

6/14

$\frac{6}{28}$ $\Rightarrow$ 5おとて
10に
22

α

[1] 次の極限が、「収束する」場合には極限值を求め、 ∞ に発散する場合には「 ∞ 」、 $-\infty$ に発散する場合には「 $-\infty$ 」、また、これら以外の場合には「極限なし」と解答欄に記入しなさい。解答欄に解答のみ記入すること。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(n+1)(n+3)} - \sqrt{n(n+2)} \}$

$$\frac{(\sqrt{n+1} \sqrt{n+3}) - (\sqrt{n} \sqrt{n+2})}{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n(n+2)}} = \frac{2 + \frac{2}{n}}{2\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{2 + \frac{2}{n}}{2\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}}$$

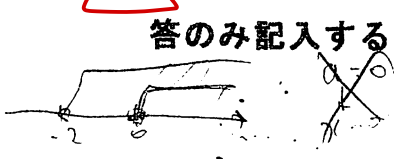
(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \sin^2 x}$ $\leftarrow \frac{0}{0}$ 不定形

計算が面倒です

二重OK

[2] 無限級数 $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^3} + \dots (x \neq -1)$ について、次の問いに答えなさい。

(1) この無限級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めなさい。解答欄に解答のみ記入すること。



初項 x , $|r| < 1$
 $-1 < r < 1$ or $-1 < \frac{1}{1+x} < 1$

check this?

(i) $-1 < \frac{1}{1+x} < 1$
 $x > -2$
(ii) $\frac{1}{1+x} < 1$
 $x > 0$

(2) (1) で求めた x の範囲において、無限級数の和 $f(x)$ を求め、関数 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

$-1 < r < 1$
 $-1 < \frac{1}{1+x} < 1$
 $-1 < \frac{1}{1+x} < 1$
(i) $-1 < \frac{1}{1+x} < 1$
(ii) $-1 < \frac{1}{1+x} < 1$
(iii) $-1 < \frac{1}{1+x} < 1$

$f(x) = \frac{a}{1-r}$
 $f(x) = \frac{x}{1 - \frac{1}{1+x}}$
 $f(x) = \frac{x(1+x)}{1+x-1}$
 $f(x) = \frac{x(1+x)}{x}$
 $f(x) = 1+x$

不等式の両辺に...
符号不明なものをかけるとはダメ

$a=0$
または
 $-1 < r < 1$

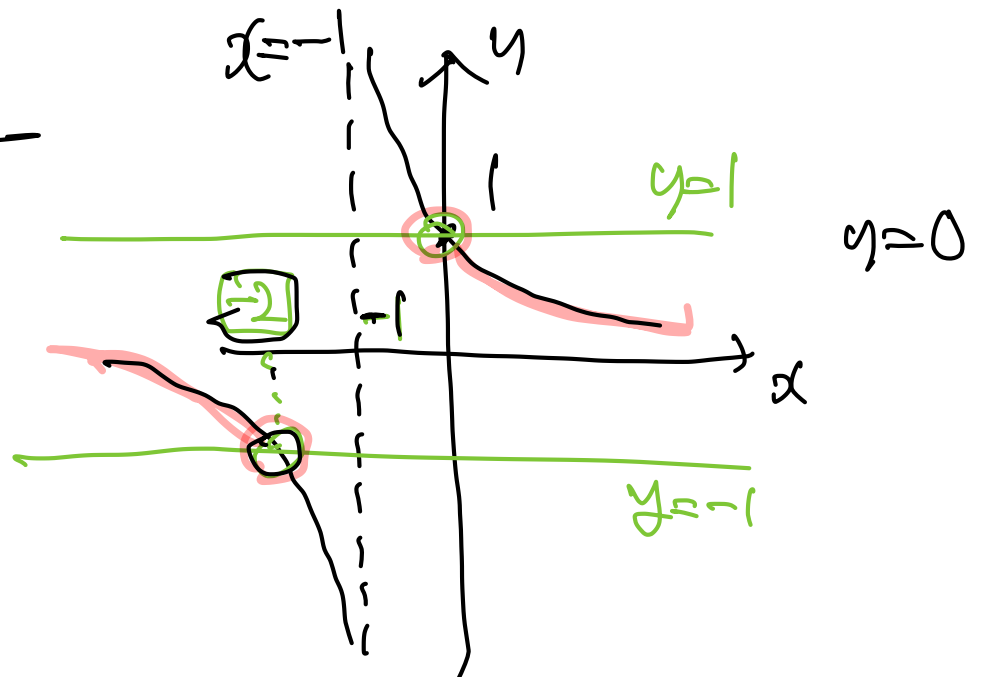
$y = x + 1$
 $y = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (2x-1)}{x \sin^2 x}$

$-1 < \frac{1}{1+x} < 1$

① ② ③ の符号2場合分け
① $(1+x)^2$ を分母
② $(1+x)$ の利用

$$y = \frac{1}{1+x}$$



$$x < -2, x > 0 \quad \text{---} \quad (\text{区})$$

これとこれと $x=0$ とあわせて?

$$\underline{x < -2, x \geq 0}$$

無限等比数列

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

収束条件は $a=0$ または $-1 < r < 1$

$$\text{和は} \quad \frac{a}{1-r}$$

1 (2)

$\frac{0}{0} \Rightarrow \text{不定}$

~~(2)~~ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cancel{\sin x}(\cos x - 1)}{x \cdot \cancel{\sin x}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1)}{x \cdot \sin x} \leftarrow \frac{0}{0} \text{ (不定, 公式, 微分の定理)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2x \frac{1 - \cos x}{x \cdot \sin x} \right)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

cosの公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \quad C^2 + S^2 = 1$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2x \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2x \frac{\sin^2 x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right)$

$= -2 \times 1 \times \frac{1}{2} = -1$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2x \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{x}{\sin x} \right)$

$= -2 \times \frac{1}{2} \times 1 = -1$

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

~~(2)~~ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{x \sin^2 x}$

[3] 2つの関数 $f(x) = \frac{2x+a}{x+1}$, $g(x) = \frac{3x+b}{x+c}$ について次の問いに答えなさい。

ただし、 a, b, c は定数とする。

(1) 関数 $y = (f \circ g)(x)$ の表す曲線 C が、双曲線 $y = \frac{9}{x}$ を平行移動したものであり、

直線 $x = -2$ および $y = 3$ を漸近線にもつとき、 a, b, c の値を求めなさい。

解答欄に解答のみ記入すること。

(2) x が不等式 $g(x) + x + 8 \leq 0$ を満たすための必要十分条件は、

$$x \leq \boxed{\text{ア}} \quad \text{または} \quad -11 < x \leq \boxed{\text{イ}}$$

である。 $\boxed{}$ に適する数値を入れなさい。解答欄に解答のみ記入すること。

$$(f \circ g)(x)$$

$$(1) \quad y = (f \circ g)(x)$$

$$y = \frac{9}{x}$$

$$y = \frac{9}{x-2} + 3$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{2\left(\frac{3x+b}{x+c}\right) + a}{\left(\frac{3x+b}{x+c}\right) + 1}$$

$$\frac{2(3x+b) + a(x+c)}{(3x+b) + (x+c)} = \frac{9}{x-2} + 3$$

$$= \frac{9 + 3(x-2)}{x-2}$$

$$\frac{2(3x^2 + (b+3c)x + bc) + a(x^2 + 2cx + c^2)}{3x^2 + (b+3c)x + bc + (x^2 + 2cx + c^2)} = \frac{3x^2 + 3x - 6 + 3x - 6}{x-2}$$

$$c = -\frac{9}{5} \quad a = -3$$

$$b + c = -8$$

$$b = -c - 8$$

$$\frac{9}{5} - \frac{8}{5} = -\frac{1}{5}$$

不要

What?

分母型不等式
 $\Rightarrow$ 分母を2にかける
 分母を0に変換

$$\frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b}$$

[6] $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) について、次の問いに答えなさい。

(1) $y = f(x)$ の増減、極値を調べ、グラフをかきなさい。

(2) $a < b$ かつ $a^b = b^a$ を満たす自然数 a, b の組 (a, b) をすべて求めなさい。

(2, 4)

(3) すべての正の実数 x に対して、 $x^k \leq k^x$ となる正の実数 k の値を求めなさい。

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$1 - \log x = 0$$

$$\log x = 1$$

$$x = e$$

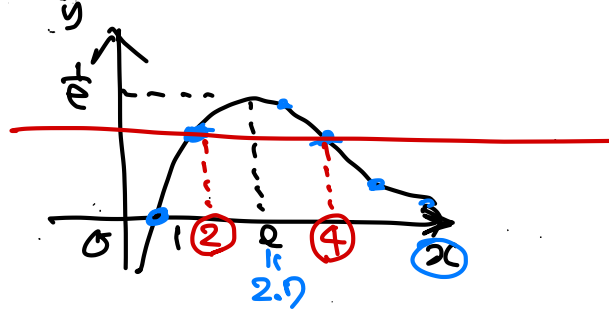
$$1 - \log x > 0$$

$$\log x < 1$$

$$x < e$$

$$\log x < \log e$$

$$f(e) = \frac{\log e}{e} = \frac{1}{e}$$



$$\log a^b = \log b^a$$

$$b \log a = a \log b$$

$$\log a = \frac{a \log b}{b}$$

2024 年度 6年 理系数学α 1学期中間試験 解答用紙 2024年 5月実施

※1. 解答は、所定の欄に記入すること。解答欄を間違えて記入した場合には、不正解とする。

2 特に指示がない限り、考え方や途中式も記載すること。記載がない場合は、採点の対象外とするので留意すること。

1 2

[1](2) 0

[3](1) $a = -3, b = -\frac{21}{5}, c = -\frac{19}{5}$

[3](2) 3 1 -7

[4] (1) $f^{(4)}(x)$ は $x^3 \log x$ の第4次導関数
 $f^{(4)}(x) = \frac{6}{x}$
 $f^{(5)}(x)$ は $x^4 \log x$ の第5次導関数
 $f^{(5)}(x) = \frac{24}{x}$
 (2) $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)(n-1)!}{x}$ 検

是件例の3の相違点

|r| < 1, a ≠ 0

[2](1) $x \geq 0$ 2

2 初項をa, 公比をrとする
 $f(x) = \frac{a}{1-r}$
 $a = x, r = \frac{1}{1+x}$ より
 $f(x) = \frac{x}{1 - \frac{1}{1+x}}$
 $= \frac{x}{\frac{(1+x)-1}{1+x}}$
 $= 1+x$
 $y = f(x)$ より $y = x+1$ ($x > 0$)

5

[5] (1)

x	0	1	e
$f'(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+	+	+
$f(x)$	1	1	1

漸近線は $x=0$
 変曲点は $(e, 1)$

$f'(x) = \frac{2 \log x}{x}$

1の前後
おかし

y = (log x)^2

(2) $(t, (\log t)^2)$ における接線の方程式は
 $y - (\log t)^2 = \frac{2 \log t}{t} (x - t)$
 $y = \frac{2 \log t}{t} (x - t) + (\log t)^2$
 また $(0, a)$ をとるのより
 $a = \frac{2 \log t}{t} (0 - t) + (\log t)^2$
 $= -2 \log t + (\log t)^2$
 $\therefore a = -2 \log t + (\log t)^2$

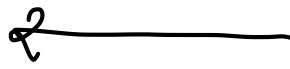
(3)

a ≤ 0

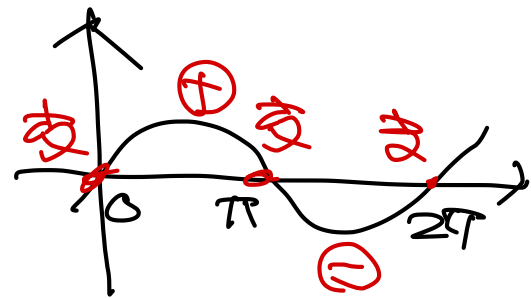
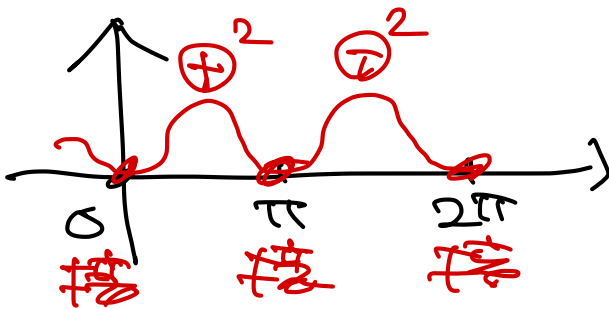
常用公式がわかる

~~常用公式~~

$$y = \sin^2 x$$



$$y = \sin x$$

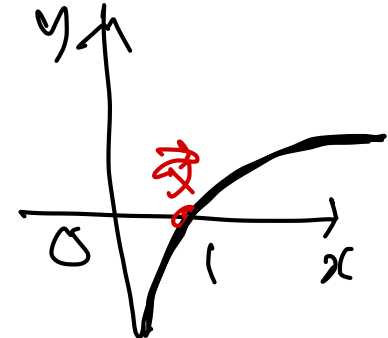
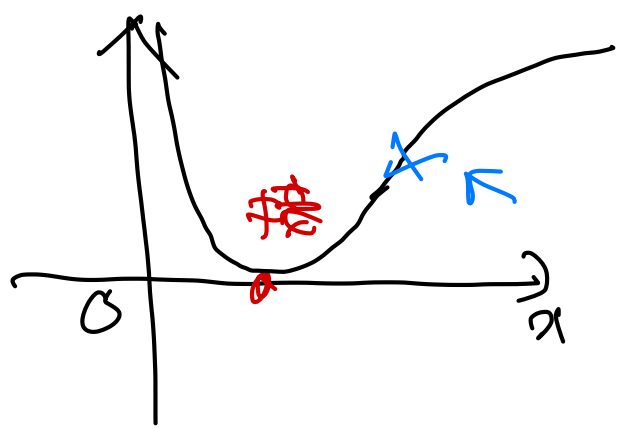


[5]

$$y = (\log x)^2$$



$$y = \log x$$



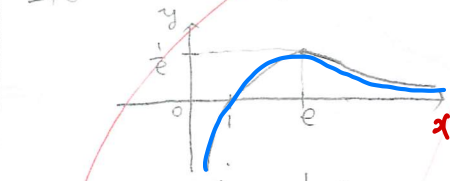
(1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$

(2) 積商・指数
 $\Rightarrow \log \Sigma \cup \cup$

$\frac{\log x}{x} \leq \frac{\log k}{k}$

[6] (1)

x	0	e	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		極大	



極値は $\frac{1}{e}$ [$x=e$ のとき]

(2) $a < b$ かつ $a^b = b^a$ [a, b は自然数]

$\log a^b = \log b^a$
 $b \log a = a \log b$
 $\frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b}$
 $\frac{\log 2}{2} = \frac{\log 4}{4}$
 $= \frac{2 \log 2}{4}$
 $= \frac{2 \log 2}{2}$

解
 範囲

$(a, b) = (2, 4)$
 $\downarrow$
 「全2」求めるという
 要式には答2と2のみ

(3) $x^k \leq k^x$ [x, k は正の実数]

$\log x^k \leq \log k^x$
 $k \log x \leq x \log k$
 $\log k \geq \frac{k \log x}{x}$
 $= k \cdot \frac{\log x}{x}$
 $\therefore k = 2$

全部分離
 2と2のみ

[7] (1) $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$ [$x \geq 0$]

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}}e^{-x} + 2\sqrt{x}(-e^{-x})$
 $= \frac{-(2x-1)}{\sqrt{x}}e^{-x}$

$f''(x) = \frac{-2x-1}{2x\sqrt{x}}$

3

(2) は独立問題
 部分点がかせげる。

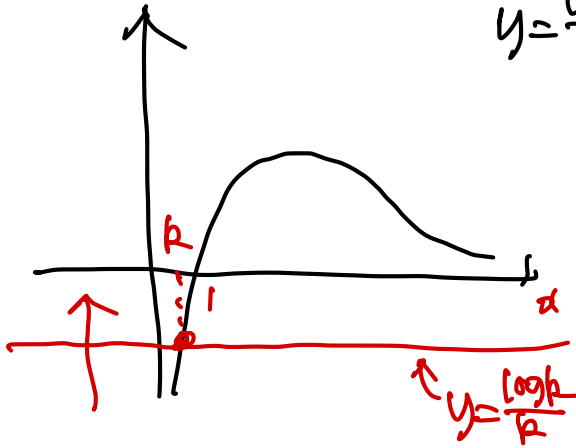
x	0	$\frac{1}{2}$	1	
$f'(x)$	+	0	-	-
$f''(x)$	+	-	-	0
$f(x)$		極大		極小



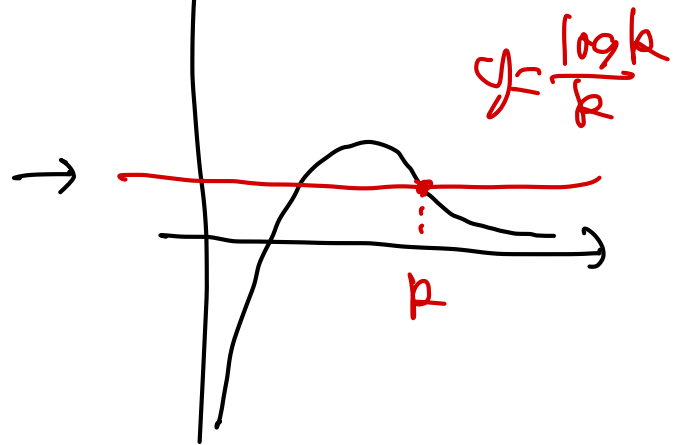
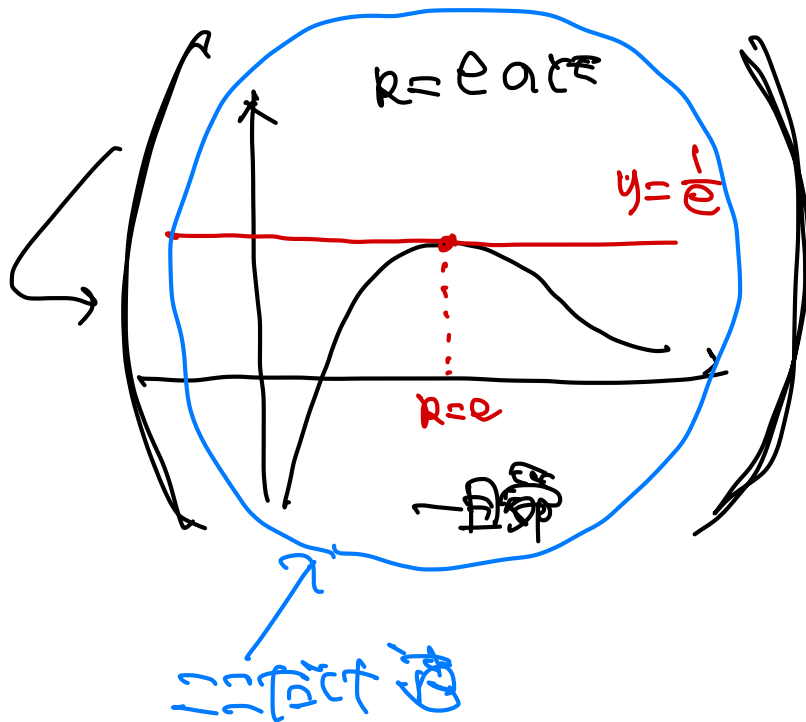
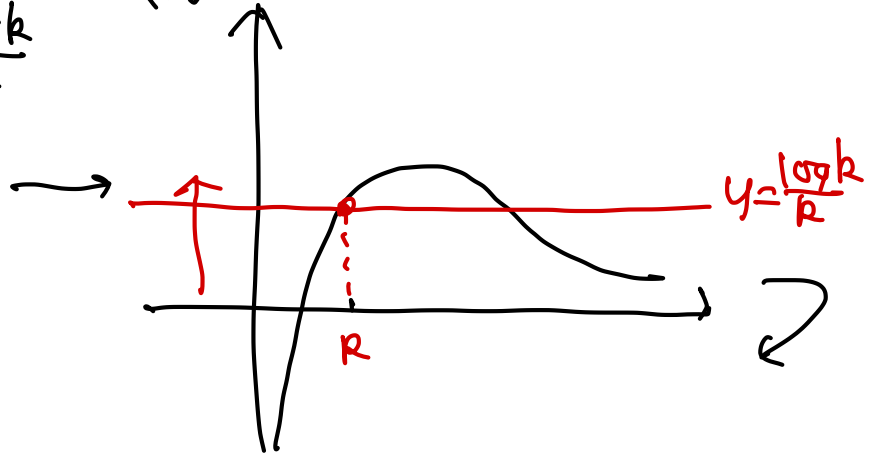
0
 7
 0
 12
 16
 17
 3

(i) $0 < k < 1$

$$y = \frac{\log k}{k}$$

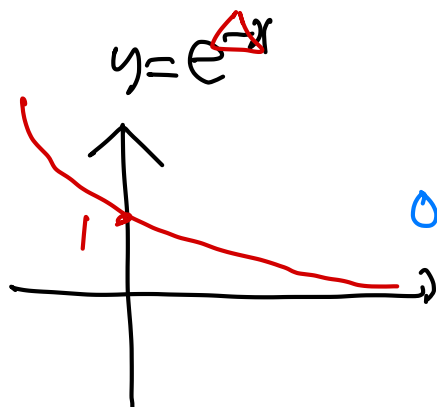
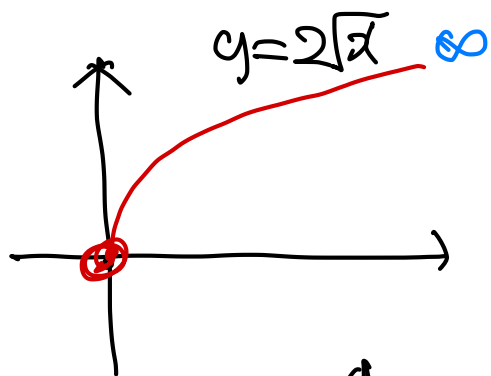


(ii) $1 < k < e$

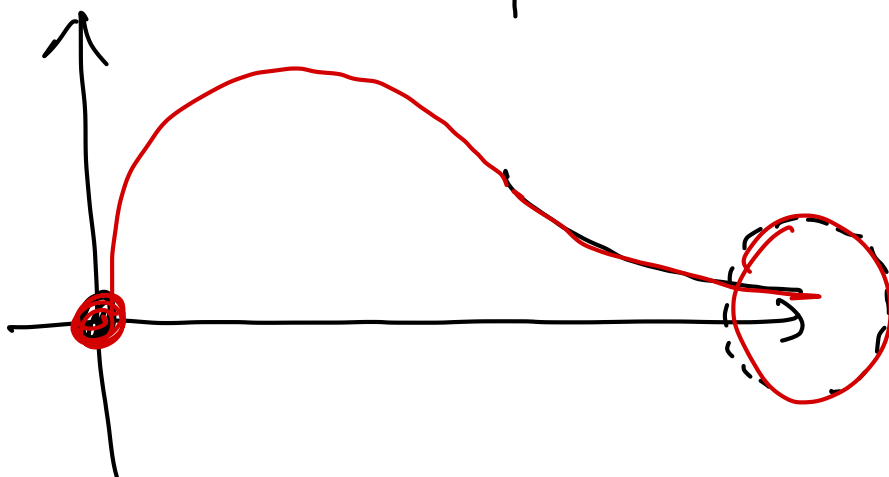


$$\underline{k = e}$$

⑦ $y = 2\sqrt{x} \cdot e^{-x} \quad (x \geq 0)$



$\Rightarrow$
 $\infty \times 0$
 $\parallel$
 0



[1]は、答えのみを解答用紙に書きなさい。[2]~[5]は考え方も解答用紙に書きなさい。

[I] 以下の[A],[B]に答えよ。

[A] (10点)

極方程式 $r = \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \theta}$ で表される曲線を C とする。

- (1) 曲線 C を直交座標の方程式に直せ。
- (2) 曲線 C の焦点を求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 $y = -x + k$ が $x < 0$ の範囲で接するとき、定数 k の値を求めよ。

[B] (10点)

複素数 α は $\alpha^4 = 128(-1 - \sqrt{3}i)$ を満たし、実部と虚部がともに正である。

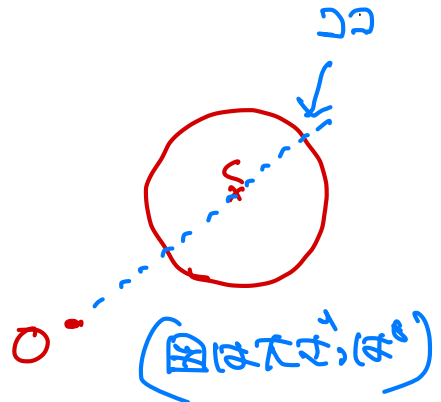
また、複素数 z, w は $w = \alpha z$ を満たし、点 z は複素数平面上で $1 - \sqrt{3}i$ を表す点を中心とする半径1の円上を動く。

- (1) α を求めよ。
- (2) 点 w はどのような円を描くか。中心と半径を答えよ。
- (3) w の絶対値 $|w|$ の最大値を求めよ。

$$|z - (1 - \sqrt{3}i)| = 1$$

$$|w - \square| = \square$$

$$|w - 0| : \text{点 } w \text{ と点 } 0 \text{ の距離}$$



直線
(1) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$

$x+y=s$, $xy=t$ とする

s, t は p を用いた二次方程式

$p^2 - sp + t = 0$ の2解

判別式 ≥ 0

$s^2 - 4t \geq 0$

$(x+y)^2 - 4xy \geq 0$

$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$(x-y)^2 \geq 0$

$x-y \geq 0$

$x \geq y$

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$

$x-3 \geq y-3$

$0 \leq (x-3)^2 \leq 8$, $0 \leq (y-3)^2 \leq 8$

(2) $(\alpha-3)^2 + (\beta-3)^2 = 8$

かつ
 $\alpha < \beta$

α, β は $x^2 - kx + \frac{5}{2} = 0$ の

2つの解

解と係数の関係より

$\begin{cases} \alpha + \beta = k \\ \alpha\beta = \frac{5}{2} \end{cases}$

$\alpha\beta = \frac{5}{2}$

$[\alpha < \beta]$

$(\alpha-3)^2 + (\beta-3)^2 = 8$

$\alpha^2 - 6\alpha + 9 + \beta^2 - 6\beta + 9 = 8$

$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta - 6(\alpha+\beta) + 10 = 0$

$k^2 - 5 - 6k + 10 = 0$

$k^2 - 6k + 5 = 0$

$(k-1)(k-5) = 0$

$k = 1, 5$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \text{ or } \alpha + \beta = 5 \\ \alpha\beta = \frac{5}{2} \end{cases}$

$\alpha\beta = \frac{5}{2}$

Max・minの
道具箱

(1) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$

直線 $x+y-s=0$ かつ

共通点2点条件 $d \leq r$ かつ

$\frac{|6-s|}{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2}$

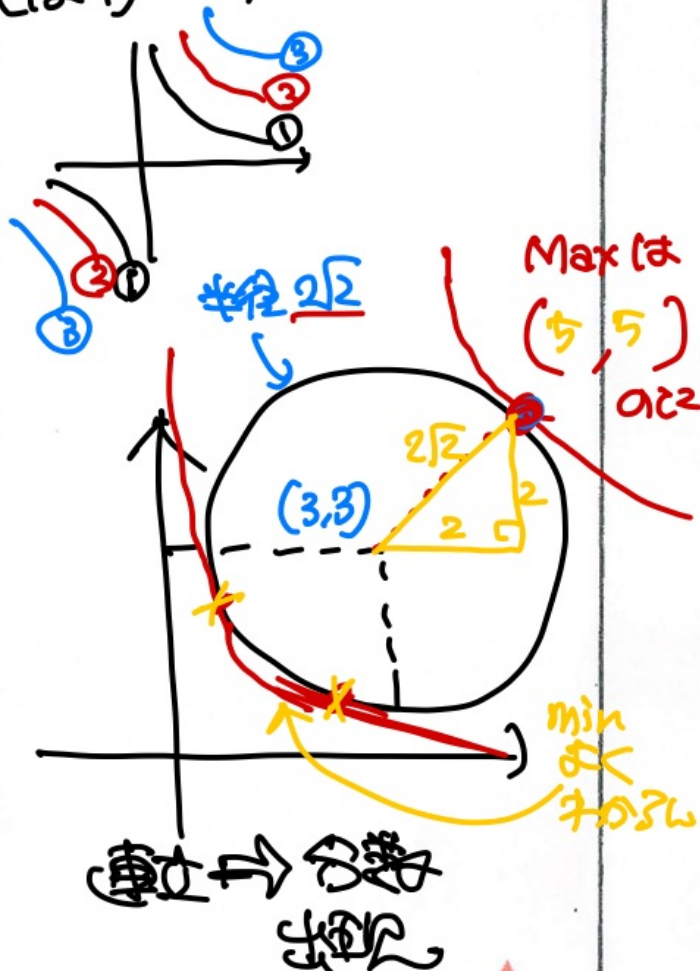
$|s-6| \leq 4$

$-4 \leq s-6 \leq 4$

$2 \leq s \leq 10$

(後半)

$xy=t$



(後半) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$ のもとで $t = xy$ の範囲を求めよ

円上の点 P $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos\theta + 3 \\ y = 2\sqrt{2}\sin\theta + 3 \end{cases}$ と表せる

$$t = \underbrace{x \cdot y}_{2\text{乗の}} = 8 \underbrace{\sin\theta \cos\theta}_{\text{積}} + 2\sqrt{2}(\underbrace{\sin\theta + \cos\theta}_{\text{和}}) + 9$$

↓ 変

$u = \sin\theta + \cos\theta$ とおく

$$u^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$t = 4(u^2 - 1) + 2\sqrt{2}u + 9 = 4u^2 + 2\sqrt{2}u + 5$$

ただし ~~変換~~ に注意

合成すると (略)

$$-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$$

あとは計算

別解 s, t に関する (対称性を利用)

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 0 \quad \leftarrow \text{交点式} \\ & \textcircled{2} s = x+y, t = x \cdot y \quad \text{とおく} \quad \leftarrow \text{和と積} \\ & s, t \text{ の条件を求めよう.} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} x^2 + y^2 - 6(x+y) + 10 = 0$$

$$(x+y)^2 - 2xy$$

$$s^2 - 2t - 6s + 10 = 0 \quad \text{---} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{また} \quad p^2 - sp + t = 0 \quad \text{も}$$

$$\text{判別式} \quad \Delta = s^2 - 4t \geq 0 \quad \text{---} \quad \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} \textcircled{3}$ より t について

$$s^2 - 2 \times (s^2 - 6s + 10) \geq 0$$

$$s^2 - 12s + 20 \leq 0$$

$$(s-2)(s-10) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq s \leq 10$$

4

4

(1) $x=1.7$ のとき $\{x\}=1$ なの？

$$\{x\} = x - [x] \text{ より } \{x\} = 1.7 - 1 = 0.7$$

$$x=1.7 \text{ より } 2x=3.4 \text{ なの？ } [2x]=3$$

$$\{2x\} = 2x - [2x] \text{ より } \{2x\} = 3.4 - 3 = 0.4$$

$$\therefore \{x\}=0.7, \{2x\}=0.4$$

$$(2) 4\{x\}^2 - \{2x\} - a = 0 \quad (*)$$

α が $(*)$ の解で "あるならば"

$$4\{\alpha\}^2 - \{2\alpha\} - a = 0$$

$$2\alpha \text{ とき, } \{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$$

$$\{2\alpha\} = 2\alpha - [2\alpha]$$

よって任意の整数 n について
 $\alpha+n$ も解に含まれる。

$\{\alpha+n\}$ と $\{2\alpha+2n\}$ について議論すべき

仮定 $x=\alpha$ が解

結論 $x=\alpha+n$ も解

これは easy

$$4\{\alpha+n\}^2 - \{2\alpha+2n\} - a = 0$$

を代入

(1) 2α が $(*)$ の解
 が point ... といこと
 がある。

自然に

$$\{\alpha+n\} = \{\alpha\}$$

$$\{2\alpha+2n\} = \{2\alpha\}$$

$$4\{\alpha+n\}^2 - \{2\alpha+2n\} - a$$

$$= 4\{\alpha\}^2 - \{2\alpha\} - a \leftarrow \text{ \# } \text{より}$$

$$= 0$$

5

9

(1) $\sqrt{2}$ が無理数でない、すなわち有理数であると仮定すると

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad [m, n \text{ は互いに素な自然数}] \text{ とおくとおける。}$$

$m > 0$ より 両辺に m をかけると

$$\sqrt{2} n = m \quad \dots ①$$

$$① \text{ の両辺を } 2 \text{ 乗すると } 2n^2 = m^2 \quad \dots ②$$

2 のとき m^2 は 2 の倍数であるから m も 2 の倍数である。

よって m は自然数 l を用いて

$$m = 2l \quad [l \text{ は任意の自然数}] \quad \dots ③ \text{ とおける。}$$

227: ③ を ② に代入すると

$$2n^2 = (2l)^2 = 4l^2$$

2 のとき $n^2 = 2l^2$ より n^2 は 2 の倍数であるから n は 2 の倍数である。

よって m と n はともに 2 の倍数であるため m と n が互いに素な自然数であるという矛盾が生じる。

したがって、 $\sqrt{2}$ は有理数ではない。

(2) ある自然数 N , N の平方根となる有理数を $\frac{a}{b}$ [a, b は任意の自然数] とする。

$$\frac{a}{b} = \sqrt{N}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = N$$

$$a^2 = b^2 N$$

$$\text{Aim } b=1$$

b^2 は a^2 の約数

$\therefore b$ と a は互いに素

$$\therefore b^2 = 1$$

$$b > 0 \text{ より } b=1$$

$$(3) \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = l \quad (l \neq 0 \text{ 整数})$$

(m, n は互いに素な整数)

対称性より $l > 0$

m, n : 自然数 と 2 も一般性を失わない。

xmn

$$m^2 - n^2 = l \cdot mn$$

存在しない

存在あり

矛盾

さがる

$$m^2 = n(n + lm)$$

n は m^2 の約数

m, n は互いに素

$$n=1$$

$$m^2 = 1 + lm$$

$$m(m-l) = 1$$

$$m=1$$

$l=0$ となる矛盾。

C 問題

②C-3-1

 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式・不等式を解け。

(1) $\sin\left(-2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

(2) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$

(3) $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sin\theta + 1 \geq 2\cos^2\theta$

(1) $\frac{\pi}{12}, \frac{3}{4}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{7}{4}\pi$

(3) $\frac{7}{12}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi, \frac{19}{12}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$

(2) $\frac{5}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$

(4) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi, \theta = \frac{3}{2}\pi$

 (解き方) (1) $-\frac{11}{3}\pi < -2\theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$ より、

$$-2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

のとき $\theta = \frac{\pi}{12}$

$$-2\theta + \frac{\pi}{3} = -\frac{7}{6}\pi$$

のとき $\theta = \frac{3}{4}\pi$

$$-2\theta + \frac{\pi}{3} = -\frac{11}{6}\pi \text{ のとき } \theta = \frac{13}{12}\pi$$

$$-2\theta + \frac{\pi}{3} = -\frac{19}{6}\pi \text{ のとき } \theta = \frac{7}{4}\pi$$

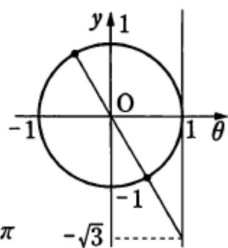
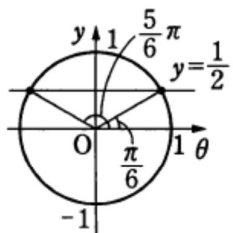
(2) $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ より、 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi$

のとき $\theta = \frac{5}{12}\pi$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{3}\pi$$

のとき $\theta = \frac{17}{12}\pi$

(3) $-\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{11}{3}\pi$



$$\frac{5}{6}\pi < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{7}{6}\pi$$

のとき $\frac{7}{12}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi$

$$\frac{17}{6}\pi < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{19}{6}\pi$$

のとき $\frac{19}{12}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$

(4) $\sin\theta + 1 \geq 2\cos^2\theta$

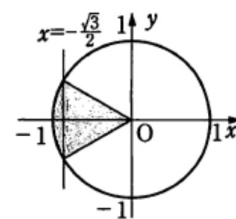
$$\sin\theta + 1 \geq 2(1 - \sin^2\theta)$$

$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 \geq 0$$

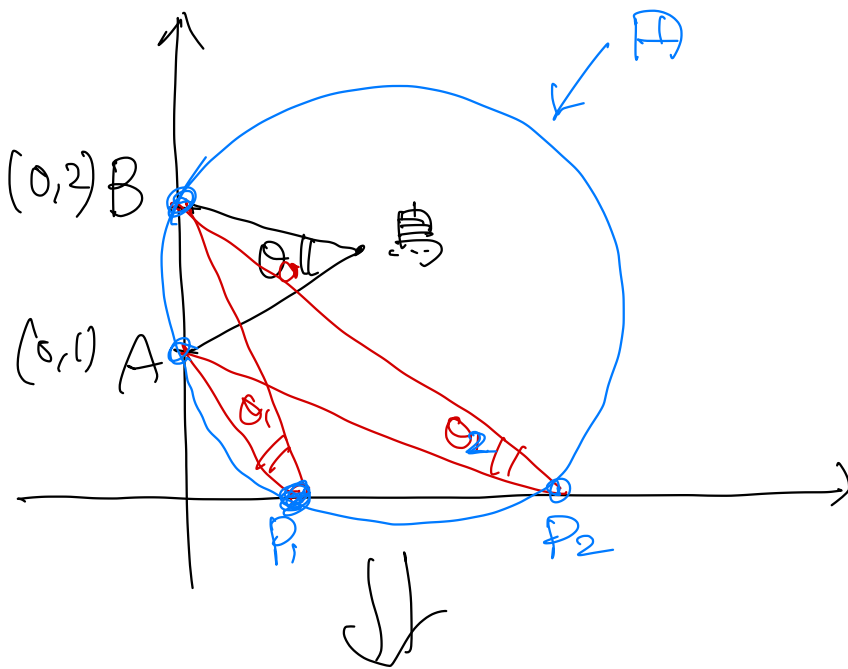
$$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \geq 0$$

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \text{ より } \sin\theta = -1, \frac{1}{2} \leq \sin\theta \leq 1$$

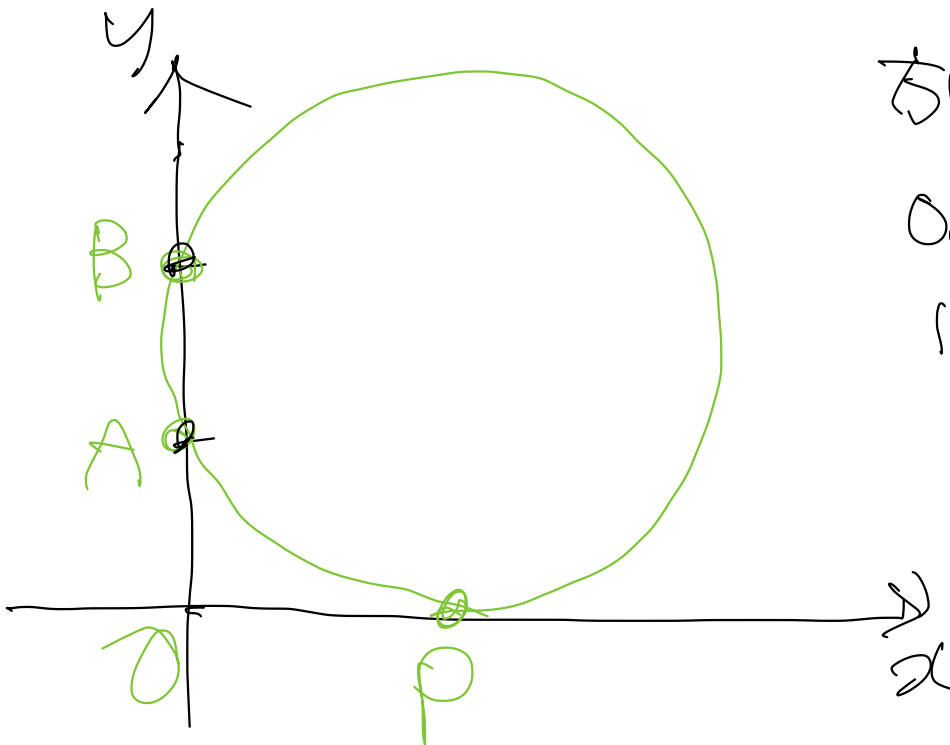
これを解く。



C-3-6



$$Q_1 = Q_2$$



$$OA \times OB = OP^2$$

$$1 \times 2 = a^2$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

週テスト（科目：数学 講師名：山中）★

問題

【1】

問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字(0～9), または負の符号(-)が入る。ア, イ, ウ, …の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応する。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ において、 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさを、それぞれ A , B , C , また、それらの角の対辺の長さを、それぞれ、 a , b , c で表すことにする。 $a=3$, $b=6$, $c=7$ のとき、 $\cos C = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ となり、 $\triangle ABC$

の面積 S は $S = \boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。また、この三角形の外接円の半径 R_1 は $R_1 = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$

であり、内接円の半径 R_2 は $R_2 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

- (2) 次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$y - 2x + 4 \geq 0, \quad 4x - y^2 \geq 0$$

点 $P(x, y)$ がこの領域 D 内を動くとき、 $2x + y$ の最大値は $\boxed{\text{スセ}}$ であり、この最大値を与える点 P の

座標は $(\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}})$ となる。また、 $2x + y$ の最小値は $\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であり、この最小値を与える点 P

の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \boxed{\text{ニヌ}} \right)$ となる。

【2】

問題の文中の ア , イウ などには, 特に指示がないかぎり, 数字(0～9), または負の符号(-)が入る。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応する。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えよ。

- (1) 5040 を素因数分解すると

$$5040 = 2^{\text{ア}} \times 3^{\text{イ}} \times \text{ウ} \times \text{エ}$$

となる。ただし, ウ < エ とする。5040 の正の約数は オカ 個ある。また, 5040 の正の約数の和は キクケコサ である。

- (2) 虚数単位を i とするとき,

$$(1+2i)x+5-3i=0$$

を満たす複素数 x は

$$x = \frac{\text{シ}}{\text{ス}} + \frac{\text{セソ}}{\text{タ}} i$$

である。

- (3) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 5x} - \sqrt{\cos 3x}}{x^2} = \text{チツ}$$

週テスト(科目:数学 講師名:山中)★

問題

【3】

問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$ などには, 特に指示がないかぎり, 数字(0~9), または負の符号(-)が入る。ア, イ, ウ, …の一つ一つは, これらのいずれか一つに対応する。それらを解答用紙のア, イ, ウ, …で示された解答欄にマークして答えよ。

式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ で表わされる楕円 C と, その内部にある点 $A\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{7}\right)$ を通る直線との交点を P, Q とする。

楕円 C の焦点の 1 つは $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ である。

点 $P(a, b)$ における楕円 C の接線 T は

$$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{ウ}}}x + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{エ}}}y = 1$$

と表される。点 $Q(c, d)$ における楕円 C の接線と T が交点 S を持つとき, S の座標は

$$(x, y) = \left(\frac{\boxed{\text{オカ}}}{ad - bc}b + \frac{\boxed{\text{キ}}}{ad - bc}d, \frac{\boxed{\text{ク}}}{ad - bc}a - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{ad - bc}c \right)$$

となる。また, 3 点 A, P, Q は一直線上にあるので

$$ad - bc = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}a + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}b - \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}c - \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}d$$

が成り立つ。したがって, 点 P が楕円 C 上を一周するとき点 S の座標は

$$\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナ}}}x + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}y = 1$$

を満たす。

【4】

問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ， $\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字(0～9)，または負の符号(-)が入る。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応する。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えよ。

原点 O から点(1, 0)へ等速で x 軸上を動く点 $P(t, 0)$ と，点(0, 8)から原点 O へ P の 8 倍の速さで y 軸上を動く点 Q がある。2 点 P，Q は同時に動き始めるものとする。

(a) 線分 PQ の長さが最小になるのは $t = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ のときであり，このとき $PQ = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}} \sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$ となる。

(b) 線分 PQ 上の点 $R(x, y)$ を考える。 t が 0 から 1 まで変化するとき，R の各 x 座標に対して y 座標の最大値を求めると

$$y = \boxed{\text{コ}} (1 - x^r)^{\boxed{\text{サ}}} \dots\dots\dots (*)$$

を得る。ここで $r = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(c) 線分 PQ が通過する領域の面積は $\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(d) 式(*)で表される曲線上の点 T のうち，原点 O にもっとも近いのは T の x 座標が $\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ のときで

ある。このとき $OT = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}} \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ となる。