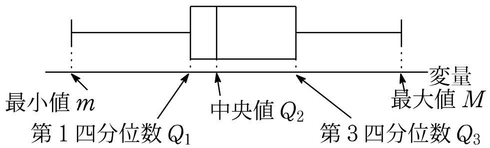
(1) データの最頻値を階級値で答えよ。

(2) この表から階級値を用いてデータの平均値を求めよ。

(3) 階級値を用いないで平均値を求めると，データの平均値はどのような値の範囲に入るか。「〜以上〜未満」という形で答えよ。

階級（℃）	度数
2 以上 4 未満	4
4〜6	9
6〜8	10
8〜10	4
10〜12	2
12〜14	1

箱ひげ図



範囲＝(最大値)−(最小値)

第 1 四分位数 Q_1 ＝下位データの中央値

第 2 四分位数 Q_2 ＝中央値

第 3 四分位数 Q_3 ＝上位データの中央値

四分位範囲＝ $Q_3 - Q_1$，四分位偏差 $\dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

例題 35

定数 a，b，c，d，e，f，g，h，i，j，k が $a < b < c < d < e < f < g < h < i < j < k$ を満たしているとき，次の各データに対して，第 1 四分位数 Q_1，中央値 Q_2，第 3 四分位数 Q_3 をそれぞれ求めよ。

(1) a，b，c，d，e，f，g，h

(2) a，b，c，d，e，f，g，h，i

(3) a，b，c，d，e，f，g，h，i，j

(4) a，b，c，d，e，f，g，h，i，j，k

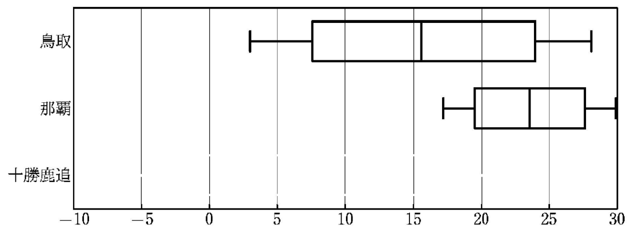
例題 36　箱ひげ図

次のデータは，2022 年における，ある市町村（十勝鹿追町）での月ごとの平均気温を気温の低い順に並べたものである。(単位は℃)

-6.7，-5，0，-3.8，0.4，4.5，7.8，10.2，12.7，15.2，17.3，19.8，20.7

このデータの箱ひげ図を，同年の鳥取市と那覇市のデータの箱ひげ図と並べてかけ。

（気象庁の HP から引用）



データの分析②

分散と標準偏差

変量 x についての n 個のデータ x_1，x_2，x_3，……，x_n に対し，
平均値を $\overline{x}$ とするとき，

$\boxed{\text{偏差}}$ 平均と各データとの差 つまり $x_k-\overline{x}$ のこと

$\boxed{\text{分散}}$ $s^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$

分散＝偏差の２乗の平均

$s^2=\dfrac{1}{n}({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots\cdots+{x_n}^2)-(\overline{x})^2$ とも表せる。

分散＝（２乗の平均）－（平均の２乗）

$\boxed{\text{標準偏差}}$ $s=\sqrt{\textbf{分散}}$

例題 37　次のデータは，6 人の生徒がハンドボール投げを実施したときの記録である。

26，33，29，33，26，27

このデータの平均，分散，標準偏差をそれぞれ求めよ。

相関係数とその性質

$\boxed{\text{散布図}}$　各データの 2 つの変量 x，y を座標平面上の点 $(x,\ y)$ に対応させた図。つまり，n 個のデータの組 $(x_1,\ y_1)$，$(x_n,\ y_n)$，……$(x_n,\ y_n)$ を図示したもの

$\boxed{\text{共分散}}$　$c_{xy}=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$

x，y の標準偏差をそれぞれ s_x，s_y とするとき，

$\boxed{\text{相関係数}}$　$r=\dfrac{c_{xy}}{s_x\cdot s_y}$

$\boxed{\text{相関係数の性質}}$　$-1\leqq r\leqq 1$

r が 1 に近いほど強い**正の相関**があり，-1 に近いほど**負の相関**がある，と表現する。

例題 38　次の図 1，図 2，図 3 は，ある 2 つの変量 x，y のデータについての散布図である。それぞれの相関係数を計算した後に，図と相関係数の対応がわからなくなってしまった。計算した値は 0.87，0.04，-0.71 であることはわかっている。図 1，図 2，図 3 の相関係数をそれぞれ答えよ。

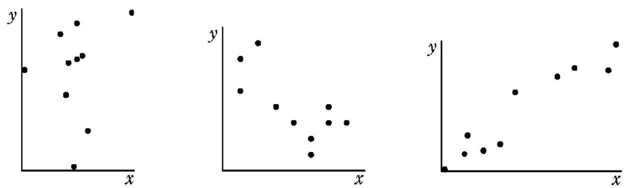


図 1　図 2　図 3

例題 39

次の表は，2 つの変量 x, y についてのデータである。

番号	1	2	3	4	5
x	27	30	28	26	29
y	30	26	32	34	28

このとき，x と y の相関係数を求めよ。

〜〜〜MEMO〜〜〜

場合の数・確率①

積の法則・和の法則

流れ作業 ⇒ かけ算

場合分け ⇒ たし算

例題40 ○○先生は，それぞれ色の異なるTシャツを5枚，Gパンを3本しか持っていない。ここから服装を選ぶ選び方は何通りあるか。

例題41 ○○先生のご伴侶は，○○先生からそれぞれ色の異なるTシャツを5枚，Gパンを3本，スカートを4枚しか買ってもらっていない。この買ってもらったものから服装を選ぶ選び方は何通りあるか。ただし，Gパンとスカートの重ね着はしないものとする。

【記号】自然数nに対して，$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times3\times2\times1$

(nの階乗)

順列（並べ方）1

異なるn個のものを一列に並べる並べ方は，$n!$通りある。

例題42 1，2，3，4，5，6の6つの数字で6桁の数を作る。全部で何通りあるか。

例題43 1，2，3，4，5，6の6つの数字で6桁の数を作る。2と4が隣り合うような作り方は何通りあるか。

順列 2

区別のできない同じものを一列に並べるときはその個数の階乗でわりざん

例題 44　S，C，H，O，O，L の 6 文字を一列に並べる並べ方は何通りあるか。

例題 45　S，C，H，O，O，L の 6 文字を一列に並べるとき，O が隣り合う並べ方は何通りあるか。

「〜〜であるとき」を直接数えるのが面倒（場合分け多い，など）なとき，
全体から「〜〜でないとき」をひきざん

例題 46　S，C，H，O，O，L の 6 文字を一列に並べるとき，O が隣り合わない並べ方は何通りあるか。（別解あり）

円順列

異なる n 個のものを円形に並べる並べ方は $(n-1)!$ 通りある。

[証明]

例題 47　男子 4 人，女子 2 人，計 6 人が円形に並ぶとき，

(1) 全部で何通りの並べ方があるか。

(2) 女子 2 人が隣り合う並べ方は何通りあるか。

じゅず順列

n 個のものでじゅずを作る作り方は $\dfrac{(n-1)!}{2}$ 通り。

例題 48　異なる 6 個の玉で数珠を作る作り方は何通りあるか。

場合の数・確率②

【記号】 ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$

（例） ${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$

組み合わせ（選び方）

異なる n 個のものから k 個選ぶ選び方は， ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りある

例題 49　10 人の生徒から 2 人の委員を選ぶ選び方は何通りあるか。

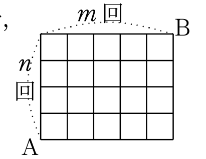
例題 50　男子 6 人から 2 人，女子 4 人から 1 人の委員を選ぶ選び方は何通りあるか。

最短経路

A から B への最短経路は，

ヨコ m 回，タテ n 回移動する方法で，

$$\frac{(m+n)!}{m!n!} \text{ 通り}$$

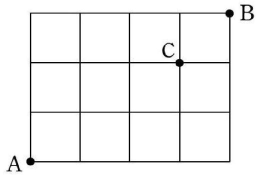


（注）移動回数＝スキマの数

例題 51　次の図のような直線道路がすべて平行に走る町がある。

(1) A から B まで行く最短経路は何通り通りあるか。

(2) C を通らずに A から B まで行く最短経路は 何通りあるか。



重複組み合わせ

(i) 合計数が一定である

(ii) ある種類がゼロでも全部でもよい

　　↓

◯を（合計数）個，┃を（種類 −1）個並べる

例題 52　10 本のバラを A, B, C の 3 人に分配する。次の場合，何通りの分け方があるか。

(1) 1 本ももらわない人がいてもよいとき。

(2) どの人も 1 本はもらうとき。

確率

$$\text{確率} = \frac{\text{条件を満たす場合の数}}{\text{全体の場合の数}}$$

例題 53　赤玉 5 個，白玉 3 個の中から 2 個の玉を選ぶとき，赤玉 1 個，白玉 1 個を選ぶ確率を求めよ。

反復試行の確率

1 回の成功確率が一定値 p であるとき，

n 回中 k 回成功する確率は

$${}_n\mathrm{C}_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

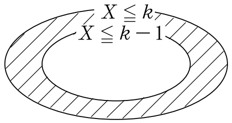
例題 54　1 個のさいころを 6 回投げるとき，1 の目がちょうど 5 回出る確率を求めよ。

場合の数・確率③

くりぬき確率

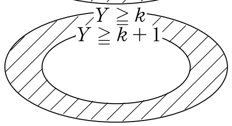
最大数 $X \Rightarrow$「〜以下」をまず求める

$$P(X=k)=P(X \leqq k)-P(X \leqq k-1)$$



最小数 $Y \Rightarrow$「〜以上」をまず求める

$$P(Y=k)=P(Y \geqq k)-P(X \geqq k+1)$$



例題 55　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，出る目の最大値が 5 である確率を求めよ。

《数学 B》

期待値

X	x_1	x_1	x_1	$\cdots$	x_1	計
$P(X)$	p_1	p_1	p_1	$\cdots$	p_1	1

期待値　$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{k=1}^{n} x_kp_k$

例題 56　袋の中に，1, 2, 3 の数字を書いた球がそれぞれ 3 個，4 個，2 個の計 9 個ある。この袋から球を 1 個取り出すときの，出る数字の期待値を求めよ。

《その他の確率の公式・考え方》

くじ引きの確率

くじ引きは順番によらず，当たる確率は一定（平等）

$$\text{当たる確率} = \frac{\text{当たりの本数}}{\text{全体の本数}}$$

トーナメント

(1) 対戦問題：1 人を固定し，となりを決める。

(2) 優勝問題: 2^n 人のトーナメントは n 回戦まである。n 回勝てば優勝である。

条件付き確率

事象 A が起こったという哎件のもとで，事象 B が起こる確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

例題 57　男子 41 人，女子 59 人の計 100 人に対して試験を行ったところ，男子の合格者は 27 人，女子の合格者は 39 人であった。この 100 人の中から 1 人を選ぶとき，次の確率を求めよ。

(1) 選ばれた 1 人が男子であったとき，その人が合格している確率

(2) 選ばれた 1 人が不合格であったとき，その人が女子である確率

《数学 B》

独立・従属

事象 A, B が独立 $\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

事象 A, B が独立でないとき，A, B は従属であるという。

分散・標準偏差

X	x_1	x_1	x_1	$\cdots$	x_1	計
$P(X)$	p_1	p_1	p_1	$\cdots$	p_1	1

のとき，

期待値を $m = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$　とおく。

分散 $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 p_k$

標準偏差　$D(X) = \sqrt{V(X)}$

（公式）

(1) $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

(2) $E(aX+b) = aE(X)+b$

(3) $V(aX+b) = a^2\cdot V(X)$

(4) $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

さらに，X, Y が独立のとき，

(5) $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$

(6) $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$

二項分布（n 回中 k 回の期待値・分散）

$P(X=k) = {}_n\mathrm{C}_k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ のとき.

$E(X) = np$

$V(X) = np(1-p)$

（注）このとき，X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うという。

整数問題

【用語】

約数・倍数 2 つの整数 a, b について，ある整数 k を用いて $a = kb$ と表せるとき，b を a の約数，a を b の倍数であるという。

素数 1 とその数以外に正の約数を持たないような，2 以上の自然数

（注） 1 は素数ではない

素因数分解 自然数を素数だけの積の形に表すこと

自然数 n が $n = p^a q^b r^c$ と素因数分解されているとき，

n の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)$

最大公約数 2 つ以上の整数に共通な約数（公約数）のうち最大のもの

(Greatest Common Measure)

最小公倍数 2 つ以上の整数に共通な倍数（公倍数）のうち最小のもの

(Least Common Multiple)

互いに素 2 つの整数 a, b の最大公約数が 1 であるときをいう

最大公約数 ・最小公倍数の性質

2 つの自然数 A, B の最大公約数を G，最小公倍数を L とする。

$A = aG, B = bG$ と表せる（a, b は自然数）。このとき，

(1) a, b は互いに素

(2) $L = abG$

(3) $AB = GL$

【記号】m：自然数，a, b：整数とする。

$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{定義}}{\iff} a - b$ が m の倍数

（a と b は m を法として合同であるという）

合同式の性質

$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$，$c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$ のとき，

(1) $a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}\, m)$

(2) $a - c \equiv b - d(\mathrm{mod}\, m)$

(3) $ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, m)$

(4) 自然数 n に対し，$a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}\, m)$

例題 58 次のに当てはまる 0 以上の整数のうち，最も小さいものを求めよ。

(1) $18 \equiv \boxed{\ast}$ (mod5)

(2) $23 \equiv \boxed{\ast}$ (mod7)

n 進法 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ を用いて数を表す方法。

つまり，値に n が出てくると，次の位にくり上がる。

n 進法

$$abc.de_{(n)}$$

a	b	c	d	e
n^2 の位	n^1 の位	n^0 の位	n^{-1} の位	n^{-2} の位

$$\Rightarrow \quad abc.de_{(n)} = n^2 \times a + n^1 \times b + n^0 \times c + n^{-1} \times d + n^{-2} \times e$$

ただし，a, b, c, d, e は $0, 1, 2, \cdots, n-1$ のいずれか

例題 59

(1)　10 進法で 1359 と表される数を，6 進法で表せ。

(2)　7 進法で 623 と表される数を，10 進法で表せ。

わりざんの原理（自然数について）

整数 a と正の整数 b に対して，

$a = bq + r \quad (0 \leqq r < b)$

を満たす整数 q（商），r（あまり）がただ 1 通りに定まる。

ユークリッドの互除法

$r \neq 0$ のとき，(a と b の最大公約数) = (b と r の最大公約数)

基本は (整数)×(整数) = (整数) の形にして絞る。

例題 60　$x + y = 3$ を満たす整数の組 (x, y) は何組あるか。次から選べ。

① 2 組　② 4 組　③ この中には無い

例題 61　$xy = 7$ を満たす整数の組 (x, y) は何組あるか。次から選べ。

① 2 組　② 4 組　③ この中には無い

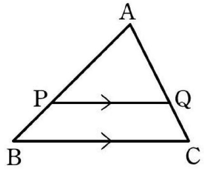
例題 62　$x^2 - y^2 = 108$ の自然数解をすべて求めよ。

平面図形①

平行線に沿った比の移動

次図で PQ//BC のとき，

AP : PB ＝ AQ : QC



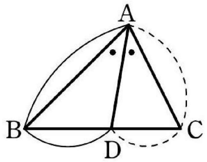
内角の二等分線の性質

△ABC において，

∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を

D とすると，

BD : DC ＝ AB : AC

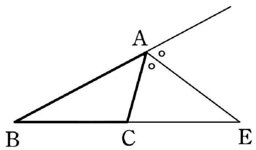


外角の二等分線の性質

右図で線分 AE が外角の二等分線のとき，

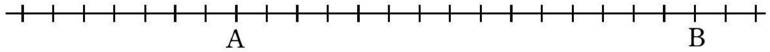
（性質）

（　　　　　　　　　）が成り立つ。



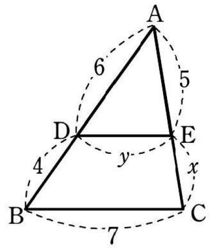
証明のための補助線を描け。

例題 63　線分 AB を 1 : 4 に内分する点 P と外分する点 Q を下の図に記入せよ。

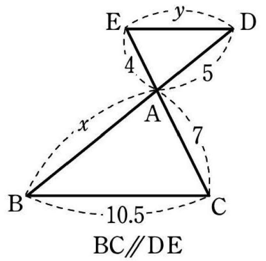


例題 64　下の図において，x, y を求めよ。

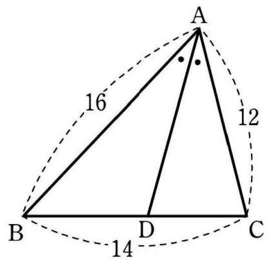
(1)



(2)



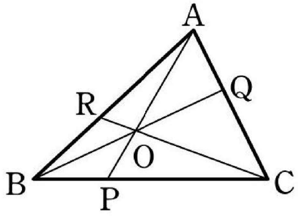
例題 65　AB ＝ 16, BC ＝ 14, AC ＝ 12 である △ABC ほおいて，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。線分 DC の長さを求めよ。



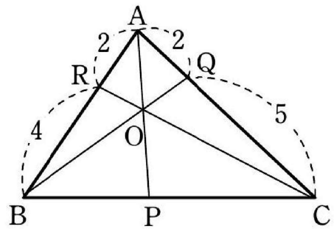
チェバの定理

△ABC の頂点 A, B, C と，三角形の辺上または その延長線上にない点 O を結ぶ各直線が，対辺 BC，CA，AB またはその延長線上と交わるとき， その交点をそれぞれ P, Q, R とすると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



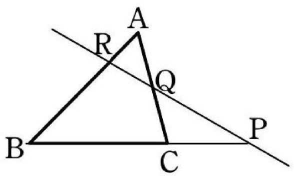
例題 66　BP : PC を求めよ。



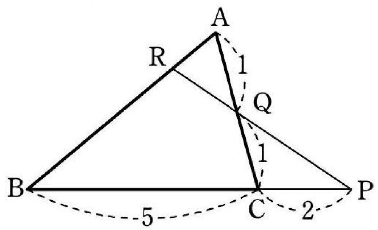
メネラウスの定理

△ABC の辺 BC，CA， AB またはその延長線が三角形の頂点を通らない 1 つの直線と，それぞれ P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



例題 67　AR: RB を求めよ。



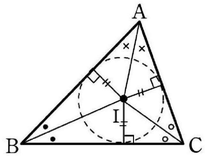
平面図形②

三角形の内心（その性質）

・三角形の 3 辺に接する円（内接円）の中心

・三角形の 3 つの内角の二等分線の交点

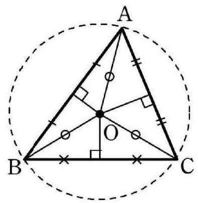
・内心は 3 辺から等距離にある



三角形の外心（その性質）

・三角形の 3 頂点を通る円（外接円）の中心

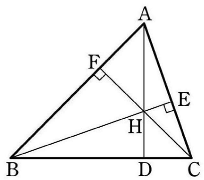
・三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点



三角形の垂心（その性質）

・三角形の 3 つの頂点から対辺に下ろした垂線の交点

・次図で △ABD ∽ △AHF などが狙われる

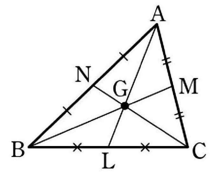


三角形の重心（その性質）

・三角形の 3 つの線の交点

・重心は各中線を頂点の側から 2 : 1 に内分する

$AG : GL = BG : GM$
$= CG : GN$
$= 2 : 1$



円周角の定理

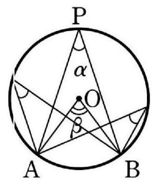
(1) 1 つの弧に対する円周角は一定であり，

その弧に対する中心角の半分である。

$\alpha = \frac{1}{2}\beta$

(2) 等しい円周角に対する弧の長さは等しい。

(3) 長さの等しい弧に対する円周角は等しい。



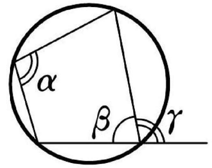
円の内接四角形の性質

(1) 対角の和は 180°

$\alpha + \beta = 180°$

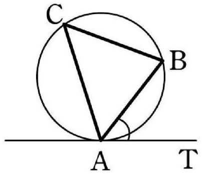
(2) 外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。

$\gamma = \alpha$



接弦定理

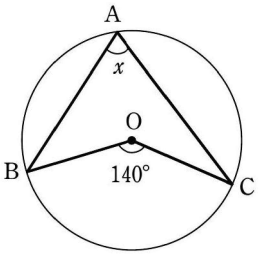
円の弦 AB と，点 A における接線 AT が作る角 ∠BAT の大きさは，その角の内部に含まれる弧 AB に対する円周角 ∠ACB の大きさに等しい。



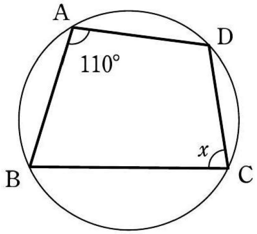
例題68

角 x を求めよ。ただし，(1) で点 O は円の中心である。

(1)



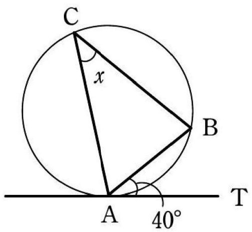
(2)



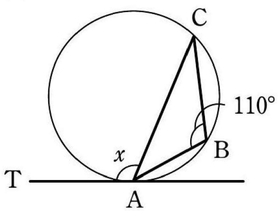
例題69

AT は円の接線である。このとき，角 x を求めよ。

(1)



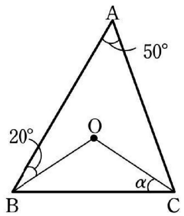
(2)



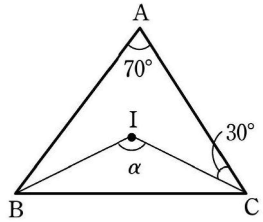
例題70

次の図で，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である。α をそれぞれ求めよ。

(1)

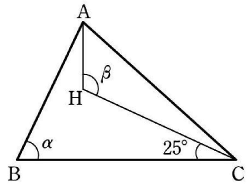


(2)



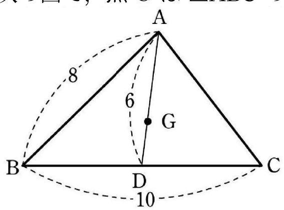
例題71

次の図で，H を △ABC の垂心とするとき，角 α, β を求めよ。



例題72

次の図で，点 G は △ABC の重心である。 AG, BD を求めよ。



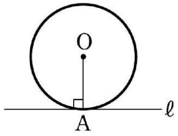
平面図形③

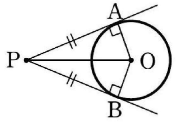
円の接線の性質

(1) 円の接線は接点を通る半径に垂直である。

(2) 円の外部の点からその円に引いた 2 本の接線の長さは等しい。

① $OA \perp \ell$　　②$PA = PB$

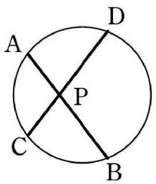


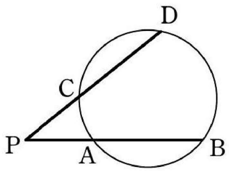


方べきの定理

① 円の 2 つの弦 AB, CD，またはそれらの延長の交点を P とすると

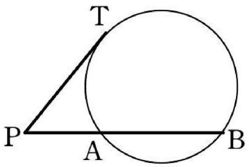
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$





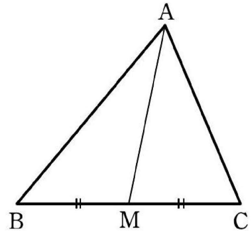
② 円の外部の点 P から円引いた接線の接点を T とする。P を通り，この円と 2 点 A, B で交わる直線を引くと

$PA \cdot PB = PT^2$



中線定理

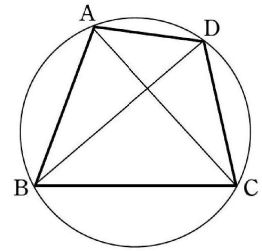
△ABC において，辺 BC の中点を M とする $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$



トレミーの定理

四角形 ABCD が円に内接するとき，

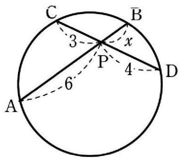
$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$



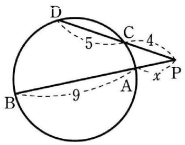
例題 73

次の図において，x を求めよ。ただし，直線 PT は円の接線で T はその接点であるとする。

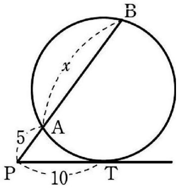
(1)



(2)



(3)



《発展》

多面体　いくつかの多面体で囲まれた空間図形

凸多面体　多面体であり，かつ，どの 2 つの頂点を結んだ線分も多面体内に含まれるもの

正多面体　各面が合同な正多角形であり，かつ，各頂点に集まる面の数と辺の数が等しいもの

正多面体

正多面体は 5 種類ある

正四面体，正六面体（立方体），正八面体，正十二面体，正二十面体

オイラーの定理

凸多面体において，頂点の数を v，辺の数 e を，面の数を f とすると，

$$v - e + f = 2$$

二項定理

二項定理と多項定理

$\boxed{\text{二項定理}}$　$(a+b)^n$ の展開式の一般項は

$${}_n\mathrm{C}_k\, a^{n-k}\, b^k \quad \text{ただし } 0 \leqq k \leqq n$$

$\boxed{\text{多項定理}}$　$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!}\, a^p\, b^q\, c^r \qquad \text{ただし} \begin{cases} p+q+r=n \\ 0 \leqq p,\ q,\ r \leqq n \end{cases}$$

$\boxed{\text{例題 74}}$　次の式の展開式における［　］内の項の係数を求めよ。

(1) $(x^2-2x)^5$　$[x^7]$　　(2) $(3x^2+2)^8$　$[x^6]$

$\boxed{\text{例題 75}}$

$(x+y-2z)^7$ の展開式における $x^3y^2z^2$ の項の係数を求めよ。

$\boxed{\text{例題 76}}$　次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\cdot\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}$

《補足》${}_n\mathrm{C}_k$ の性質

${}_n\mathrm{C}_k$ の性質

（ i ） ${}_n\mathrm{C}_0 = 0,\ {}_n\mathrm{C}_n = 0$

（ii） ${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$

（iii） ${}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1} = {}_n\mathrm{C}_{k+1} + {}_n\mathrm{C}_k$

（iv） $k \cdot {}_n\mathrm{C}_k = n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

例題 77 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1} = {}_n\mathrm{C}_{k+1} + {}_n\mathrm{C}_k$ を証明せよ。

〜〜〜MEMO〜〜〜

複素数

虚数単位 $i=\sqrt{-1}$　$(i^2=-1)$

$\boxed{\text{複素数}}$：$z=a+bi(a,\ b$：実数$)$

　共役複素数 $\bar{z}=a-bi$

《複素数の相等》

$a+b,\ =c+d,$　$(a,\ b,\ c,\ d$：実数$)$

$\Rightarrow a=c$　かつ　$b=d$

《複素数導入のメリット》

(1) n 次方程式は「重解は 2 個 … などと数えると」n 個の解を持つ。

（例）$x^5=0$ は 5 重解 $x=0$ をもつ

　$x^3=1$ は 3 つの解 $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ をもつ

(2) 実数係数 n 次方程式が

　複素数解 $a+bi$ を解にもつとき,

　その共役複素数 $a-bi$ も 解にもつ。

$\boxed{\textbf{例題 78}}$　次の計算をせよ。

(1) $(1+3i)(4-i)$

(2) $\dfrac{3-2i}{2+i}$

1 の 3 乗根 ω

1 の虚数 3 乗根の 1 つを ω とすると,

$$\begin{cases}\omega^2+\omega+1=0\\ \omega^3=1\end{cases}$$

（注）$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$　さらに, $\omega^2=\overline{\omega}$ も成り立つ。

【証明】

$\boxed{\text{例題 79}}$

$x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^{10}+\omega^5+1$

(2) $\omega^{2n}+\omega^n+1$ （n: 自然数 ）

$\boxed{\text{例題 80}}$ i を虚数単位とする。

3 次方程式 $x^3+(k-2)x^2+kx+3=0$ (k は実数の定数) の解の 1 つが $1+\sqrt{2}i$ のとき， k の値および他の 2 解を求めよ。

数と式③

《数の話》

$\boxed{\text{自然数}}$　＋－

⇓ 引き算で，ゼロ・負の整数が出現

$\boxed{\text{整　数}}$　＋－×

⇓ 割り算で，分数が出現

$\boxed{\text{有理数}}$　＋－×÷

⇓ 方程式，極限で，無理数（$\sqrt{2}$，π など）が出現

$\boxed{\text{有理数}}$　数直線に対応

⇓ 方程式で虚数（i，ω など）が出現

$\boxed{\text{複素数}}$　複素平面に対応

> （注 1）$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$　（a, b, c, d：有理数）
>
> $\Rightarrow \quad a=c, b=d$
>
> （注 2）$a+bi=c+di$　（a, b, c, d：実数）
>
> $\Rightarrow \quad a=c, b=d$

《2 次の道具》

$\boxed{\text{平方完成}}$

⇓ 平方完成

$\boxed{\text{解の公式}}$

⇓ ルート内を取り出す

$\boxed{\text{判別式}}$

$\boxed{\text{解と係数の関係}}$

$1\cdot x^2-(2\text{解の和})x+(2\text{解の積})=0$

《高次方程式》

$\boxed{\text{解と係数の関係（3 次）}}$

$1\cdot x^3-(\text{3 解の和})x^2+(\text{3 解の総あたり})x-(\text{3 解の積})=0$

$\boxed{\text{因数定理}}$ 整式 $f(x)$ について

$f(x)$ が $(x-\alpha)$ を因数にもつ

$\Updownarrow$

$f(\alpha)=0 \leftarrow x=\alpha$ を代入してゼロ

《対称式》

$\boxed{\text{2 文字の対称式は，和と積で表せる}}$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

(3) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

$\boxed{\text{3 文字の対称式は，和と「総あたり」と積で表せる}}$

(4) $(x+y+z)^2=\underline{\underline{x^2+y^2+z^2}}+2(xy+yz+zx)$

(5) $\underline{\underline{x^3+y^3+z^3}}-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

(4)，(5) では，<u>二重下線部</u>が求める対称式として問われることが多い。

相加平均・相乗平均の関係

$a > 0,\ b > 0$ のもとで，

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$$

が成り立つ。等号成立は，$a = b$ のとき。

例題 81

(1)　$x > 0$ のもとで，関数 $f(x) = x + \dfrac{3}{x}$ の最小値を求めよ。

(2)　$x > 1$ のもとで，関数 $g(x) = x + \dfrac{5}{x-1}$ の最小値を求めよ。

《補足》有名不等式・恒等式

有名不等式・恒等式

(i)$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geqq 0$

(ii)$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$

等号成立は $a : b = x : y$ のとき

(iii)$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqq (ax + by + cz)^2$

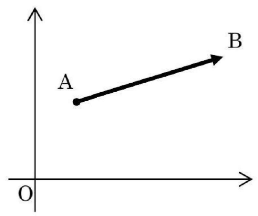
等号成立は $a : b : c = x : y : z$ のとき

(iv)$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

図形と式①

$\boxed{\text{座標平面}}$：ヨコ x とタテ y

2 点間距離公式

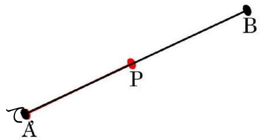


A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ のとき，

$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

[証明] 三平方定理そのもの

内分公式



P：線分 AB を $m:n$ に内分する点

A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ のとき

$\mathrm{P}\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

[証明] ベクトルの単元で扱う

$\boxed{\text{外分}}$

$m:n$ に外分 $\Longleftrightarrow$ $m:(-n)$ に内分，とみなして公式適用

マイナスは，どちらにつけてもよいが，小さい方の数につけた方がよい。

直線 (1)

点 $(x_0,\ y_0)$ を通り，傾き m の直線は，

$$y-\underbrace{y_0}_{y\ \text{座標}}=\underbrace{m}_{\text{傾き}}(x-\underbrace{x_0}_{x\ \text{座標}})$$

[証] 傾き m の直線 $y=mx$ を，点 $(x_0,\ y_0)$ を通るように平行移動する。

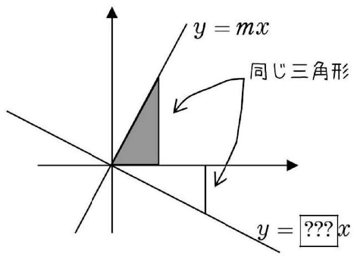
2 直線の平行・垂直 (1)

（ｉ）2 直線が平行 $\Leftrightarrow$ 傾きが等しい

（ii）2 直線が垂直 $\Leftrightarrow$ 傾きの積が -1

[証]（ｉ）は明らか

（ii）原点を通る直線で考えると次図のようになる。



$\therefore\quad \boxed{???}=-\dfrac{1}{m}$

例題 82　P$(-4, 1)$, Q$(2, -2)$ に対して.

(1) 2 点 P, Q の距離 PQ を求めよ。

(2) 線分 PQ を $2:1$ に内分，外分する点を求めよ。

例題 83

(1) (i)　A$(4, -1)$ を通り，傾き -2 の直線の式を求めよ。

　(ii)　A$(4, -1)$ を通り，x 軸に垂直な直線の式を求めよ。

(2) A$(2, 3)$, B$(-1, -3)$ を通る直線の式を求めよ。

図形と式②

※ 直線(1): $y-y_0=m(x-x_0)$ は，傾きのない直線，つまり

タテ棒 $x=x_0$ を表せない。(y を消せない)

直線 (2)

$ax+by+c=0$

この型の直線は，座標平面上のすべての直線を表せる。だが，どんな直線かがわかりにくいところが欠点。

⇒　(x と y の一次式)$=0$　は直線を表す。

2 直線の平行・垂直 (2)

2 直線 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ が

(i) 平行 $\Leftrightarrow a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1=0$

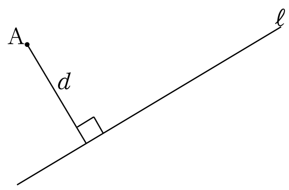
(ii) 垂直 $\Leftrightarrow a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2=0$

(i) は，x と y の係数比が等しい，と考える。

$a_1:b_1=a_2:b_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1\cdot b_2=a_2\cdot b_1$

(ii) 証明

点と直線の距離公式



点 A$(x_0,\,y_0)$ と

直線 $\ell:ax+by+c=0$ の

距離 d は,

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[証明]

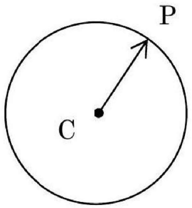
恒等式 ⇒ 係数比較
（例） $ax^2+bx+c=0$ がすべての x で成り立つ ⇔ $a=b=c=0$

例題 84 直線 $(2+a)x+(1-2a)y=1-a$ がすべての a について通る定点を求めよ。

例題 85 点 A(2, −1) と直線 $\ell : y=\dfrac{3}{4}x+2$ の距離 d を求めよ。

図形と式③

円

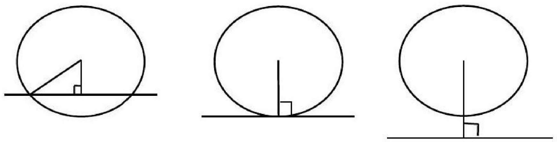


中心 C(a, b) 半径 r の円は，
xy 平面上で，
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
と表される。

［証明］

（注）これを展開した形の式　$x^2+y^2+Ax+By+C=0$
を一般形とよぶ。平方完成すれば中心と半径が求まる。

円と直線　⇒　d と r の関係へ
（d：円の中心と直線の距離，r：円の半径）



交わる　$d<r$　　接する　$d=r$　　交わらない　$d>r$

例題 86　（注）軌跡：点が動いてできる図形のこと

(1) 点 $(-1, 3)$ からの距離が 5 である点の軌跡を求めよ。

(2) 3 点 O$(0, 0)$, A$(1, -3)$, B$(4, 0)$ を通る円の中心，半径を求めよ。

(3) 2 点 A$(-2, 5)$, B$(6, -1)$ を直径の両端とする円の程式を求めよ。

例題 87

円 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=1$ と．直線 $l:y=x-4$ の位置関係を調べ，共有点があればそれを求めよ。

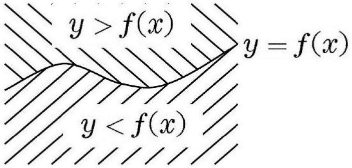
例題 88

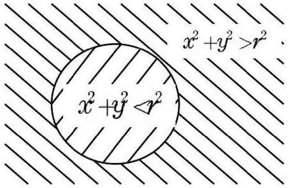
円 $C:x^2+y^2=5$ に，点 $(3,-1)$ から引いた接線を求めよ。

図形と式④

領域

（i）　　（ii）





（注）等号がないときは境界を含まず，等号があるときは境界を含む。

例題 **89**　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y>x+2$

(2) $y \geqq x^2-2x-3$

(3) $-2x+6>0$

(4) $x^2+y^2-2x+4y-4 \leqq 0$

〜〜〜MEMO〜〜〜

領域＋最大最小

StepI まず領域を図示する

StepII（最大最小を求める式）を，「$=k$」 とおく

StepIII I， II を図示した時に共有点を持つような k の条件を求める。

例題 90　x，y が 3 つの不等式

$$\begin{cases} y - x \leqq -4 \\ y - 2x \geqq -8 \\ y + 4 \geqq 0 \end{cases}$$

を満たすとき，$x + y$ の最大値及び最小値を求めよ。

〜〜〜MEMO〜〜〜

図形と式⑤

軌跡：動点の動いてできる図形

軌跡

動点を P(X, Y) とおき，
X, Y の関係式を求める。
（　それを軌跡の方程式とよぶ。）
ただし，軌跡の限界（変域）に注意。

例題 91

2 点 A(1, 0), B(3, 2) から等距離にある点の軌跡を求めよ。

【解答】

例題 92

2 定点 A(0, 0), B(3, 0) からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ。

例題 93

放物線 $y = x^2 - 2kx + k$ において，k がすべての値をとって変化するとき，この放物線の頂点の軌跡を求めよ。

例題 94 xy 平面上に原点 0 を中心とする半径 1 の円 C と点 A(2, 0) がある。円 C を動く点 P に対して，AP の中点を M とする。M の軌跡を求めよ。

三角関数①

弧度法 半径 1 の円の長さ θ 弧に対する中心角を θ[rad] と定める。

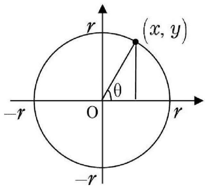
$180^\circ = \pi$[rad]

三角関数の定義

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \leftarrow \frac{y\ \text{座標}}{\text{半径}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \leftarrow \frac{x\ \text{座標}}{\text{半径}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \leftarrow \frac{y\ \text{座標}}{x\ \text{座標}}$$



（注）半径は自由に変えることができる

基本公式

（ i ）$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

（ii）$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

（iii）$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$

（iv）$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

（説明）半径 $r = 1$ とすると，

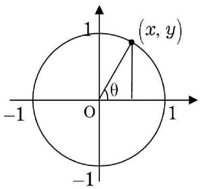
$\sin\theta = y,\ \cos\theta = x$

（ i ）は三平方の定理

（ii），（iii）は明らか

《補足》（ i ），（ii）から次の公式が得られる

（ v ）$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$



例題 95 次の値を求めよ。

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}$　(2) $\cos\dfrac{3\pi}{4}$　(3) $\tan\dfrac{7\pi}{6}$

例題 96

(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき， $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = -\dfrac{5}{13}$ のとき， $\sin\theta$ の値を求めよ。

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\tan\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき， $\sin\theta, \cos\theta$ の値を求めよ。

例題 97

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

〜〜〜MEMO〜〜〜

三角関数②

加法定理

（ i ）$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

（ ii ）$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

（iii）$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

例題 98　次の値を求めよ。

(1) $\sin 105^\circ$

(2) $\cos 15^\circ$

(3) $\tan 75^\circ$

2 倍角公式

（ i ）$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

（ ii ）$\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta$

$= 2\cos^2\theta-1$

$= 1-2\sin^2\theta$

［証明］

例題 99　$0<\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin 2\theta-\sin\theta=0$

(2) $2\cos 2\theta+4\cos\theta+3=0$

3 倍角公式

（ i ）　$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

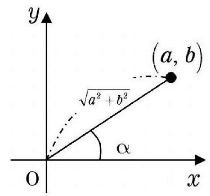
（ ii ）　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

[証明]

例題 100　$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき , $\sin 3\theta$, $\cos 3\theta$ の値を求めよ。

三角関数の合成公式

$$\begin{aligned} & a\sin\theta + b\cos\theta \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$



例題 101　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

(2) $y = \sin\theta - \cos\theta$

三角関数③

積和変換

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

[証明] 方針だけ述べよ。

例題 102　積和変換せよ。

(1) $\sin 5\theta\cos 3\theta$

(2) $\sin 7\theta\sin 3\theta$

和積変換

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

[証明] 方針だけ述べよ。

例題 103　和積変換せよ。

(1) $\sin 7x+\sin 3x$

(2) $\cos 9x-\cos 5x$

半角公式（次数下げの公式）

（ i ）　$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

（ ii ）　$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

（iii）　$\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

例題 104　次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$y = 5\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 3\sin^2 x$

変換公式

$$\begin{cases} \sin(\theta+2n\pi) = \sin\theta \\ \cos(\theta+2n\pi) = \cos\theta \\ \tan(\theta+2n\pi) = \tan\theta \end{cases}$$
ただし n は整数

$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \\ \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\pi-\theta) = \sin\theta \\ \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta \end{cases}$$

［証明］

指数関数

a^n：a を n 回かけたももの

つまり，$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots\cdots \times a}_{n\text{個}}$

(注) 数学 II 以降では，n が負にも分数にも拡張される。

指数法則

(ｉ) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ，$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(ii) $(a^m)^n = a^{m \times n}$

(iii) $a^0 = 1$，$a^1 = a$

(iv) $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

(ｖ) $a^0 = 1$

(vi) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ← マイナス 乗＝逆数

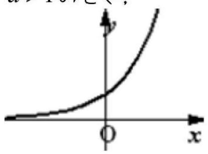
(vii) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ← 分数乗：$\dfrac{1}{n}$ 乗 ＝ n 乗根

（n 乗して a になる数 ）

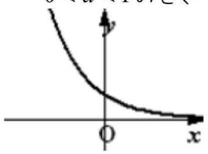
(注) 平方根 (ルート)＝2 乗根　つまり　$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

(注) 指数関数 $y = a^x$ グラフ

$a>1$のとき，



$0<a<1$のとき



例題 105　次の式を簡単にせよ。

(1) $a^3 \times a^4$　　(2) $(a^3)^4$　　(3) $\dfrac{a^4}{a^3}$

例題 106　次の式を簡単にせよ。

(1) $(3a)^3 \times \dfrac{2}{a^2}$　　(2) $\left(\dfrac{2}{a}\right)^4 \times 3a^5$

例題 107　$2^x + 2^{-x} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $(2^x + 2^{-x})^2$　　(2) $4^x + 4^{-x}$

例題 108　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ の大小を比較せよ。

指数の方程式

$$a^m = a^n$$

$$\Updownarrow$$

$$m = n$$

例題 109　次の方程式を解け。

(1) $9^{3x} = 3^{x+3}$

(2) $4^x - 2^{x+1} - 48 = 0$

指数の不等式

$a > 1$ のとき,

$a^m < a^n$

$\Updownarrow$ 底 a が 1 より大なら 大小そのまま

$m < n$

$0 < a < 1$ のとき

$a^m < a^n$

$\Updownarrow$ 底 a が 1 より小なら 大小逆転

$m > n$

例題 110　次の不等式を解け。

(1) $8^x > 2$

(2) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{2x+3} > \dfrac{1}{100}$

(3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 8 < 0$

対数関数①

$\log_a b$：a を何乗すれば b になるかを表す記号

$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$

(注) 真数条件 $b > 0$

(注) 底の条件「$a > 0$ かつ $a \neq 1$」つまり「$0 < a < 1$ または $a > 1$」

例題 111 次の対数の値は存在するか。存在するときはその値を求めよ。存在しないときは，「なし」と記せ。

(1) $\log_2 8 =$

(2) $\log_3 81 =$

(3) $\log_2 1024 =$

(4) $\log_2 \dfrac{1}{16} =$

(5) $\log_4 2 =$

(6) $\log_{\frac{1}{3}} 81 =$

(7) $\log_5 0 =$

(8) $\log_7(-7) =$

対数法則

(1) $\log_a M \times N = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a M^p = p \cdot \log_a M$

(4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ （底の変換公式）

例題 112 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき，次の値を a, b を用いて表せ。

(1) $\log_{10} 72$

(2) $\log_{10} 0.6$

(3) $\log_2 3$

(4) $\log_3 5$

対数の方程式

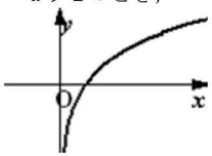
$$\log_a M = \log_a N$$
$$\Updownarrow$$
$$M = N$$

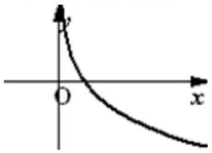
例題 113　次の方程式を解け。

$\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

(注) 対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

$a > 1$ のとき，　　$0 < a < 1$ のとき





例題 114　$\log_2 1000$ の整数部分は $\boxed{\ast}$ である。

対数の不等式

$a > 1$ のとき，	$0 < a < 1$ のとき
$\log_a M < \log_a N$	$\log_a M < \log_a N$
$\Updownarrow$ 底 a が 1 より大なら大小そのまま	$\Updownarrow$ 底 a が 1 より小なら大小逆転
$M < N$	$M > N$

例題 115　次の不等式を解け。

(1) $\log_2(x+3) < 3$

(2) $2\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geqq -1$

対数関数②

ケタ数の問題

(1) 底を 10 とする対数をとる。(常用対数)

(2) 整数ではさんで，大きいながケタ数。

N が n ケタ

$\Leftrightarrow \quad 10^{n-1} \leqq N < 10^{n}$

$\Leftrightarrow \quad n-1 \leqq \log_{10} N < n$

例題 116 2^{100} の桁数を求めよ。ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

小数位の問題

(1) 底を 10 とする対数をとる。(常用対数)

(2) 整数ではさんで，小さい方が小数位。

N が小数第 n 位に初めて 0 でない数字が出現する数

$\Leftrightarrow \quad 10^{-n} \leqq N < 10^{-n+1}$

$\Leftrightarrow \quad -n \leqq \log_{10} N < -n+1$

例題 117 $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

《補足》

n 乗根の定義

$$x = \sqrt[n]{a} \iff \begin{cases} x^n = a & (n \text{ が奇数のとき }), \\ x^n = a, \quad x \geqq 0 & (n \text{ が偶数のとき }). \end{cases}$$

（性質） n が奇数のとき，$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

$a > 0,\ b > 0$ で $m,\ n$ が自然数のとき，次が成り立つ．

（i）$(\sqrt[n]{a})^n = a$　（ii）$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　（iii）$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

（iv）$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　（v）$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

〜〜〜MEMO〜〜〜

数 II 微分①

$\boxed{\text{極限値}}$ [記号]：$\lim_{x\to a} f(x)$：x を a に近づけたときの $f(x)$ の値

[まず，$x=a$ を代入]

$\frac{0}{0}$(不定形) ⇒ 約分してから代入

導関数・微分係数

(ｉ) 導関数 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(ii) 微分係数 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$f'(x)$ を$\boxed{\text{導関数}}$といい，これを求めることを$\boxed{\text{微分する}}$という。

導関数 $f'(x)$ に $x=a$ （定数）を代入したもの

記号で表すと $f'(a)$ を $x=a$ での$\boxed{\text{微分係数}}$という

(注) 理論的には，まず微分係数を次のように定義し，

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$x-a=h$ とおきかえて(ii)を得る。ここで定数 a を変数 x におきかえて(ｉ)を得る。

微分係数 $f'(a)$ は，$y=f(x)$ のグラフの

$x=a$ に対応する点における接線の傾きを表す。

[証明 微分の定義より示せる]

微分公式

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

とくに，$(x)'=1$，(定数)$'=0$

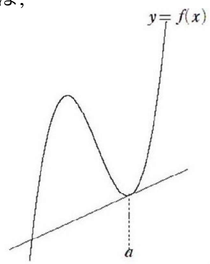
(例) $n=3$ のとき，$f(x)=x^3$ とおくと．

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2
\end{aligned}$$

接線

$y=f(x)$ の $x=a$ に対応する点における接線は，

$$y-\underbrace{f(a)}_{y\text{ 座標}}=\underbrace{f'(a)}_{\text{傾き}}(x-\underbrace{a}_{x\text{ 座標}})$$



例題 118　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x^2+3x+1)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

例題 119　$f(x)=x^3+x^2$ を定義に従って微分せよ。

例題 120　$f(x)=x^3-7x^2+2x-9$ において，

(1) 導関数を求めよ。

(2) $x=2$ における微分係数を求めよ。

例題 121　$y=x^2-4x+2$ の $x=1$ に対応する点における接線を求めよ。

数 II 微分②

導関数 $f'(x)$：代入して接線の傾きを求めるために用いる。

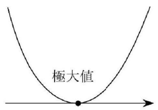
増加・減少

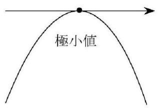
$f'(x) > 0$ のとき，$f(x)$ は増加

$f'(x) < 0$ のとき，$f(x)$ は減少

$f'(x)$ の符号の変わり目を極値といい，

そこでは，$f'(x) = 0 \leftarrow$ 傾きゼロ





グラフの描き方

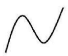
Step1 微分して $f'(x) = 0$ となる x を求める。

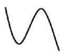
Step2 増減表を書く。

Step3 極値などを調べる。

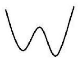
《補足》グラフの概形

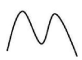
(1) 3 次関数 $y = ax^3 + \sim$

$a > 0$ のとき，

$a < 0$ のとき，

(2) 4 次関数 $y = ax^4 + \sim$

$a > 0$ のとき 

$a < 0$ のとき，

(注) $f'(x) = 0$ が重解，虚数解をもつときは，グラフがツブれる。

(例) $y = x^3 - 3x + 1$ のグラフを描く。

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおく。

Step1 微分して $f'(x) = 0$ となる x を求める。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 3 \\
&= 3\left(x^2 - 1\right) \\
&= 3(x+1)(x-1)
\end{aligned}
$$

$f'(x) = 0$ となるのは，$x = -1, 1$ のとき

Step2 増減表をかく

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

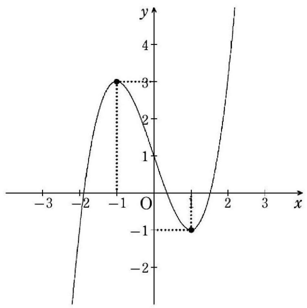
$f'(x)$ の符号

Step3 極値などを調べる

極大値　$f(-1) = 3$

極小値　$f(1) = -1$

y 軸との交点 $f(0) = 1$



例題 **122**　$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ のグラフを描け

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$　とおくと.

例題 **123**　$y = x^4 - 6x^2 - 8x + 13$ のグラフを描け

$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 13$ とおくと

数 II 積分①

$\boxed{\text{積分}}$：微分の逆演算

（例）$x^3 \xrightarrow{\text{ビブン}} 3x^2$

（問）$\boxed{\ ?\ }$ $\xrightarrow{\text{ビブン}}$ x^2、$x^2 \xrightarrow{\text{セキブン}} \boxed{\ ?\ }$

（答）$\dfrac{x^3}{3}$，$\dfrac{x^3}{3}+1$ など，⇒ まとめて，$\dfrac{x^3}{3}+C$ （C は積分定数）

【記号】 $\int \square dx$：□を x で積分（不定積分）

$\int$ ← 「インテグラル」と読む

（例）上の問を記号で表すと $\displaystyle\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$

不定積分

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

とくに，$\displaystyle\int a\,dx=ax+C$

【記号】 $\displaystyle\int_a^b \square dx$：□を $x=a$ から $x=b$ まで積分（定積分）

定積分

$$\int_a^b x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$$ ← まず不定積分（積分定数は不要）

$$=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$ ← 上代入 引く 下代入

区間対称の定積分

$$\int_{-a}^{a} x^{\text{奇数}}\,dx=0$$

$$\int_{-a}^{a} x^{\text{偶数}}\,dx=2\int_0^a x^{\text{偶数}}\,dx$$

パックづめ積分

$$\int (x-\alpha)^n dx=\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1}+C$$

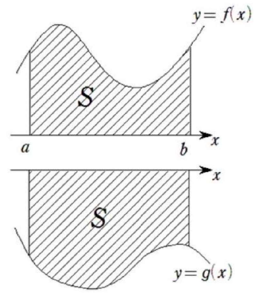
定積分 ＝ 符号付き面積（x 軸との間）

(i) 軸上

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

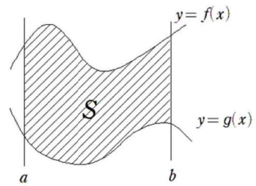
(ii) 軸下

$$S=\int_a^b\{-g(x)\}dx$$



定積分=符号付き面積（二曲線間）

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$



例題 **124**　次の不定積分を求めよ。

$\displaystyle\int (2x^3-6x^2+4x-1)\,dx$

例題 **125**　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^4 (2x^3-3x^2+5)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-3}^3 (x^3+x^2+x+1)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^4 (x-2)^3 dx$

例題 **126**　次の曲線と x 軸とによって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+2x$　　(2) $y=x^2-x-2$

例題 **127**　次の曲線および直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

$y=(x-1)^2,\ y=x+1$

数 II 積分②

積分方程式 I

区間が定数のみのとき

$$\int_a^b f(t)dt = A \quad (\text{定数})\ とおく。$$

例題 128 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 2x^2 + x\int_0^1 f(t)dt$$

積分方程式 II

区間の上端が変数のとき

$\int_a^x f(t)dt$ において.

（ｉ）x で微分して，$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

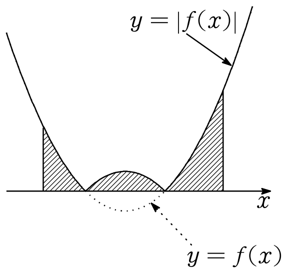
（ii）$x = a$ を代入して，$\int_a^a f(t)dt = 0$

[（ｉ）の証明]

例題 129 等式 $\int_a^x f(t)dt = x^2 + 2x - 3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求 めよ。

絶対値積分 Ⅰ

$\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ は
$y=|f(x)|$ と x 軸の間
$(a \leqq x \leqq b)$ の面積を表す,



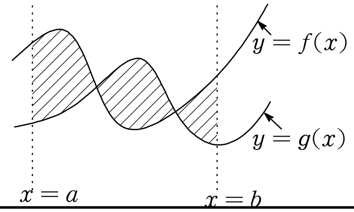
例題 130　次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_1^4 |x-2|dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^6 |x^2-4|\,dx$

《発展》

絶対値積分 Ⅱ

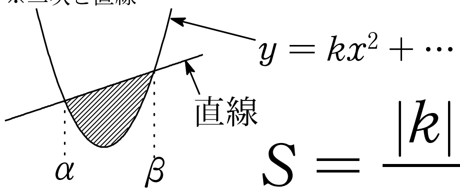
$\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ は,
$y=f(x)$ と $y=g(x)$
の間 $(a \leqq x \leqq b)$ の面積を表す。



付録 面積公式

面積公式 Ⅰ

※二次と直線

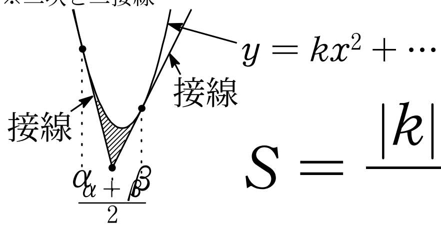


$$S=\frac{|k|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

[証明] $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ による。

面積公式 Ⅱ

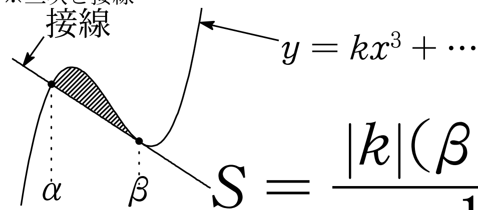
※二次と二接線



$$S=\frac{|k|(\beta-\alpha)^3}{12}$$

面積公式 Ⅲ

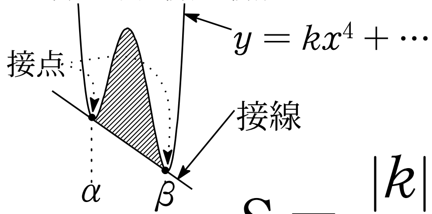
※三次と接線



$$S=\frac{|k|(\beta-\alpha)^4}{12}$$

面積公式 Ⅳ

※四次と 2 点で接する接線



$$S=\frac{|k|(\beta-\alpha)^5}{30}$$

《補足》

$\boxed{\text{微分公式}}$

（ i ）$\{k\cdot f(x)\}'=k\cdot f'(x)$

（ ii ）$\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$　（複号同順）

$\boxed{\text{不定積分公式}}$

（iii）$\displaystyle\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$

（iv）$\displaystyle\int\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$　（複号同順）

$\boxed{\text{定積分公式}}$

（ v ）$\displaystyle\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$

（vi）$\displaystyle\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$　（複号同順）

(vii) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$

(viii) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

（ix）$\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

$\boxed{\text{奇関数}}$$f(x)$ が奇関数：$f(-x)=-f(x)$ を満たす関数のこと

(例)$f(x)=x^{2n-1}$，$f(x)=\sin x$

(性質)$y=f(x)$ のグラフは原点対称

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0$$

$\boxed{\text{偶関数}}$$f(x)$ が偶関数：$f(-x)=f(x)$ を満たす関数のこと

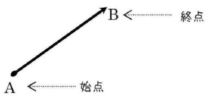
(例)$f(x)=x^{2n-1}$，$f(x)=\sin x$

(性質)$y=f(x)$ のグラフは y 軸対称

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

ベクトル①

$\boxed{\text{ベクトル}}$ ＝矢印 （ 大きさと向きから成る）



これを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表す。

始点と終点を明示せずに

$\vec{a}$ などと表すことも多い。

※ 和・差・実数倍が定義される

$\boxed{\text{和}}$は（ i ）つなぐ,（ ii ）平行四辺形の対角線による

$\boxed{\text{差}}$は逆ベクトルによる。

$\boxed{\text{定数倍}}$：正のときは向きが同じで大きさ（長さ）がその値の分だけ拡大・縮小される。また, 定数が負のときは向きが逆になる

$\boxed{\text{位置ベクトル}}$ 基準となる点 O からひいたベクトル

（例）A の位置ベクトル＝ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

分点公式（始点 O ）

P が AB を $m : n$ に内分する点のとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

Q が AB を $m : n$ に外分する点のとき,

$\Rightarrow m : (-n)$ に内分する点と考えて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

【証明】

$\boxed{\text{中点}}$ M が AB の中点のとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

$\boxed{\text{重心}}$ G が △ABC の重心のとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

内分比・外分比が不明のとき（始点 O ）

(1) P が AB 上の点のとき,

$\Rightarrow \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = t : 1-t$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

(2) Q が OC 上の点のとき,

$\Rightarrow \mathrm{OQ} : \mathrm{QC} = k : 1-k$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

[説明] (2) は明らか。(1) の証明の方針を述べよ。

【補足】始点のとりかえ公式

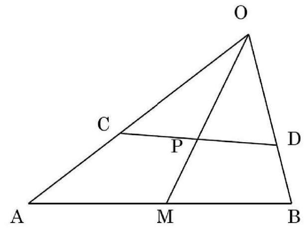
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

[証明]

例題 131 正六角形 ABCDEF とその外接円中心 O がある。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ として，次のベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{EO}}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

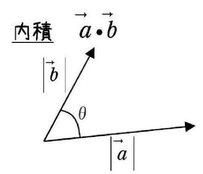
例題 132 三角形 OAB があり，OA を 3 : 2 に内分する点を C，OB 2 : 1 に内分する点を D とし，AB の中点を M とする。OM と CD の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。



ベクトル②

【記号】 $|\vec{a}|$: $\vec{a}$ の大きさ（矢印の長さ）

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

内積の性質

（ｉ）$\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$

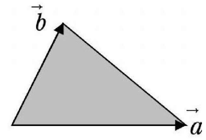
（同じもの同志の内積）＝（大きさの 2 乗）

（ii）$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

（ベクトルが垂直）⇒（内積ゼロ）

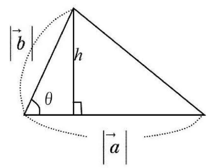
［証明］

三角形の面積



$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

［証明］



図のように h, θ をとると

三角形の面積 S は

$S = \frac{1}{2}|\vec{a}|h$ ← $\frac{1}{2}$× 底辺 × 高さ

【以下，証明を完成せよ】

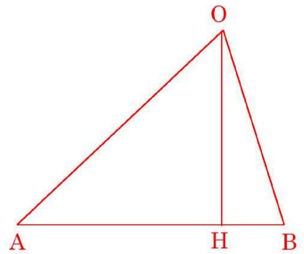
例題 **133**　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を 60° とする。このとき，次のものを求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})$

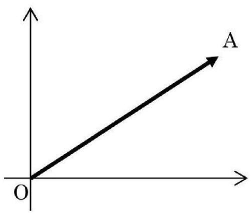
(3) $|\vec{a}-\vec{b}|$

例題 **134**　$\triangle$OAB において OA $=3$, OB $=2$, $\angle$AOB $=60^\circ$ とする。点 O から AB に下ろした垂線の足を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。



ベクトル③

座標＝位置ベクトル



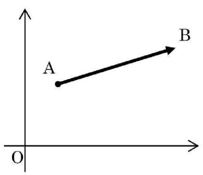
A(x_1, y_1) のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

※ x_1, y_1 を成分という。

※ 始点が O ではないとき・・.

A(x_1, y_1)，　B(x_2, y_2) のとき，　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

（注）$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いればすぐわかる。

大きさ，内積（成分の場合）

$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$　のとき，

大きさ　$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

内積　$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2$$

（注）$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　と同じ値

余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta &= \frac{(x_1{}^2 + y_1{}^2) + (x_2{}^2 + y_2{}^2) - \left\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right\}}{2} \\ &= \frac{2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{2} \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2\end{aligned}$$

例題 **135** 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\,x),\,\vec{b}=(2,\,-1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-3\vec{b}$ が垂直であるとき，x の値を求めよ。

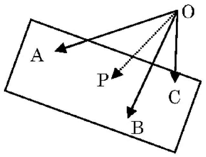
(2) $\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-3\vec{b}$ が平行であるとき，x の値を求めよ。

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，x の値を求めよ。

例題 **136** xyz 空間に 3 点 $\mathrm{A}(2,\,4,\,1),\,\mathrm{B}(3,\,2,\,-1),\,\mathrm{C}(6,\,6,\,-1)$ がある。このとき，三角形 ABC の 面積を求めよ。

ベクトル④

空間内の平面 ①



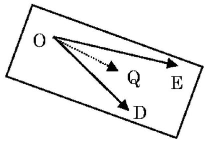
P が平面 ABC 上の点のとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

と表すと $\alpha + \beta + \gamma = 1$

［証明］

空間内の平面 ②（始点 O）

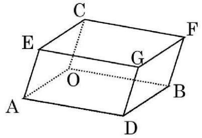


Q が平面 ODE 上の点のとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と表せる。

（注）始点 O がもともと平面に含まれるときは，この公式を用いる。

例題 **137**　図に示す平行六面体で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。平面 ABC と直線 OG の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。



例題 **138**　正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とす る。辺 OA を 4 : 3 に内分する点を P，辺 BC を 5 : 3 に内分する点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

(2) 線分 PQ の中点を R とし，直線 AR が △OBC の定める平面と交わる点を S とするとき，線分比 AR: AS を求めよ。

ベクトル⑤

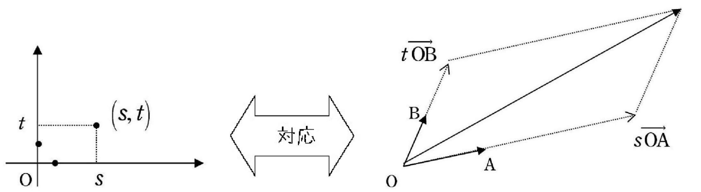
斜交座標

●直交座標

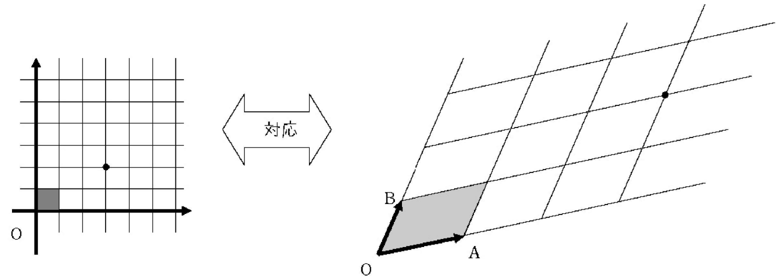
点 $(s,\ t)$

●斜交座標

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$



$$\begin{cases}(0,\ 0) & \leftrightarrow \mathrm{O} & \leftarrow \overrightarrow{OP}=0\overrightarrow{OA}+0\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OO} \\ (1,\ 0) & \leftrightarrow \mathrm{A} & \leftarrow \overrightarrow{OP}=1\overrightarrow{OA}+0\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA} \\ (0,\ 1) & \leftrightarrow \mathrm{B} & \leftarrow \overrightarrow{OP}=0\overrightarrow{OA}+1\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\end{cases}$$



《発展》一次独立

2つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ が座標の代わりになるとき,

つまり, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\nparallel\vec{b}$ をみたすとき,

$\vec{a},\vec{b}$ を $\boxed{\text{一次独立}}$ であるとよぶ。

例題 139 △OAB の面積を S とする。$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$, および,

$s+2t\leqq 1$ をみたす点の存在領域の面積を S で表せ。

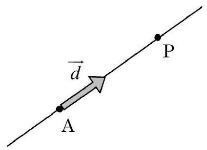
例題 140　$\triangle$OAB の面積を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $s \geqq 0$, $t \geqq 0$, および,
$s+t \leqq 1$, $3s+4t \geqq 2$ をみたす点の存在領域の面積を S で表せ。

〜〜〜MEMO〜〜〜

ベクトル⑥

直線①

点 $A(x_1, y_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の 直線 ℓ 上の点を $P(x, y)$ とすると，



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$$

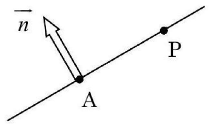
$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

《補足》 $\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \end{cases}$ より， $t = \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}$

$\therefore bx - ay - bx_1 + ay_1 = 0 \leftarrow$ 確かに直線

直線②

点 $A(x_1, y_1)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の直線 ℓ 上の点を $P(x, y)$ とすると，



$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP}$ より $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

《補足》 $ax + by - (ax_1 + by_1) = 0 \leftarrow$ 確かに直線 $ax + by + c = 0$ の法線ベクトルは，係数をとって $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ となる。

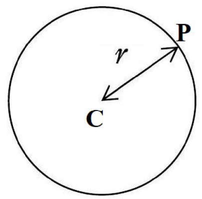
例題 141 次の直線の方程式をベクトルを利用して求めよ。

(1) 点 $(0, 1)$ を通り， ベクトル $\vec{d} = (1, 2)$ に平行な直線

(2) 2 点 $A(-2, 1)$, $B(4, 3)$ を通る直線

(3) 点 $(-2, 4)$ を通り， ベクトル $\vec{n} = (3, -2)$ に垂直な直線

円①



中心 C，半径 r の円上の点を P とすると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r \quad \text{より，}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=r$$

ここで，$\mathrm{C}(\vec{c})$, $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，

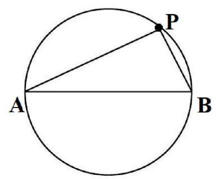
$$|\vec{p}-\vec{c}|=r$$

(注) $\mathrm{C}(a,\ b)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$ より，

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ← 確かに円

円②



直径の両端を A，B とする円上の点を P とすると.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$

ここで，$\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$, $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると.

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ より

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

(注) $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると.

$\begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_2 \\ y-y_2 \end{pmatrix}=0$ より.

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ← 確かに円

例題 142　ベクトルを用いて，次の円の方程式を求めよ。

(1) 点 $\mathrm{C}(1,\ -2)$ を中心とする半径 3 の 円

(2) 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ -2)$ を直径の両端とする円

数列①

$\boxed{\text{数列}}$：規則性をもって並べられた数の列

(例) 1, 3, 5, $\boxed{?}$, 9, 11, …… ←等差数列
1, 3, 9, $\boxed{?}$, 81, 243, …… ←等比数列

等差数列

初項 a, 公差 d の等差数列の
(1) 一般項は $a_n = a + (n-1)\cdot d$
(2) 第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

(1)
$a_1 = a$
$a_2 = a + d$
$a_3 = a + 2d$
$a_4 = a + 3d$
$\cdots$

$\Longrightarrow$

$$a_n = a + (n-1)d$$

初項 a に公差 d を $n-1$ 回足し算
つまり, d の $n-1$ 倍を足し算。

(2) [証明法] (　　　　　　　　)
(例) $S = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 98 + 99 + 100$

等比数列

初項 a, 公比 r の等比数列の
(1) 一般項は $a_n = a \cdot r^{n-1}$
(2) 第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (\text{ただし, } r \fallingdotseq 1 \text{ のときに限る})$$

(1)
$a_1 = a$
$a_2 = a \cdot r$
$a_3 = a \cdot r^2$
$a_4 = a \cdot r^3$
$\cdots$

$\Longrightarrow$

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

初項 a に公比 r を $n-1$ 回掛け算
つまり, r の $n-1$ 乗を掛け算。

(2) $r = 1$ のときは,
$S_n =$
$r \fallingdotseq 1$ のときの証明

[まとめ] (　　　　　　　　)

例題 143　第 5 項が 8 ，第 10 項が -7 である等差数列の初項と公差を求めよ。

例題 144　上の問いで，初項から第 7 項までの和を求めよ。

例題 145　第 2 項が 6，第 5 項が 48 である等比数列の初項と公比を求めよ。

例題 146　初項から第 3 項までの和が -18 ，第 6 項までの和が 126 である等比数列の初項と公比を求めよ。

数列②

等差中項・等比中項

(1) a, b, c がこの順に等差数列をなす

$\Leftrightarrow \quad 2b = a + c$

(2) a, b, c がこの順に等比数列をなす

$\Leftrightarrow \quad b^2 = a \times c$

記号 Σ：数列の和の記号

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

Σ 公式

(ⅰ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$　　$\leftarrow 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n$

(ⅱ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　　$\leftarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2$

(ⅲ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$　　$\leftarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3$

(ⅳ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$　　$\leftarrow c + c + c + \cdots\cdots + c$

(1) は，等差数列の和の公式より証明できる。

(4) は，n 個の c の和だから明らか。

(2)，(3) は，数学的帰納法により証明できる。

《発展》

Σ 準公式

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(5) の証明

$$k(k+1) = \frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \text{ より}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$

$$= \frac{1}{3}[\{1\cdot 2\cdot 3 - 0\cdot 1\cdot 2\}$$

$$+ \{2\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 3\}$$

$$+ \{3\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot 3\cdot 4\}$$

$$+ \{4\cdot 5\cdot 6 - 3\cdot 4\cdot 5\}$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ \{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)\}]$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(6) も同様に証明できる

例題 **147** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ を計算せよ。

例題 **148** 数列 $1\cdot3^2,\ 2\cdot5^2,\ 3\cdot7^2,\ \cdots\cdots$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

数列の和（Σ計算）で困ったら，差の形に直す

例題 **149** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ を計算せよ。

Σ の性質

（ i ） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$(複号同順)

（ii） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c\cdot a_k = c\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k$

数列③

数列の和から一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと,

$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geqq 2) \end{cases}$$

[証明] $S_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$

例題 150

初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一 般項を求めよ。

(1) $S_n = 2n^2 + 5n$

(2) $S_n = n^3 - 1$

(3) $S_n = 2^n - 1$

〜〜〜MEMO〜〜〜

〜〜〜MEMO〜〜〜

数列④

$\boxed{\text{漸化式}}$: 数列の前後関係式（$\boxed{\text{ぜん}}$ご$\boxed{\text{か}}$んけい$\boxed{\text{しき}}$）

$a_{n+1} = a_n + d$ ←等差型（公差 d）

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_2 + d \\ a_4 = a_3 + d \\ a_5 = a_4 + d \\ \vdots \end{cases}$$

$a_{n+1} = r \cdot a_n + d$ ←等比型（公比 r）

$$\begin{cases} a_2 = r \cdot a_1 \\ a_3 = r \cdot a_2 \\ a_4 = r \cdot a_3 \\ a_5 = r \cdot a_4 \\ \vdots \end{cases}$$

$a_{n+1} = p \times a_n + q$　一次の特性方程式を利用するタイプ

特性方程式を立てて引き算

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= p \times a_n + q \\ \alpha &= p \times \alpha + q \\ \hline a_{n+1} - \alpha &= p \times (a_n - \alpha) \end{aligned}$$

← a_{n+1}, a_nを α におきかえた式 $= \boxed{\text{特性方程式}}$

階差型 $a_{n+1} - a_n =$（n の式 ）型

（公式） $a_{n+1} - a_n = b_n$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geqq 2 \text{ のとき})$$

（注） $n = 1$ のときの場合分けが必要

【証明】

例題 151　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

例題 152　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

数列の応用

群数列

(1) 各群の個数を数える

(2) 各群の個数の和をとると各群の末尾までの項数が求まる。

例題 153 数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$ において

(1) $\frac{11}{22}$ は最初から数えて第何項目か。

(2) 最初から数えて 200 項目の分数を求めよ。

【解答】(1)

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \left|\frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \right|\frac{5}{6}, \cdots$ と群に分ける。

このとき，第 n 群には，分母が $n+1$ の分数が (　　) 個含まれる。

$\frac{11}{22}$ は，第 (　　) 群に含まれる。

格子点

(1) タテに切る（またはヨコに切る）

(2) $x=k$ （または $y=k$ ）上の格子点を数える

(3) それらの和をとると格子点の総数が求まる。

$\boxed{\text{格子点}}$ 座標がすべて整数である点のこと。

(例) 数直線上で $11 \leqq x \leqq 86$ に含まれる格子点の個数は

$\underbrace{86}_{\text{大}} - \underbrace{11}_{\text{小}} + 1 = 76$ (個) である。

例題 154

xy 平面上で， $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+y \leqq 20$ の表す領域に含まれる格子点の個数 S を求めたい。

(1) $x=4$ 上の格子点の個数を求めよ。

(2) 格子点の総数 S を求めよ。

数学的帰納法 (Type 1)

(1) $n=1$ のときを証明

(2) $n=k$ のときを仮定して，$n=k+1$ のときを証明

(3) (1) (2) よりすべての自然数のときに成り立つことが示せる

例題 155　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ が成り立つことを 数学的帰納法を用いて示せ。ただし，n を自然数とする。

《補足》

$\boxed{\text{Type2 三項間型}}$

(1) $n=1$ および $n=2$ のときを証明

(2) $n=k,\ k+1$ ときを仮定して $n=k+2$ のときを証明

⇒ すべての自然数 n で成立する

$\boxed{\text{Type3 } S_n \text{ 型}}$

(1) $n=1$ のときを証明

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ のきを仮定して $n=k+1$ のときを証明

⇒ すべての自然数 n で成立する

複素数平面①

$\boxed{\text{虚数単位}}$ i ：2 乗すると -1

$\boxed{\text{複素数}}$ $z = \underbrace{a}_{\text{実部}} + \underbrace{b}_{\text{虚部}} i$ （a, b は実数）と表される数

複素数 $z = a + bi$ に対して

$\boxed{\text{共役複素数}}$ $\overline{z} = a - bi$

$\boxed{\text{絶対値}}$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

共役（バー）の性質＋絶対値の性質

(1) $\overline{\overline{z}} = z$

(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$ （複号同順）

(3) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(5) 実数 a に対して，$\overline{a} = a$

(6) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$

(7) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

$\boxed{\text{純虚数}}$ $z = bi$ （ b は実数）と表せる数

z が実数 $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = z$

z が純虚数 $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = -z$

[記号] $z = a + bi$ に対して，$\overline{z} = a - bi$ より.

実部 $\mathrm{Re}\, z = a = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$，虚部 $\mathrm{Im}\, z = b = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

$\boxed{\text{例題}}$ **156** 次の計算をせよ。

(1) $(1 + 3i)(4 - i)$

(2) $\dfrac{3 - 2i}{2 + i}$

$\boxed{\text{例題}}$ **157** 次の複素数の共役複素数と，絶対値を求めよ。

(1) $3 - 2i$

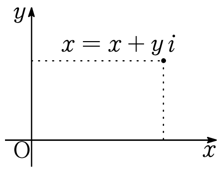
(2) $\dfrac{3 - \sqrt{2}i}{2}$

$\boxed{\text{例題}}$ **158** $|\alpha| = 1$, $\alpha\overline{\beta} = 1 + \sqrt{2}i$ のとき，$|\beta| = \sqrt{3}$ である。これを利用して次の値を求めよ。

(1) $\overline{\alpha}\beta$

(2) $|\alpha + \beta|$

$\boxed{\text{複素数平面}}$ 複素数 $z = x + yi$ を xy 平面上の点 (x, y) に対応させた平面



【記号】 $\mathrm{A}(\alpha)$：複素数 α の表す平面上の点が A であることを表す記号

しばしば両者は同一視される。

複素数＝位置ベクトル

$\mathrm{A}(\alpha)$ とすると，α は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に対応する。

例 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{P}(z)$ とすると，

α は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を，β は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に，z は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に対応する。

このとき，P が AB を $m:n$ に内分する点とすると.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \text{より，}$$

$$z = \frac{n}{m+n}\alpha + \frac{m}{m+n}\beta$$

$\boxed{\textbf{例題 159}}$ $z_1 = -1 + 4i$, $z_2 = 2 + i$ のき，次の複素数を求めよ。

(1) z_1, z_2 を $1:2$ に内分する点 z_3

(2) z_1, z_2 を $3:1$ に外分する点 z_4

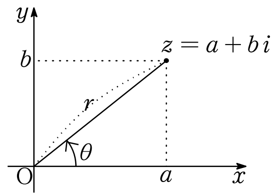
極形式

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} = |z| & \leftarrow \text{絶対値} \\ \theta = \arg z & \leftarrow \text{偏角} \end{cases}$$

とすると

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

と表せる。



極形式への直し方

$$z = a + bi = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{絶対値}}\Bigl(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\,i\Bigr)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}(\underbrace{\cos\theta} + i\underbrace{\sin\theta})$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\boxed{\textbf{例題 160}}$ 次の複素数を極形式で表せ。

(1) $z = 1 + \sqrt{3}i$

(2) $z = 2 - 2i$

複素数平面②

複素数の積

$z_1 \times z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

$|z_1 \times z_2| = |z_1||z_2|$, $\quad \arg(z_1 \times z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

[証明] $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

複素数の商

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\quad \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

例題 161 $\alpha = 1+i$, $\beta = \sqrt{3}+i$ とする。次の複素数を極形式で表せ。

(1) $\alpha\beta$ (2) $\dfrac{\alpha}{\beta}$

ド・モアブルの定理

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$　　(n は整数)

複素数の方程式 ($z^n = \alpha$ 型)

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと,

　(左辺) $= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

(2) 右辺も極形式に直す。

(3) 左辺と右辺の絶対値と偏角を比較する。ただし, 偏角の k 周分のズレに注意

例題 162　次の複素数の値を極形式で表せ。

(1) $(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{10}$

(2) $\{2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\}^8$

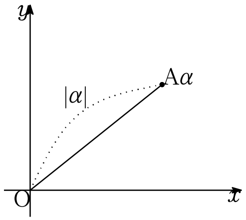
例題 163　$(1+i)^{11}$ の値を $a+bi$ の形で表せ。

例題 164　方程式 $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$ を解け。

複素数平面③

A(α)：複素数 α の表す平面上の点が A である，ということを表す記号。

　しばしば両者は同一視される。



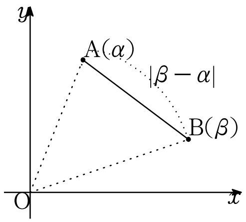
A(α) とする。

α は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に対応し，

$|\alpha| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ が成立。

$$|\alpha| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$$

絶対値＝原点からの距離



A(α), B(β) とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}_{\text{goal}} - \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}_{\text{start}}$ より，

$\beta - \alpha$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に対応し，

$|\beta - \alpha| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ が成立。

$$|\beta - \alpha| = \mathrm{AB}$$

差の絶対値＝二点間距離

例題 165　複素数平面上で，点 A($3+i$) について次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 実軸の向きに 2， 虚軸の向きに 3 平行移動した点 B

(2) 実軸に関して対称移動した点 C

(3) 原点に関して対称移動した点 D

複素数の円

中心が A(α)， 半径が r の円上の点 P(z) とすると.

$$|z - \underbrace{\alpha}_{\text{中心}}| = \underbrace{r}_{\text{半径}}$$

例題 166　次の方程式をみたす z が複素数平面上にえがく図形を説明せよ。

(1) $|z-4| = |z-2i|$

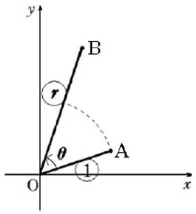
(2) $|z-2| = 1$

(3) $|z|^2 - 2z - 2\bar{z} = 0$

複素数の積と回転 ①

A(α), B(β) とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を回転，r 倍に拡大（縮小）
したもののとき，

$\beta=\alpha\times r(\cos\theta+i\sin\theta)$　と表せる。

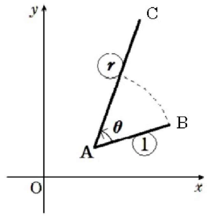


例題 167　$z=-3+i$ とする。
(1) 点 z を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 w を求めよ。
(2) 点 z を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した点を表す複素数 u を求めよ。

複素数の積と回転 ②

A(α), B(β), C(γ) とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を θ 回転，$\boldsymbol{r}$ 倍に拡大（縮小）
したもののとき，

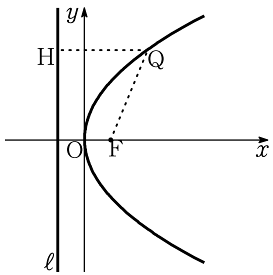
$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\times r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表せる。



例題 168　$\alpha=2+i,\ \beta=4+5i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

二次曲線

ヨコ型放物線 $y^2 = 4px$



頂点 O(0, 0)

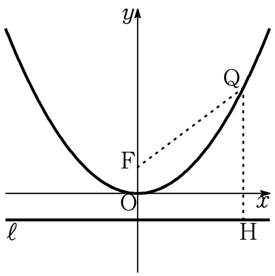
焦点 F(p, 0)

準線 $\ell : x = -p$

定義 QF = QH

$p > 0$ のときの図

タテ型放物線 $x^2 = 4py$



頂点 O(0, 0)

焦点 F(0, p)

準線 $\ell : y = -p$

定義 QF = QH

$p > 0$ のときの図

放物線の接線

放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

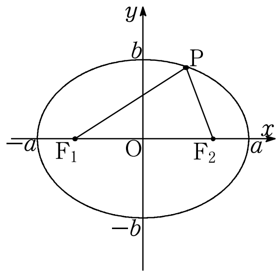
$$y_0 y = 2p(x + x_0) \qquad (b > a > 0)$$

例題 **169**　放物線 $y^2 = 8x$ の焦点と準線を求めよ。

例題 **170**　放物線 $x^2 = -12y$ の焦点と準線を求めよ。

例題 **171**　放物線 $y^2 = 4x$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

ヨコ型楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$



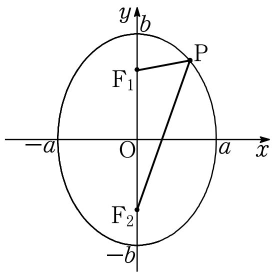
中心 O(0, 0)

軸との交点 $(\pm a,\ 0)$，$(0,\ \pm b)$

焦点 F_1，F_2 $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2\mathrm{a}$

タテ型楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(b>a>0)$



中心 O(0, 0)

軸との交点 $(\pm a,\ 0)$，$(0,\ \pm b)$

焦点 F_1，F_2 $(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2})$

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2\mathrm{b}$

楕円の接線

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

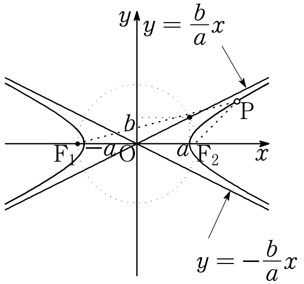
$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

$\boxed{\text{例題}\ \mathbf{172}}$ だ円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の長軸，短軸の長さおよび，焦点の座標を求めよ。

$\boxed{\text{例題}\ \mathbf{173}}$ だ円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点の座標を求めよ。

$\boxed{\text{例題}\ \mathbf{174}}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$ における接線の方程式を求めよ。

ヨコ型双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$



中心 $\mathrm{O}(0,\ 0)$

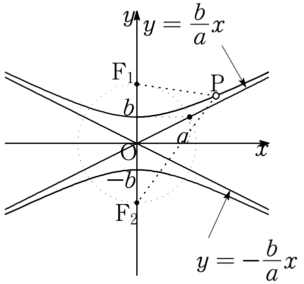
頂点 $(\pm a,\ 0)$

焦点 F_1，F_2 $(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

漸近線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

定義 $|\mathrm{PF}_1-\mathrm{PF}_2|=2a$

タテ型双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1 \quad (a>0,\ b>0)$



中心 $\mathrm{O}(0,\ 0)$

頂点 $(0,\ \pm b)$

焦点 F_1，F_2 $(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$

漸近線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

定義 $|\mathrm{PF}_1-\mathrm{PF}_2|=2b$

双曲線の接線

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

例題 175 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ。

例題 176 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ の焦点の座標と漸近線の方程式 を求めよ。

例題 177 双曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(-2\sqrt{5},\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

《補足》

二次曲線の接線（再掲）

曲線上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は

[1] 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ では　$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

[2] 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ では　$\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

[3] 放物線 $y^2=4px$ では　$y_0y=2p(x+x_0)1$　$(b>a>0)$

二次曲線の媒介変数表示

放物線 $y^2=4px \to x=pt^2,\quad y=2pt$

楕 円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \to x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \to x=\dfrac{a}{\cos\theta},\ y=b\tan\theta$

〜〜〜MEMO〜〜〜

極座標

極座標

点 P の極座標を $\mathrm{P}(r, \theta)$ と表す 点 O は極,

半直線 $\mathrm{O}x$ は始線,

θ は偏角という。

（注） $r \geqq 0$ とすることが多い。 $r = 0$ のとき θ は不定である。

極座標と直交座標の関係

点 P の極座標を，(r, θ)

直交座標を (x, y) とすると，

(1) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

(2) $r = \sqrt{x^2+y^2},\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

極方程式　曲線上の点 P の極座標 (r, θ) について，

r と θ の関係式をその曲線の極方程式という。

極方程式はできるだけ $r = f(\theta)$ の形にすることが望ましい。

例題 178　次の曲線を極方程式で表せ。

(1) $x^2+y^2+2x=0$　　(2) $x^2-y^2=2$

例題 179　次の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ。

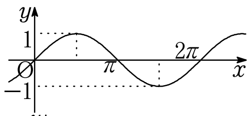
(1) $r = 2\sin\theta$　　(2) $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$

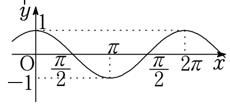
〜〜〜MEMO〜〜〜

〜〜〜MEMO〜〜〜

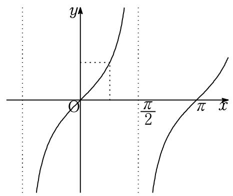
数 III 関数 $\boxed{\text{基本的な関数のグラフ}}$

(1) $\boxed{y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x}$



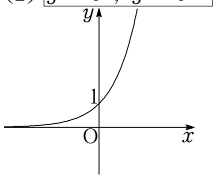


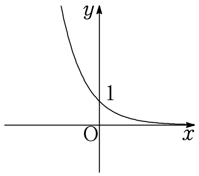
周期 2π 周期 2π



周期 π

(2) $\boxed{y=e^x,\ y=e^{-x}}$





(右端) $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$

(左端) $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

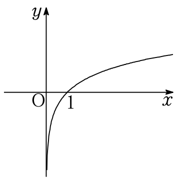
漸近線 $y=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty$

漸近線 $y=0$

(3) $\boxed{y=\log x}$



真数条件より　$x>0$ ←変域

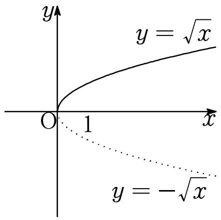
(右端) $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} \log x=\infty$

(左端) $x>0$ だから $x\to 0$ で調べる

$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0} \log x=-\infty$

漸近線 $x=0$

(4) $\boxed{y=\sqrt{x},\ y=-\sqrt{x}}$



$y^2=x$ ← ヨコ型放物線

$\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{x}$

ルート内≧ 0 より，　$x\geqq 0$ ←　変域

$y=\sqrt{x}$ について．

（右端）$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

（左端）$x\geqq 0$ だから $x=0$ を代入

$x=0$ のとき，$y=0$

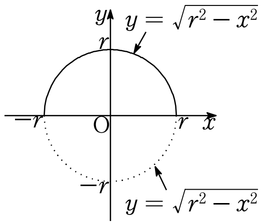
$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$　（$x\geqq 0$）より．

$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　（$x>0$）←変域変化

（左端）$\lim\limits_{x\to 0} y'=+\infty$

ルートのグラフでは端点で接線が直立

(5) $\boxed{y=\sqrt{r^2-x^2},\ y=-\sqrt{r^2-x^2}}$



$x^2+y^2=r^2$

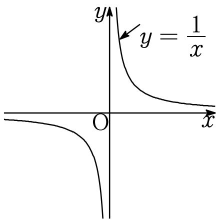
$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

ルート内 $y=\sqrt{x}$ より，　$-r\leqq x\leqq r$ ← 変域

（4）と同様に

端点での接線が直立（円だから当然）

(6) $\boxed{y=\dfrac{1}{x}}$



分母 $\neq 0$ より，$x \neq 0$ ←変域

$\lim\limits_{x\to+0} y = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x} = +\infty$

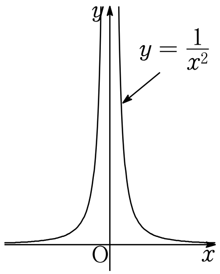
$\lim\limits_{x\to-0} y = \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x} = +\infty$

漸近線 $x=0$

（両端）$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ より，

漸近線 $y=0$

(7) $\boxed{y=\dfrac{1}{x^2}}$



分母 $\neq 0$ より，$\mathrm{ming} = \min\dfrac{1}{x} = 0$

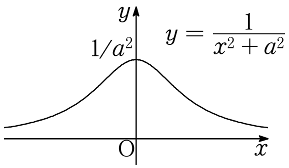
$\lim\limits_{x\to\pm0} y = \lim\limits_{x\to\pm0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$

漸近線 $x=0$

（両端）$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$ より，

漸近線 $y=0$

(8) $\boxed{y=\dfrac{1}{x^2+a^2}}$ $(a>0)$

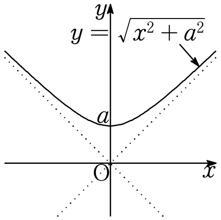


分母 >0 より，x は全実数

（両端）$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2+a^2} = 0$ より，

《発展》

(9) $\boxed{y=\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$



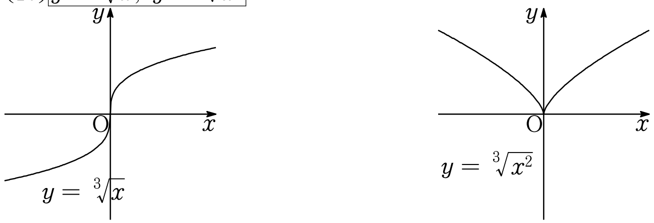
$y^2-x^2=a^2$ ←タテ型双曲線

$\Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{x^2+a^2}$

ルート内 >0 より，x は全実数

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \infty$

(10) $\boxed{y=\sqrt[3]{x},\ y=\sqrt[3]{x^2}}$



グラフの平行移動・対称移動

$y=f(x)$ のグラフを

（ｉ） x 軸の向きに p，y 軸の向きに q だけ平行移動すると

$$y-q=f(x-p)$$

（ii） x 軸に関して対称移動すると　$-y=f(x)$

（iii） y 軸に関して対称移動すると　$y=f(-x)$

（iv） 原点に関して対称移動すると　$-y=f(-x)$

例題 180　次の関数のグラフを，漸近線に注意してかけ。

(1) $y=\dfrac{2x}{x-1}$　(2) $y=\dfrac{3x+5}{x+2}$　(3) $y=\dfrac{3-x}{x-2}$

例題 181　次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=\sqrt{x+1}$　(2) $y=3\sqrt{2-x}$

(3)*　$y=-2\sqrt{-3x+6}+1$

逆関数

逆関数：関数 $y=f(x)$ の x と y を入れかえて $y=g(x)$ の形に直したもの。このとき，$g(x)$ を $f(x)$ の逆関数という。

【記号】$f^{-1}(x)$ で，$f(x)$ の逆関数を表す。

逆関数の性質

(1) 定義域と値域が入れ替わる。

(2) グラフが $y=x$ に関して対称。

【追加公式あり】

例題 182　関数 $f(x)=ax+b(a \neq 0)$ について，
$f(1)=2,\ f^{-1}(5)=2$ であるとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

合成関数

関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，
$g(f(x))$ を $f(x)$ に $g(x)$ を合成した関数という。

【記号】$(g \circ f)(x)=g(f(x))$

例題 183　$f(x)=x+2,\ g(x)=ax^2+bx+1$ について，

(1) $(g \circ f)(x)$ を求めよ。

(2) 恒等式 $(g \circ f)(x)=2x^2+8x+9$ が成り立つように，定数 $a,\ b$ を求めよ。

数 III 極限①

極限値 [記号] : $\lim\limits_{x \to a} f(x)$: x を a に近づけたときの $f(x)$ の値

[まず，$x = a$ を代入]

$\dfrac{0}{0}$ (不定形) ⇒ 約分してから代入

例題 184 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

（注）分母→ 0 でも極限値が定まる（収束する）唯一の例外が，

分子→ 0 のとき，つまり $\dfrac{0}{0}$（不定形）のときである。

無限大 [記号] ∞ ：限りなく大きな「数」

(例) $\infty + \infty = \infty,\ \infty \times \infty = \infty,\ \dfrac{1}{\infty} = 0$

（注） $\infty - \infty$ および $\dfrac{\infty}{\infty}$ は不定形といい，ただちに値が定まらない。

$\dfrac{\infty}{\infty}$ (不定形) ⇒ 次数の比較

例題 185 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 3x}{x^2 + 2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4x - 3}{x^2 + 2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 3x}{x^2 + 2}$

例題 186 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ を求めよ。

（注） $\infty - \infty$ （不定形）には公式がない。

三角関数の極限

（ｉ）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

（ii）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$

（iii）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=2$

例題 187　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

e の定義

（ｉ）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

（ii）$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

（注）$e=2.71828\ldots\ldots$

例題 188　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+3h)^{\frac{1}{h}}$

《追加公式》

（ｉ）$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$　　（ii）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

［証明］

（ｉ）は e の定義より明らか。

（ii）は $t=e^x-1$ とおくことで，e の定義から示せる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\log(1+t)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\log e}=1$$

例題 189　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$ を求めよ。

数 III 極限②

微分係数・導関数

（ｉ）微分係数① $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

（ii）微分係数② $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

（iii）導関数 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

（注）① で $x-a=h$ とおきかえると ② を得る。さらに定数 a を変数 x におきかえると（iii）を得る。

例題 190 $f(x)=\log x$ を定義に従って微分せよ。

例題 191 次の極限を a, $f(a)$, $f'(a)$ で表せ。

(1) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$ (2) $\lim_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}$

例題 192 極限値 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}$ を求めよ。

例題 193 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x-2}$ (2) $\lim_{x\to 2-0}[x]$

等比数列の極限 …n 乗の極限

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (|r|<1) \\ 1 & (r=1) \\ \infty & (r>1) \\ \pm\infty & (r<-1) \\ \pm 1 & (r=-1) \end{cases}$$

例題 194 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

n 乗 が複数 ⇒ 指数の底の絶対値を比較

例題 195 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2^n+5^n}$$

無限等比級数

$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$　(無限個の和)

を，初項 a，公比 r の無限等比級数という。

(i) $a=0$ なら収束し，その和 $S=0$

(ii) $a\neq 0$ でも，$|r|<1$ なら収束し，その和 $S=\dfrac{a}{1-r}$

[ii の証明] 無限級数＝(　　　　　　　　)

例題 196 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots\cdots$

(2) $3-1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{81}+\cdots\cdots$

数Ⅲ極限③

一般の無限級数の性質

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$,　$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ のとき，

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$　（c は定数）

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$　（複号同順）

例題 197　無限級数の和 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2^n}{3^n}$ を求めよ。

無限級数と一般項の関係

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

対偶をとると

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する}$$

例題 198　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots\cdots$

(2)　$\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots\cdots + \dfrac{n}{n+1} + \cdots\cdots$

《補足》

数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が収束し，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$,　$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$　(c は定数)

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$　(複号同順)

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\boldsymbol{\beta}$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　(ただし，$b_n \neq 0$,　$\beta \neq 0$)

関数の極限の性質

a を実数の定数，∞, $-\infty$ のいずれかとし，α, β を実数の定数とする。

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$,　$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \beta$ と収束するとき

(i) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\alpha$ (k は定数)

(ii) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$ (複号同順)

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ただし，$\beta \neq 0$

連続性

「$f(x)$ が $x=a$ で連続」

$\iff \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ が同じ値に収束し，その極限値が $f(a)$ と一致

微分可能性

$f(x)$ は $x=a$ で微分可能

$\iff \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \left(= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ が存在

連続性と微分可能性

関数 $f(x)$ と実数 a について，

「$f(x)$ は $x=a$ で微分可能」$\Longrightarrow$「$f(x)$ は $x=a$ で連続」

数 III 微分①

基本関数の微分公式

(1) $(x^a)' = ax^{a-1}$

(注) a は全実数（負でも分数でもよい）

(2) $(a^x)' = a^x \cdot \log a$

(注) log の底は $e = 2.718\ldots$

(3) $(e^x)' = e^x$

(4) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ さらに $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

例題 199 次の関数を微分せよ

(1) $y = x \cdot \sqrt[4]{x^3}$　　(2) $y = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt[5]{x^3}}$

積の微分公式

$(f \times g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

例題 200 関数 $y = x\cos x$ を微分せよ。

商の微分公式

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

例題 201 関数 $y = \dfrac{e^x}{x}$ を微分せよ。

合成関数の微分公式

$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \times g'(x)$

例題 202　次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sin(x^2 + 3x)$

(2) $y = \cos(\log x)$

(3) $y = e^{x^2}$

(4) $y = \log|3x^2 + 1|$

(5) $y = (\log x)^3$

(6) $y = \tan^4 x$

接線・法線

$y = f(x)$ の $x = a$ に対応する点における 接線は,

$$y - \underbrace{f(a)}_{y\,\text{座標}} = \underbrace{f'(a)}_{\text{傾き}}(x - \underbrace{a}_{x\,\text{座標}})$$

法線は

$$y - \underbrace{f(a)}_{y\,\text{座標}} = \underbrace{-\frac{1}{f'(a)}}_{\text{傾き}}(x - \underbrace{a}_{x\,\text{座標}})$$

例題 203　曲線 $y = \tan^3 x$ の $x = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線・法線を求めよ。

数 III グラフ

増加・減少

$f'(x) > 0$ のとき，$f(x)$ は増加　$\nearrow$

$f'(x) < 0$ のとき，$f(x)$ は減少　$\searrow$

$f'(x)$ の符号の変わり目での $f(x)$ の値を極値といい

そこでは　$f'(x) = 0$ が成立。

凹凸

$f''(x) > 0$ のとき，$y = f(x)$ は下に凸の形　$\bigcup$

$f''(x) < 0$ のとき，$y = f(x)$ は上に凸の形　$\bigcap$

$f''(x)$ の符号の変わり目に対応する点 $(x,\ f(x))$ を変曲点といい

そこでは　$f''(x) = 0$ が成立。

ロピタルの定理

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ または，$\displaystyle\frac{\infty}{\infty}$ のとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

（注）a は ∞, $-\infty$ でもよい。

（注）$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ でないときに用いてはならない。

有名極限値

n を自然数とする。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^n} = 0$$

以下のグラフ描画の問題では，この「有名極限値」を利用してもよい。(暗記推奨)

例題 204 x の関数 $y = x - 2\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の増減，極値を調べ，グラフの概形をかけ。余力があれば，凹凸，変曲点も調べよ。

例題 205 次の関数の増減と極値を調べて，そのグラフをかけ。

$y = (1 + \cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

$\boxed{\textbf{例題 206}}$　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ。

$y = xe^{-x}$

$\boxed{\textbf{例題 207}}$　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフの概形をかけ。

$y = x\log x - x$

例題 208　次の関数のグラフの概形をかけ。

$y=\dfrac{\log x}{x}$

例題 209　次の曲線のグラフをかけ。

$y^2=x^2(x+3)$

例題 210　次の関数のグラフをかけ。

$$f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$$

例題 211　次の関数のグラフをかけ。

$$y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$$

例題 212　次の関数の増減を調べグラフをかけ。

$$y = \frac{x}{(x-1)^2}$$

例題 213　方程式 $\sin x = ae^x$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ に 実数解を持つような a の範囲を求めよ。

平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) で微分可能ならば
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, $a<c<b$ を満たす実数 c が存在する。

例題 214　平均値の定理を用いて，次の不等式を証明せよ。

$a<b$ のとき , $2^a\log 2<\dfrac{2^b-2^a}{b-a}<2^b\log 2$

中間値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間で連続で，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号であるとき，
x の方程式 $f(x)=0$ は $a<c<b$ を満たす解 $x=c$ が少なくとも 1 つ存在する。

数 III 積分①

以下，特に断りのない限り，C を積分定数とする。

基本関数の積分公式

(1) $\displaystyle\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ ($a \fallingdotseq -1$ をみたす実数)

(2) $\displaystyle\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

(3) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

(4) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

(5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

(6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

(8) $\displaystyle\int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$

(9) $\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$

例題 215 次の不定積分を求めよ。

$$\int\left(x^3 + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$

『中身一次』の積分公式

$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき，

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \quad \text{ただし } a \fallingdotseq 0$$

問題 216 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{3x} dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(4x-5)dx =$

(3) $\displaystyle\int \cos(6x+7)dx =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 8x} dx =$

(5) $\displaystyle\int (9x-1)^{10} dx =$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-1} dx =$

三角関数の 2 乗，4 乗

sin, cos の 2 乗，4 乗，⋯ の積分 ⇒ 半角公式で次数下げ（●乗をなくす）

tan の 2 乗 ⇒ 公式 $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用

例題 217

(1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$　　　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x dx$

sin, cos の積 ⇒ 積和変換　（積をなくす）

例題 218　(1) $\cos 5x \cos 3x$ を和または差の形に直せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \cos 5x \cos 3x dx$ を求めよ。

分母が因数分解できる分数式

⇒ 部分分数分解 （分母次数下げ）

例題 219　(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$ が x の恒等式となるように定数 a, b の値を定めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}dx$ を求めよ。

$\dfrac{f'}{f}$ の形に着目　　$\boxed{\text{公式}}$ $\displaystyle\int \frac{f'}{f} = \log|f|$

例題 **220**　(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

(補) $\displaystyle\int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$ を証明せよ。

$f^n \times f'$ の形に着目　　$\boxed{\text{公式}}$ $\displaystyle\int f^n \times f' = \frac{f^{n+1}}{n+1}$

例題 **221**　(1) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x dx$　　(2) $\displaystyle\int x(x^2+1)^3 dx$

部分積分公式

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

部分積分 Ⅰ

$x\times$ ●型 ⇒ x を微分して消去する部分積分

例題 **222**　(1) $\displaystyle\int xe^x dx$　　(2) $\displaystyle\int x\cos x dx$

部分積分 Ⅱ

$\log\times$ 型 ⇒ $\log$ を微分して消去する部分積分

例題 **223**　$\displaystyle\int x\log x dx$

(補) $\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$ を証明せよ。

置換積分公式

$t=(x$ の式$)$ と置換するとき,

Step I ： dx を dt で表す

Step II：x の区間を t の区間に直す

Step IIII：全体を t に関する積分で表す

置換積分 Ⅲ

$t=($ かたまり$)$ とおく

例題 224　(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ を $t=e^x$ と置換して求めよ。

(注)　$t=e^x+1$ と置換してもできる。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ を t $\cos x$ と置換して求めよ。

置換積分 Ⅱ

$\sqrt{r^2-x^2}$ $\Rightarrow$ $x=r\sin\theta$ とおく

$\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $\Rightarrow$ $x=a\tan\theta$ とおく

例題 225　(1) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$ を $x=2\sin\theta$ と置換して求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$ を $x=\tan\theta$ と置換して求めよ。

数 III 積分②

積分では，和・差・実数倍はバラして計算できるが，積・商・合成関数（とくに n 乗）に弱い。

⇒ できるだけ和に直す。できるだけ次数下げ

sin，cos，tan の 2 乗，4 乗 …

$\sin x$, $\cos x$ の 2 乗，4 乗，……

⇒ 半角公式で次数下げ（乗をなくす）

tan の 2 乗

⇒ 公式 $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用

sin，cos の積 $\Longrightarrow$ 積和変換（積をなくす）

分母が因数分解できる分数式　⇒ 部分分数分解（分母次数下げ）

$(x-\alpha)^n\times$ ●型

⇒ $(x-\alpha)$ の形にそろえて．パックづめ積分に持ち込む

$$\int(x-\alpha)^n dx=\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1}$$

$\dfrac{f'}{f}$ の形に着目 $\boxed{\text{公式}}$ $\displaystyle\int\frac{f'}{f}=\log|f|$

$f^n\times f'$ の形に着目　公式 $\displaystyle\int f^n\times f'=\frac{f^{n+1}}{n+1}$

部分積分公式

$$\int f'\cdot g=f\cdot g-\int f\cdot g'$$

部分積分

Ⅰ　$x\times$ ●型 ⇒ x を微分して消去する部分積分

Ⅱ log× 型 ⇒ log を微分して消去する部分積分

Ⅲ $e^{▲}\times\sin$■，$e^{▲}\times\cos$■

⇒ ①2 回部分積分，② セットで 1 回ずつ部分積分，③ 積の微分

置換積分公式

$t=$（x の式）と置換するとき，

Step I ： dx を dt で表す

Step II：x の区間を t の区間に直す

Step III：全体を t に関する積分で表す

置換積分

Ⅰ　$\sin^{\text{奇数}} x\Rightarrow t=\cos x$

　$\cos^{\text{奇数}} x\Rightarrow t=\sin x$

Ⅱ $\sqrt{r^2-x^2}\Rightarrow x=r\sin\theta$ とおく

　$\dfrac{1}{x^2+a^2}\Rightarrow x=a\tan\theta$ とおく

Ⅲ　$t=$（ かたまり ）とおく

数 III 積分③

x 軸回転体体積

$y=f(x)$ と x 軸の間 $(a \leqq x \leqq b)$ の部分を
x 軸の周りに回転してできる体積 V_x は,

$$V_x=\int_a^b \pi y^2 dx$$

例題 226

曲線 $y=e^x+e^{-x}$ と 2 直線 $x=0$, $x=1$ と x 軸で囲まれた部分が, x 軸の周りに 1 回 転してできる回転体の体積 V を求めよ。

y 軸回転体体積

$x=g(y)$ と y 軸の間 $(a \leqq y \leqq b)$ の部分を y 軸の周りに回転してできる体積 V_y は,

$$V_y=\int_a^b \pi x^2 dy$$

例題 227

次の曲線または直線で囲まれた部分が, y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。 $x=y^2-1$, y 軸

区分求積法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

例題 228

極限値 $S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ を求めよ。

曲線の長さ

(ｉ) 曲線 $x=f(t),\quad y=g(t)(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ の長さ s は，

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$$

(ii) 曲線 $y=f(x)(a\leqq x\leqq b)$ の長さ s は

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

例題 229

(1) 曲線 $y=x\sqrt{x}\quad(0\leqq x\leqq 4)$ の長さ s を求めよ。

(2) 曲線 $x=\frac{2}{3}t^3,\quad y=t^2(0\leqq t\leqq 1)$ の長さ s を求めよ。

平面上の点の運動の速度，加速度

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を $(x,\ y)$ とする。

$x=f(t),\ y=g(t)$ とすると，

位置ベクトル　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$

速度ベクトル $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(f'(t),\ g'(t))$

速さ $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

加速度ベクトル $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t),\ g''(t))$

加速度ベクトルの大きさ

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$$

平面上の運動における道のり

座標平面上で， 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が曲線 C 上を動き， $x,\ y$ が時刻 t の関数として

$x=f(t),\quad y=g(t)\quad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$　と表されているとする。

点 P の時刻 t における速度を $\vec{v}$ とすると.

道のり $s=\displaystyle\int_\alpha^\beta |\vec{v}|dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}dt$

近似式

x が a に十分近い値のとき $f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$

定積分と不等式

$f(x),\ g(x)$:$a \leqq x \leqq b$ で連続な関数とする。

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqq 0$

(ii) $f(x) \geqq g(x) \Longrightarrow \displaystyle\int_a \mathrm{f}(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$

等号成立は $f(x)=g(x)$ が恒等的に成り立つとき

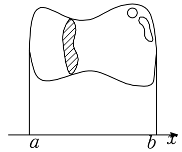
非回転体体積（x 軸）

Step Ⅰ x 軸に垂直に切る

Step Ⅱ 切り口の断面積 $S(x)$ を x で表す。

Step Ⅲ それを積分すれば体積 V

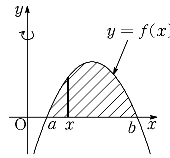
$$V=\int_a^b S(x)dx$$



バウムクーヘン分割

$y=f(x)$ と x 軸との間 $(a \leqq x \leqq b)$ の部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$$



斜回転体体積

$y=f(x)$ と $y=(\tan\theta)x$ の間 $(a \leqq x \leqq b)$ の部分を $y=(\tan\theta)x$ の周りに回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\int_a^b \pi \mathrm{PQ}^2 \cos\theta dx$$