すうがく♪ちゃちゃちゃ！

②

数学ⅡB 篇

【解答】

第１章　図形と式（１）

《学習項目》

・点　２点間距離公式（三平方の定理），内分・外分公式
・直線　$y=mx+n$ 型　⇒傾き
・直線　$ax+by+c=0$ 型
　　⇒方向ベクトル，法線ベクトル，
・点と直線の距離公式
・２直線の平行・垂直　（傾き利用　または　法線ベクトル利用）
・円　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
　　⇒円のパラメータ表示，円の接線公式，直線との位置関係，２つの円の位置関係
・円と直線⇒（円の中心と直線の距離）と（半径）の関係に帰着することが多い
・グラフの平行移動・対称移動・軸方向への拡大縮小（⑧で扱う）
・曲線束

A 問題

②A-1-1

A$(-2,\ -3)$，　B$(3,\ 7)$，　C$(5,\ 2)$とするとき，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を $4:1$ に内分する点　　(2)　線分 BC を $2:3$ に外分する点

(3)　線分 CA の中点　　(4)　$\triangle$ABC の重心

(5)　線分 AB の長さ

解答　(1)　$(2,\ 5)$　(2)　$(-1,\ 17)$　(3)　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$　(4)　$(2,\ 2)$　(5)　$5\sqrt{5}$

②A-1-2

次のような直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(3,\ -4)$ を通り，傾きが -2 の直線
(2)　２点 $(-4,\ 3)$，$(6,\ -3)$ を通る直線
(3)　点 $(5,\ -6)$ を通り，x 軸に垂直な直線
(4)　２点 $(8,\ 0)$，$(0,\ 7)$ を通る直線

解答　(1)　$y=-2x+2$　(2)　$y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3}{5}$　(3)　$x=5$　(4)　$\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{7}=1$

②A-1-3

原点と直線 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{15}{4}$ の距離を求めよ。

解答　3

②A-1-4

A$(-4,\ 4)$，　B$(-2,\ 0)$，　C$(5,\ 7)$とするとき，次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 A を中心とし，点 B を通る円
(2)　２点 A，B を直径の両端とする円
(3)　３点 A，B，C を通る円 S
(4)【B 問題】　点 $(2,\ 3)$ を中心とし，(3) の円 S に内接する円

解答　(1)　$(x+4)^2+(y-4)^2=20$　(2)　$(x+3)^2+(y-2)^2=5$

(3)　$x^2+y^2-2x-8y-8=0$　(4)　$(x-2)^2+(y-3)^2=(5-\sqrt{2})^2$

②A-1-5
円 $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ …… ① がある。次のような円 ① の接線の方程式を求めよ。
(1) 円 ① 上の点 $(1,\ 7)$ における接線。
(2) 傾きが 1 の接線。このときの接点の座標も求めよ。

解答 (1) $3x+4y-31=0$ (2) $y=x+5+5\sqrt{2}$，接点 $\left(-\dfrac{4+5\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{6+5\sqrt{2}}{2}\right)$；
$y=x+5-5\sqrt{2}$，接点 $\left(-\dfrac{4-5\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{6-5\sqrt{2}}{2}\right)$

②A-1-6
円 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 上の点 $(4,\ 6)$ における，この円の接線の方程式を求めよ。
解答 $3x+4y-36=0$

B 問題

②B-1-1
(1) 直線 $l : y=3x+2$ に関して，点 P$(3,\ 1)$ と対称な点の座標を求めよ。
解答 $(-3,\ 3)$
) 対称な点を Q$(a,\ b)$ とすると，PQ の中点が直線 $y=3x+2$ 上にあるから，
$\dfrac{b+1}{2}=3\left(\dfrac{a+3}{2}\right)+2$ …① PQ と l は垂直より $3\times\dfrac{b-1}{a-3}=-1$ …②
①，②を解いて $a=-3$，$b=3$ より，求める点は $(-3,\ 3)$

②B-1-2
平行な 2 直線 $3x-4y+4=0$ と $3x-4y-6=0$ の間の距離を求めよ。
解答 2
) $3x-4y+4=0$ 上の点 $(0,\ 1)$ と
$3x-4y-6=0$ の距離を求めて，
$\dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

②B-1-3
3 直線 $x+y-3=0,\ 2x-y+6=0,\ 3x+2y-12=0$ で囲まれる三角形の面積を求めよ。
解答 $\dfrac{21}{2}$
) 3 つの交点は P$(-1, 4)$，Q$(6,\ -3)$，
R$(0,\ 6)$ より，R が原点にくるように
△PQR を平行移動すると，
3 点は P′$(-1,\ -2)$，Q′$(6,\ -9)$，R′$(0,\ 0)$
に移る。よって，
$S=\dfrac{1}{2}|(-1)\times(-9)-(-2)\times6|=\dfrac{21}{2}$

②B-1-4
3 直線 $x+3y=0$，$-x+my=1$，$mx+2y=-1$ が三角形を作らないように，定数 m の値を定めよ。 ㊥関西学院大㊥
解答 $-3,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{2}$

解き方 (1) 3直線が三角形を作らないのは次の(i)，(ii)の場合である。

$$\begin{cases} x+3y=0 \cdots\cdots ① \\ -x+my-1=0 \cdots\cdots ② \\ mx+2y+1=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

(i) 直線③が①，②の交点を通る。

$m \neq -3$ のとき，交点 $\left(-\frac{3}{3+m}, \frac{1}{3+m}\right)$

③がこれを通るから，

$m\left(-\frac{3}{3+m}\right)+2\left(\frac{1}{3+m}\right)+1=0$ より，$m=\frac{5}{2}$

$m=-3$ のとき，①と②は平行になる。

(ii) ①と②が平行。

傾きが等しいから $-\frac{1}{3}=\frac{1}{m}$ より，$m=-3$

①と③が平行。$-\frac{1}{3}=-\frac{m}{2}$ より，$m=\frac{2}{3}$

②と③が平行。

$\frac{1}{m}=-\frac{m}{2}$ より，$m^2=-2$ から不適

(i)，(ii) より，m の値は $\frac{5}{2}$，$\frac{2}{3}$，-3

②$\boxed{\text{B-1-5}}$

(2) 点 A$(-2,\ -2)$ を通り，点 B$(1,\ 2)$ からの距離が $\sqrt{5}$ である直線の方程式を求めよ。

解答 $\boldsymbol{x-2y-2=0,\ 11x-2y+18=0}$

(2) 点 $(-2,\ -2)$ を通り，傾き m の直線は，

$y+2=m(x+2)$

$mx-y+2m-2=0$

点 B$(1,\ 2)$ からこの直線までの距離が $\sqrt{5}$ であるから，

$$\frac{|m-2+2m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

$|3m-4|=\sqrt{5m^2+5}$

$(3m-4)^2=5m^2+5$

$9m^2-24m+16=5m^2+5$

$4m^2-24m+11=0$

$(2m-1)(2m-11)=0$

$m=\frac{1}{2},\ \frac{11}{2}$

$m=\frac{1}{2}$ のとき，$\frac{1}{2}x-y+1-2=0$

$x-2y-2=0$

$m=\frac{11}{2}$ のとき，$\frac{11}{2}x-y+11-2=0$

$11x-2y+18=0$

②$\boxed{\text{B-1-6}}$

2直線 $x+2y-3=0$，$2x-y-1=0$ のなす角の2等分線の方程式を求めよ。

解答 $\boldsymbol{3x+y-4=0,\ x-3y+2=0}$

2直線のなす角の2等分線は2直線からの距離が等しい点の集合である。

$\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}$ から，

$x+2y-3=\pm(2x-y-1)$

よって，$3x+y-4=0$，$x-3y+2=0$

②$\boxed{\text{B-1-7}}$

平面上の3直線 $x+2y-5=0$，$2x-3y+4=0$，$mx+y=0$ が三角形を作り，その面積 S が $\frac{7}{3}$ となるような m の値を求めよ。

千葉工業大・改

解答 $\boldsymbol{m=-\frac{8}{9},\ 2}$

3交点は，(1，2)，

$\left(-\dfrac{4}{3m+2},\ \dfrac{4m}{3m+2}\right)$，$\left(\dfrac{5}{1-2m},\ \dfrac{5m}{2m-1}\right)$，

(1，2) が原点に移るように平行移動すると他の2点は $\left(\dfrac{-3m-6}{3m+2},\ \dfrac{-2m-4}{3m+2}\right)$，

$\left(\dfrac{-2m-4}{2m-1},\ \dfrac{m+2}{2m-1}\right)$ に移る。

よって，

$S=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{7(m+2)^2}{(2m-1)(3m+2)}\right|=\dfrac{7}{3}$

$m<-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{2}<m$ のとき

$3(m+2)^2=2(2m-1)(3m+2)$

$9m^2-10m-16=0$　よって，$m=2,\ -\dfrac{8}{9}$

$-\dfrac{2}{3}<m<\dfrac{1}{2}$ のとき

$3(m+2)^2=-2(2m-1)(3m+2)$

$15m^2+14m+8=0$

これは実数解をもたない。

よって，$m=2,\ -\dfrac{8}{9}$

②$\boxed{\text{B-1-8}}$

点 (2，1) を通り，円 $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}$ に接する直線の方程式を求めよ。

◉東邦大◉

解答　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$，$y=3x-5$

点 (2，1) を通り，$x^2+y^2=\dfrac{5}{2}$ に接する直線の方程式を $y=ax+b$ とおく。

$(x,\ y)=(2,\ 1)$ を代入して $b=1-2a$ より，$y=ax+(1-2a)$……①

直線①と円の中心である原点 (0，0) との距離が半径 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ と等しい。

$\dfrac{|1-2a|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

両辺を2乗して整理すると，

$3a^2-8a-3=0$ から，$a=-\dfrac{1}{3}$，3

これを①へ代入する。

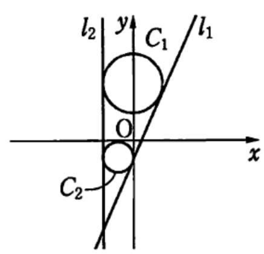
$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$，$y=3x-5$

②$\boxed{\text{B-1-9}}$

平面上の点 $O_1(0,\ 4)$ を中心とする半径2の円を C_1 とし，点 $O_2(-1,\ -1)$ を中心とする半径1の円を C_2 とする。いま，C_1，C_2 に同時に接する接線 l_1，l_2 を右図のようにとる。

(1)　l_1 と l_2 の交点Pの座標を求めよ。

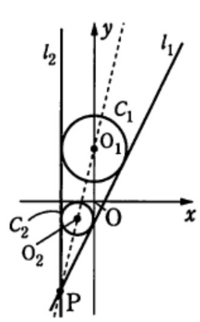
(2)　直線 l_1 の方程式を求めよ。　◉奈良女子大◉



解答　(1)　(−2，−6)　(2)　$y=\dfrac{12}{5}x-\dfrac{6}{5}$

(1)　右図より l_1，l_2 と2円の中心を結んだ直線 O_1O_2 は1点で交わる。したがって，Pの座標は

$l_2: x=-2$ と直線 $O_1O_2: y=5x+4$ の交点である。よって，P(−2，−6)



(2)　l_1 はP(−2，−6) を通るから，傾きを m とすると，$y=m(x+2)-6$ とおける。

この直線が円 C_1 に接するから，

$\dfrac{|2m-10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$ より，$|m-5|=\sqrt{m^2+1}$

よって，$m^2-10m+25=m^2+1$ から，

$m=\dfrac{12}{5}$

l_1 の方程式は $y=\dfrac{12}{5}(x+2)-6=\dfrac{12}{5}x-\dfrac{6}{5}$

②B-1-10

(1) 円 $x^2+y^2+2x-2y+k=0$ が y 軸と異なる 2 点で交わるとき，k のとる範囲を求めよ。　松阪大

(2) 直線 $y=-x+1$ が円 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ と共有する点の個数を求めよ。ただし，$a>0$ とする。　津田塾大

解答　(1) $k<1$

(2) $0<a<\frac{2-\sqrt{2}}{2}$，$\frac{2+\sqrt{2}}{2}<a$ のとき 0 個　$a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ のとき 1 個　$\frac{2-\sqrt{2}}{2}<a<\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき 2 個

解き方 (1) $x^2+y^2+2x-2y+k=0$
y 軸の方程式は $x=0$ より，これを代入して $y^2-2y+k=0$
この y が異なる実数解をもてばよい。
$D>0$ より，$k<1$

(2) $y=-x+1$ を $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ に代入して整理すると，
$2x^2-2x+(1-a)^2=0$
$D>0$ のとき 2 点で交わる。
$D=0$ のとき 1 点で接する。
$D<0$ のとき共有点は存在しない。

②B-1-11

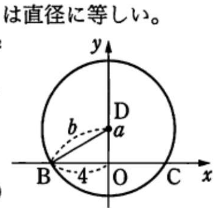
(1) 円 $x^2+y^2-2x-2y=0$ が直線 $y=2x-1$ から切り取る線分の長さを求めよ。　西日本工業大

(2) 点 A(4, 6) を通る円 $x^2+(y-a)^2=b^2$ ($b>0$ とする) がある。この円が x 軸と交わる点を B，C とする。線分 BC の長さが 8 であるとき，a，b の値を求めよ。　第一薬科大

解答　(1) $2\sqrt{2}$　(2) $a=3$，$b=5$

(1) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
直線 $y=2x-1$ は中心 (1, 1) を通るため，切り取る線分の長さは直径に等しい。

(2) $x^2+(y-a)^2=b^2$ が A(4, 6) を通るから，
$4^2+(6-a)^2=b^2$ ……①



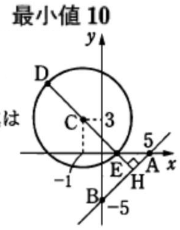
右の図の △OBD において，三平方の定理より，$b^2=a^2+16$……②
$b>0$ より，$a=3$，$b=5$

②B-1-12

xy 平面上の 2 定点を A(5, 0)，B(0, −5) とする。
円 $2x^2+4x+2y^2-12y-5=0$ 上に点 P をとるとき，△ABP の面積の最大値と最小値を求めよ。　関西大

解答　最大値 35，最小値 10

(1) 円の方程式は $(x+1)^2+(y-3)^2=\frac{5^2}{2}$ より，中心 (−1, 3)，半径 $\frac{5}{\sqrt{2}}$ の円である。線分 AB を底辺と考えるとき，高さが最大となるのは点 P が図において D の位置にあるときである。中心 C(−1, 3) と直線 AB の距離 CH は AB : $x-y-5=0$ より，



$\mathrm{CH}=\frac{|-1-3-5|}{\sqrt{2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$

また，円の半径は $\frac{5}{\sqrt{2}}$ より，高さの最大値は $\mathrm{DH}=\frac{9}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$

このときの面積は $\frac{1}{2}\times7\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=35$

同様に考えて高さが最小になるのは点 P が E の位置にあるときで，

$\mathrm{EH}=\frac{9}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ より，このときの面積は $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=10$

②B-1-13

2円 $x^2+y^2+x-2y-5=0$，$x^2+y^2-5x-5y+10=0$ の交点をA，Bとするとき，

(1) A，Bを通る直線の方程式を求めよ。

(2) A，Bと点C(0，−1)を通る円の方程式を求めよ。

解答　**(1) $2x+y-5=0$　(2) $3x^2+3y^2+x-7y-10=0$**

(1) $x^2+y^2+x-2y-5=0$ ……①

$x^2+y^2-5x-5y+10=0$ ……②

この2交点を通る直線は，①−②より，

$6x+3y-15=0$

よって，$2x+y-5=0$

(2) 2円の交点を通る円は，一般に，

$x^2+y^2-5x-5y+10+k(x^2+y^2+x-2y-5)=0$ ……①

これが点(0，−1)を通るから，これを代入して $k=8$ を得る。$k=8$ を①に代入して，両辺を3で割ると

$3x^2+3y^2+x-7y-10=0$

②B-1-14

点A(2，7)から円 $(x-1)^2+y^2=25$ に2本の接線を引く。2接点をP，Qとして，

(1) 線分APの長さを求めよ。

(2) P，Qを通る直線の方程式を求めよ。

解答　**(1) AP=5　(2) $x+7y-26=0$**

(1) 円の中心をRとすると，

AP⊥RP

$AR=\sqrt{(2-1)^2+(7-0)^2}=5\sqrt{2}$

三平方の定理より，$AR^2=AP^2+RP^2$ へ代入して，$(5\sqrt{2})^2=AP^2+5^2$　$AP^2=25$

AP>0より，AP=5

(2) 中心がA(2，7)，半径APの円を考えると，$(x-2)^2+(y-7)^2=25$ ……①

これはAP=AQより，点Qも通る。よって，

$(x-1)^2+y^2=25$ ……②とすると，①，②の交点P，Qを通る直線の方程式は①−②より，

$x+7y-26=0$

②B-1-15

2つの円 $C_1: x^2+y^2-\sqrt{3}x-y=a$ $(a>-1)$，$C_2: x^2+y^2=1$ について，

(1) C_1，C_2 が相異なる2点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2) (1)のとき，C_1 と C_2 の共通弦の長さを l とする。l の最大値とそのときの a の値を求めよ。　㊙東北工業大㊙

解答　**(1) $-1<a<3$　(2) $a=1$ のとき2**

(1) $C_1: \left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=a+1$ より，

中心 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，半径 $\sqrt{a+1}$

これより，2円が相異なる2点で交わるための条件は，

|半径の差|＜中心間の距離＜半径の和

より，$|1-\sqrt{a+1}|<1<1+\sqrt{1+a}$ から右の不等号はつねに成立するから左の不等号の成立条件を求める。

$|1-\sqrt{a+1}|<1$ の両辺は正であるから，2乗して，$1+a+1-2\sqrt{a+1}<1$ より，

$a+1<2\sqrt{a+1}$

さらに $a+1>0$ より，両辺を2乗して整理すると，$a^2-2a-3<0$ より，$-1<a<3$

(2) 2円の交点を通る直線は

$\sqrt{3}x+y+a-1=0$

この直線と円 $x^2+y^2=1$ の中心(0，0)の距離 d が最小のとき弦の長さは最大となる。

$d=\frac{|a-1|}{\sqrt{3+1}}$ より，$a=1$ のとき共通弦は中心を通り，弦の長さは直径と一致して，2となる。

C 問題

②C-1-1

3点 A(4, 0), B(0, 2), C(a, b) がある。点Cは第1象限にあり，△ABC は正三角形である。このとき a, b を求めよ。 ◎津田塾大◎

解答 (1) $a=2+\sqrt{3}$, $b=1+2\sqrt{3}$

C(a, b) は第1象限より

$a>0$, $b>0$……①

△ABC は正三角形だから AB=BC=CA

より，$BC^2=CA^2=AB^2$

$a^2+(b-2)^2=(a-4)^2+b^2=4^2+2^2=20$

$a^2+b^2-4b+4=a^2+b^2-8a+16$ から，

$8a-4b-12=0$　　$b=2a-3$

これを $a^2+b^2-8a+16=20$ へ代入して，

$a^2-4a+1=0$

①から，$a=2+\sqrt{3}$, $b=1+2\sqrt{3}$

(2) $AB^2=68$, $BC^2=(a-7)^2+9$,

$CA^2=(a+1)^2+25$

$AB^2=BC^2+CA^2$, $BC^2=AB^2+CA^2$,

$CA^2=AB^2+BC^2$ に代入して a を求める。

②C-1-2

放物線 $y=x^2$ 上の動点Pが，点 A(1, 1) と $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ との間を動くとき，△PAB の面積を最大にする点Pの x 座標を求めよ。

◎一橋大◎

解答 $\frac{1}{4}$

(1) P(t, t^2) とする。Bを原点に平行移動するとAは $A'\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ に移り，

Pは $P'\left(t+\frac{1}{2}, t^2-\frac{1}{4}\right)$ に移るから，

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}\left(t^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{8}t-\frac{3}{8}\right|=\left|\frac{3}{4}\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{27}{64}\right|$$

ここで $-\frac{1}{2}<t<1$ より，$t=\frac{1}{4}$ で最大となる。

②C-1-3

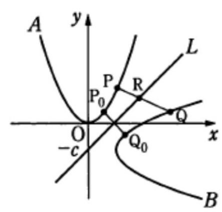
c を $c>\frac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点Pが放物線 A 上を動き，点Qが放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。 ◎東京大◎

解答 $\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$

直線$y=x-c$をLとおく。$c>\frac{1}{4}$より，

$x^2-(x-c)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+c-\frac{1}{4}>0$……①

であるから，AはLの上方にある。したがって，BはLの下方にあるので，線分PQはLと交わっている。その交点をRとおく。A上の点からLまでの距離の最小値をmとおくと，対称性よりB上の点からLまでの距離の最小値もmである。



このとき，

$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}+\mathrm{RQ}\geqq m+m=2m$……②

A上の点$(t,\ t^2)$からLまでの距離は，①より，$\frac{|t^2-(t-c)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2-t+c)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+c-\frac{1}{4}\right\}$

であるから，$t=\frac{1}{2}$で最小となり

$m=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(c-\frac{1}{4}\right)$である。つまり，

$P_0\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$とし，$L$に関して$P_0$と対称な点$Q_0$をとると，$P_0$，$Q_0$から$L$までの距離はともに$m$になるので，②の不等式の等号が成り立つ。よって，線分PQの最小値は

$2m=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$である。

②$\boxed{\text{C-1-4}}$

　mを定数とするとき，x，yの方程式$x^2+y^2-2mx-2m-2=0$が表す円について，次の問いに答えよ。

(1)　この円は定数mの値に関係なくある定点を通る。その定点の座標を求めよ。

(2)　この円の半径を最小にする定数mの値を求めよ。
また，そのときの円の中心の座標と半径を求めよ。

(3)　2直線$y=x$，$y=-x$がともにこの円に接するように，定数mの値を定めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

(4)　(3)において，この円の外部にあって，円の弧と2直線$y=x$，$y=-x$とで囲まれる部分の面積を求めよ。

㊗早稲田大㊗

解答　**(1)　$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$　(2)　$m=-1$，中心$(-1,\ 0)$，半径1**

(3)　$m=-2$，接点$(-1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$　(4)　$2-\frac{\pi}{2}$

(1)　$x^2+y^2-2-2m(x+1)=0$

mの値に関係なく成立するから，

$x^2+y^2-2=0$……①，$x+1=0$……②

①，②を解いて，$(-1,\ \pm 1)$

(2)　与式$\Longleftrightarrow(x-m)^2+y^2=m^2+2m+2$より，$m^2+2m+2=(m+1)^2+1$から，

$m=-1$のとき半径は最小になり，そのときの中心は$(-1,\ 0)$，半径は1

(3)　$y=\pm x$を代入して，

$2x^2-2mx-2m-2=0$から，

$x^2-mx-m-1=0$

判別式をDとすると，

$D=m^2+4(m+1)=(m+2)^2=0$

すなわち$m=-2$

このとき$x=-1$，$y=\pm 1$

(4)　$m=-2$より，

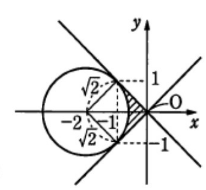
円の方程式は，

$(x+2)^2+y^2=2$

求める面積は右図より，

$(\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2$

$=2-\frac{\pi}{2}$



②$\boxed{\text{C-1-5}}$

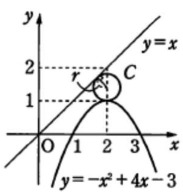
直線 $y=x$ と放物線 $y=-x^2+4x-3$ に同時に接する円を C とする。ただし，円と放物線が点 P で接するとは，その円と放物線が点 P を共有し，点 P における接線が共通であることをいう。

(1) 円 C と放物線が点 $(2,\ 1)$ で接するとき，円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 円 C と放物線の共通接線が $y=x$ に平行なとき，接点の座標を求めよ。また，このときの円 C の中心の座標と半径を求めよ。　㊥東京理科大㊥

解答　**(1) 中心 $(2,\ \sqrt{2})$，半径 $\sqrt{2}-1$　(2) 接点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，中心 $\left(\frac{21}{16},\ \frac{15}{16}\right)$，半径 $\frac{3\sqrt{2}}{16}$**

(1) $y=-x^2+4x-3$
$=-(x-2)^2+1$
より，題意を満たす円は右図のようになり，半径を r とすると円の中心は $(2,\ 1+r)$



この点と $y=x$ の距離は r より，

$r=\dfrac{|1+r-2|}{\sqrt{1+(-1)^2}}$　$0<r<1$ から，$r=\dfrac{1-r}{\sqrt{2}}$

すなわち $r=\sqrt{2}-1$

このとき円の中心は $(2,\ \sqrt{2})$

(2) $y=x$ に平行な接線を $y=x+k$ とおくと，

$x+k=-x^2+4x-3$ から，

$x^2-3x+k+3=0$……①

$D=0$ から，$k=-\dfrac{3}{4}$

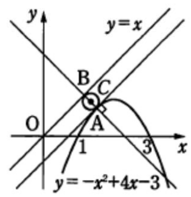
このとき①は

$x^2-3x+\dfrac{9}{4}=0$

となり，

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=0$ から

$x=\dfrac{3}{2}$



よって，接点の座標は $A\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

接点 A を通り $y=x$ に垂直な直線は

$x+y=\dfrac{9}{4}$

これより，円と $y=x$ との接点を B とするとき，接点 B の座標は $x+y=\dfrac{9}{4}$ と $y=x$ を連立して $B\left(\dfrac{9}{8},\ \dfrac{9}{8}\right)$

これより，

円の中心は A，B の中点 $\left(\dfrac{21}{16},\ \dfrac{15}{16}\right)$

また，円の半径は $\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{3\sqrt{2}}{16}$

②$\boxed{\text{C-1-6}}$

放物線 $y=x^2$ の頂点を O，その上の $\angle POQ=90^\circ$ であるような 2 点を $P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)$ とする。ただし，$p>0$ とする。

(1) p と q の関係式を求めよ。

(2) 直線 PQ がつねに通る定点を求めよ。

(3) 三角形 OPQ の面積の最小値を求めよ。　㊥近畿大㊥

解答　**(1) $pq=-1$　(2) $(0,\ 1)$　(3) 最小値 1（$p=1$ のとき）**

(1) OP : $y=px$，OQ : $y=qx$

$OP\perp OQ$ より，$pq=-1$

(2) 直線 PQ の方程式は，

$y-p^2=\dfrac{p^2-q^2}{p-q}(x-p)$ から，

$y=(p+q)x-pq$

ここで(1)より，$pq=-1$ から，$y=(p+q)x+1$

これは定点 $(0,\ 1)$ を通る。

(3) $S=\dfrac{1}{2}|pq^2-p^2q|=\dfrac{1}{2}|pq||q-p|$

$=\dfrac{1}{2}|p-q|=\dfrac{1}{2}\left|p+\dfrac{1}{p}\right|=\dfrac{1}{2}\left(p+\dfrac{1}{p}\right)$

$\geqq\sqrt{p\cdot\dfrac{1}{p}}=1$

等号は $p=\dfrac{1}{p}$ より，$p=1$ のとき成立。

②$\boxed{\text{C-1-7}}$

2 つの円 $C_1: x^2+y^2+4x-4y=2$，$C_2: x^2+y^2-8x=a$ の中心をそれぞれ P_1，P_2 とする。また，C_1 と C_2 が相違なる 2 点 Q，R で交わっている。

(1) 定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $\angle P_1QP_2$ が直角のとき，a の値を求めよ。　㊥千葉工業大㊥

解 答　(1)　$-6<a<74$　　(2)　$a=14$

(1)　$C_1:(x+2)^2+(y-2)^2=10$

$C_2:(x-4)^2+y^2=a+16$　ただし，$a>-16$

中心間の距離は

$\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(0-2)^2}=2\sqrt{10}$

C_1，C_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると，

2円は相異なる2点で交わることより，

$|r_1-r_2|<$(中心間の距離)$<r_1+r_2$

$|\sqrt{10}-\sqrt{a+16}|<2\sqrt{10}<\sqrt{10}+\sqrt{a+16}$

ここで，$|\sqrt{10}-\sqrt{a+16}|<2\sqrt{10}$

$\Longleftrightarrow -2\sqrt{10}<\sqrt{a+16}-\sqrt{10}<2\sqrt{10}$

$\Longleftrightarrow -\sqrt{10}<\sqrt{a+16}<3\sqrt{10}$……①

また，$2\sqrt{10}<\sqrt{10}+\sqrt{a+16}$

$\Longleftrightarrow \sqrt{10}<\sqrt{a+16}$……②

①，②より，$\sqrt{10}<\sqrt{a+16}<3\sqrt{10}$

2乗して $10<a+16<90$ から，$-6<a<74$

これは $a>-16$ を満たす。

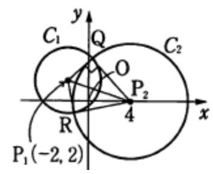
(2)　$\angle P_1QP_2=90°$

より，$r_1{}^2+r_2{}^2=$

$P_1P_2{}^2$ から，

$10+a+16=40$

これより，$a=14$



②$\boxed{\text{C-1-8}}$

C_1 を点 $(0,\ 0)$ を中心とする半径1の円，C_2 を放物線 $y=x^2+a$ $(a>1)$ とする。C_1 と C_2 に共通に接する直線の中で，互いに y 軸上で直交するものがあるとき，a の値を求めよ。　　慶應義塾大

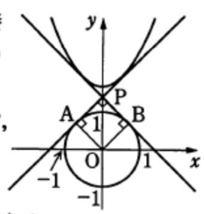
解 答　$a=\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}$

円 C_1 との接点を A，B，2接線の交点を P とすると，

$\angle A=\angle B=\angle P=90°$，

$OA=OB=1$ より，

四角形 OAPB は1辺の長さが1の正方形である。



これより，接線の方程式は $y=mx+\sqrt{2}$ とおくことができる。この直線が円と接するから，

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+1}}=1$　　これより，$m=\pm1$

したがって，接線の方程式は $y=\pm x+\sqrt{2}$

これと $y=x^2+a$ が接するから，

$x^2+a=\pm x+\sqrt{2}$ において $D=0$ より，

$a=\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}$

②$\boxed{\text{C-1-9}}$

座標平面において，放物線 $C:y=x^2$ と直線 $m:y=1$ の両方に接し，その中心が y 軸上にある円の中心の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。　早稲田大

解 答　$(a,\ b)=\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ \dfrac{5}{2}\right)$

円の中心を $(0,\ b)$ とおくと，

$y=1$ に接するから，

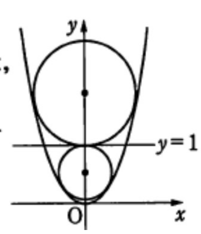
その半径は $|b-1|$

これから，円の方程式は，

$x^2+(y-b)^2=(b-1)^2$

これが $y=x^2$ とも接するから代入して，

$y+(y-b)^2=(b-1)^2$



整理して，

$y^2-(2b-1)y+2b-1=0$ において，$D=0$

より，$(2b-1)^2-4(2b-1)=0$ から，

$b=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{5}{2}$

②$\boxed{\text{C-1-10}}$

円 $C:x^2+y^2=r^2$ の外部の点 $A(a,\ b)$ から引いた2接線の接点を P，Q とする。

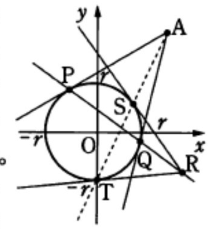
(1)* 2点 P，Q を通る直線の方程式を求めよ

(2)　(1)で求めた直線上にあり，かつ円の外部の任意の点を R とし，R から C に2接線を引き，その接点を S，T とする。このとき，3点 A，S，T は一直線上にあることを証明せよ。　大阪大・改

解答　(1)　$ax+by=r^2$　　(2)下参照

(1)　2接点を$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$とすると2接線の方程式は
$x_1x+y_1y=r^2$，$x_2x+y_2y=r^2$
これらがいずれも$\mathrm{A}(a,\ b)$を通るから
$x_1a+y_1b=r^2$，$x_2a+y_2b=r^2$
これより，2点P，Qを通る直線の方程式は$ax+by=r^2$

(2)　図のように直線PQ：$ax+by=r^2$上に点$\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$をとると，$ax_3+by_3=r^2$……①が成り立つ。また，(1)と同様に考えて，SとTを通る直線は，$x_3x+y_3y=r^2$であり，ここに$x=a$，$y=b$を代入すると，①より$ax_3+by_3=r^2$が成立する。すなわち，直線ST上に点Aが存在する。これより3点A，S，Tは同一直線にある。



②$\boxed{\text{C-1-11}}$
3点 $\mathrm{A}(-7,\ 0)$，　$\mathrm{B}(7,\ 0)$，　$\mathrm{C}(2,\ 12)$を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$がある。この三角形の重心，外心，内心，垂心の座標を求めよ。

解答　　重心 $\left(\dfrac{2}{3},\ 4\right)$，外心 $\left(0,\ \dfrac{33}{8}\right)$，内心 $(1,\ 4)$，垂心 $\left(2,\ \dfrac{15}{4}\right)$

[1]　$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心　$\left(\dfrac{-7+7+2}{3},\ \dfrac{0+0+12}{3}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{2}{3},\ 4\right)$

[2]　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心
線分 ABの垂直二等分線の方程式は　$x=0$　……①
線分 BCに垂直な直線の傾きを mとすると　$\dfrac{12-0}{2-7}\cdot m=-1$　　よって　$m=\dfrac{5}{12}$
線分 BCの中点の座標は$\left(\dfrac{7+2}{2},\ \dfrac{0+12}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{9}{2},\ 6\right)$
よって，線分 BCの垂直二等分線の方程式は $y-6=\dfrac{5}{12}\left(x-\dfrac{9}{2}\right)$　すなわち　$y=\dfrac{5}{12}x+\dfrac{33}{8}$　……②
$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心は 2直線 ①，② の交点であるから，①，② を解いて　$\left(0,\ \dfrac{33}{8}\right)$

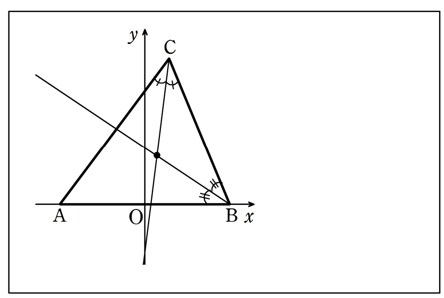
[3]　$\triangle\mathrm{ABC}$ の内心　　直線 AB，BC，CA の方程式は，それぞれ
$y=0$，$y=\dfrac{12-0}{2-7}(x-7)$，　$y=\dfrac{0-12}{-7-2}(x+7)$
すなわち　$y=0$，$12x+5y-84=0$，$4x-3y+28=0$
$\angle\mathrm{ACB}$ の二等分線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$とする。
点 Pと直線 BC，CAとの距離が等しいから

$$\frac{|12x+5y-84|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{|4x-3y+28|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

よって　$5(12x+5y-84)=\pm13(4x-3y+28)$
すなわち　$x+8y-98=0$，$8x-y-4=0$
図から，$\angle\mathrm{ACB}$ の二等分線は　$8x-y-4=0$　……①
$\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$とする。
点 Qと直線 AB，BCとの距離が等しいから

$$|y|=\frac{|12x+5y-84|}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

よって　$13y=\pm(12x+5y-84)$
すなわち　$3x-2y-21=0$，$2x+3y-14=0$
図から，$\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線は　$2x+3y-14=0$　……②
$\triangle\mathrm{ABC}$ の内心は 2直線 ①，② の交点であるから，①，② を解いて　$(1,\ 4)$



[4]　$\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心
点 Cを通り，直線 ABに垂直な直線の方程式は　$x=2$　……①

直線 AC に垂直な直線の傾きを m とすると $\dfrac{0-12}{-7-2}\cdot m=-1$　ゆえに $m=-\dfrac{3}{4}$

よって，点 B を通り，直線 AC に垂直な直線の方程式は

$y-0=-\dfrac{3}{4}(x-7)$　すなわち　$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{21}{4}$　…… ②

△ABC の垂心は 2 直線 ①，② の交点であるから，①，② を解いて　$\left(2,\ \dfrac{15}{4}\right)$

補充問題

②C-1-12

平面上に 2 点 A$(-1,\ 3)$，B$(5,\ 11)$がある。

(1)　直線 $y=2x$ に関して，点 A と対称な点 P の座標を求めよ。

(2)　点 Q が直線 $y=2x$ 上にあるとき，QA＋QB を最小にする点 Q の座標を求めよ。

解答　(1)　$(3,\ 1)$　(2)　$\left(\dfrac{14}{3},\ \dfrac{28}{3}\right)$

(1)　直線 $y=2x$ を ℓ とし，点 P の座標を $(p,\ q)$ とする。

AP$\perp\ell$ であるから，$p\neq-1$ で　$\dfrac{q-3}{p+1}\cdot2=-1$

ゆえに　$p+2q=5$　…… ①

線分 AP の中点 $\left(\dfrac{p-1}{2},\ \dfrac{q+3}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから　$\dfrac{q+3}{2}=2\cdot\dfrac{p-1}{2}$

ゆえに　$2p-q=5$　…… ②

①，② を解いて　$p=3$，$q=1$　よって，点 P の座標は　$(3,\ 1)$

(2)　右の図のように，2 点 A，B は，直線 ℓ に関して同じ側にある。

ここで　QA＋QB＝QP＋QB $\geqq$ PB

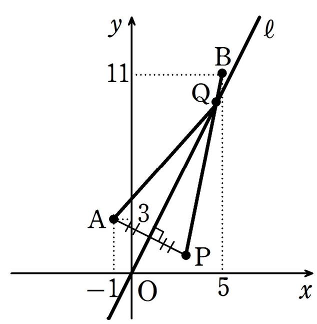
であるから，3 点 P，Q，B が 1 つの直線上にあるとき，QA＋QB は最小になる。

また，直線 PB の方程式は $y-1=\dfrac{11-1}{5-3}(x-3)$

すなわち　$y=5x-14$　…… ③

③ と $y=2x$ を連立して解くと　$x=\dfrac{14}{3}$，$y=\dfrac{28}{3}$

よって，求める点 Q の座標は　$\left(\dfrac{14}{3},\ \dfrac{28}{3}\right)$



②C-1-13

$10x^2+kxy+2y^2-9x-4y+2=0$ が 2 直線を表すときの k の値を求めよ。

解答　$k=9$

$P=10x^2+kxy+2y^2-9x-4y+2$ とすると　$P=10x^2+(ky-9)x+2y^2-4y+2$

$P=0$ が 2 直線を表すから，P は 1 次式の積に因数分解できる。

$P=0$ を x についての 2 次方程式と考えて，その解を求めると

$$x=\frac{-(ky-9)\pm\sqrt{(ky-9)^2-4\cdot10(2y^2-4y+2)}}{2\cdot10}=\frac{-ky+9\pm\sqrt{(k^2-80)y^2-2(9k-80)y+1}}{20}\quad\cdots\cdots ①$$

この 2 つの解を α，β とすると　$P=10(x-\alpha)(x-\beta)$

したがって，P が 1 次式の積に因数分解できるためには，α，β が y の 1 次式でなければならない。ゆえに，根号内の式を $Q(y)$ とすると，$Q(y)$ が y について完全平方式または正の定数でなければならない。

ところが，$k^2-80=0$ と $9k-80=0$ は同時に成り立たないから，$Q(y)$ は定数となりえない。

よって，$Q(y)=0$ の判別式を D とすると，$D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(9k-80)^2-(k^2-80)\cdot 1=80(k^2-18k+81)=80(k-9)^2$

$D=0$ から　　$80(k-9)^2=0$　　　　したがって　　$k=9$

②C-1-14

放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P，Q が存在するような a の値の範囲を求めよ。　　一橋大

類題●横浜市立大

解答　$a<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a$

$P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)$　$(p\neq q)$ とおく。この 2 点が直線 $y=ax+1$ に関して対称より，$\dfrac{p^2+q^2}{2}=a\left(\dfrac{p+q}{2}\right)+1$ から

$p^2+q^2=a(p+q)+2$……①

$\dfrac{p^2-q^2}{p-q}\cdot a=-1$ より，$(p+q)a=-1$

これより，$a\neq 0$ から $p+q=-\dfrac{1}{a}$……②

①より，$(p+q)^2-2pq=a(p+q)+2$

ここに②を代入して

$\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2-2pq=a\left(-\dfrac{1}{a}\right)+2$ より，

$pq=\dfrac{1-a^2}{2a^2}$……③

②，③より，p，q を解とする t の 2 次方程式は，$t^2+\dfrac{1}{a}t+\dfrac{1-a^2}{2a^2}=0$

この方程式が異なる 2 解をもつから $D>0$ より，$D=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2-4\left(\dfrac{1-a^2}{2a^2}\right)>0$ を解いて，

$a<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<a$

計算問題（自学自習用）

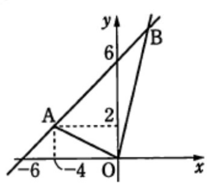
②C-1-15

(2)* 3 直線 $x+2y=0$，$y=x+6$，$y=mx$ で囲まれる三角形が，直線 $x+2y=0$ 上の辺を底辺とする二等辺三角形になるように m の値を定めよ。　　東京薬科大

解答　(2)　$m=7$

$x+2y=0$ と $y=x+6$ の交点を A とすると，$A(-4,\ 2)$

$y=mx$ と $y=x+6$ の交点を B とすると，



$m\neq 1$（$m=1$ のとき 2 直線は平行）なので，

$B\left(\dfrac{6}{m-1},\ \dfrac{6m}{m-1}\right)$

$BA^2=BO^2$ より，

$\left(\dfrac{6}{m-1}+4\right)^2+\left(\dfrac{6m}{m-1}-2\right)^2$

$=\left(\dfrac{6}{m-1}\right)^2+\left(\dfrac{6m}{m-1}\right)^2$

これを整理して，$7-m=0$

よって，$m=7$

②C-1-16

$y=|x+2|+|x-3|$ のグラフと直線 $(k+1)x+y-4=0$ とで三角形が作られるような k の値の範囲を求めよ。　　甲南大

解答　(1)　$-3<k<-\dfrac{4}{3}$，$-\dfrac{1}{2}<k<1$

解き方 (1) $y=|x+2|+|x-3|$

$$=\begin{cases}-2x+1 & (x<-2)\\ 5 & (-2\leqq x\leqq 3)\\ 2x-1 & (3<x)\end{cases}$$

より，グラフは図1のようになる。

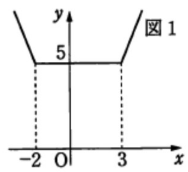


図 1

また，直線は $(k+1)x+y-4=0$ より，つねに点 (0, 4) を通り，傾きは $-(k+1)$ である。したがって，三角形が作られるのは図2のようなときである。

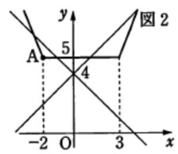


図 2　三角形ができる。

点Aを通るときの傾きは $-(k+1)=-\frac{1}{2}$ より，$k=-\frac{1}{2}$

$y=-2x+1$ に平行なときの傾きは $-(k+1)=-2$ より，$k=1$

よって，$-\frac{1}{2}<k<1$ のとき三角形ができる。同様に考えて $-3<k<-\frac{4}{3}$ のときも

②$\boxed{\text{C-1-17}}$

直線 $y=kx-4k-1$ と $y=||x|-1|$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

●日本女子大

解答 $k\leqq-1$ のとき1個，$-1<k<-\frac{1}{2}$ のとき2個，$k=-\frac{1}{2}$ のとき3個，$-\frac{1}{2}<k<-\frac{1}{3}$ のとき4個，$k=-\frac{1}{3}$ のとき3個，$-\frac{1}{3}<k<-\frac{1}{5}$ のとき2個，$k=-\frac{1}{5}$ のとき1個，$-\frac{1}{5}<k\leqq 1$ のとき0個，$1<k$ のとき1個

) 直線の方程式を k で整理すると，$(x-4)k-(y+1)=0$ より，つねに点 $(4,\ -1)$ を通り，傾きは k である。

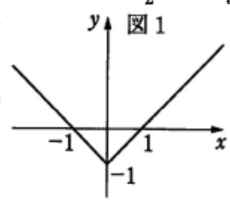


図 1

$y=|x|-1$ のグラフは図1のようになる。これより，$y=||x|-1|$ のグラフは図2のようになる。このグラフと定点 $(4,\ -1)$ を通る直線との共有点の個数を求める。

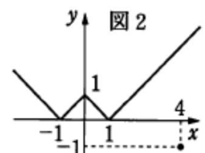


図 2

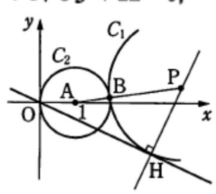
②$\boxed{\text{C-1-18}}$

円 C_1 は円 C_2：$x^2+y^2-2x=0$ に外接し，直線 $x+\sqrt{3}y=0$ と点 $(3,\ -\sqrt{3})$ において接する。このとき，円 C_1 の方程式を求めよ。

●広島修道大

解答 $x^2+y^2+8\sqrt{3}y+12=0$, $x^2+y^2-8x+12=0$

C_2：$(x-1)^2+y^2=1$ の中心をA，点 $(3,\ -\sqrt{3})$ をH，求める円の中心をPとすると，PはHを通り，$x+\sqrt{3}y=0$ に垂直な直線 $y=\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$ 上にあるから，中心を $P(a,\ \sqrt{3}a-4\sqrt{3})$ とおくと，図において PH=PB より，



$\sqrt{(a-3)^2+(\sqrt{3}a-4\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{(a-1)^2+(\sqrt{3}a-4\sqrt{3})^2}-1$

これより $2|a-3|=\sqrt{4a^2-26a+49}-1$

よって，

$a<3$ のとき $2(3-a)+1=\sqrt{4a^2-26a+49}$

を解いて，$a=0$

$a\geqq 3$ のとき $2(a-3)+1=\sqrt{4a^2-26a+49}$

を解いて，$a=4$

$a=0$ のとき中心 $(0,\ -4\sqrt{3})$，半径 6

$a=4$ のとき中心 $(4,\ 0)$，半径 2

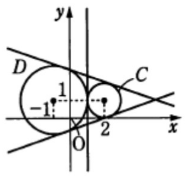
②$\boxed{\text{C-1-19}}$

円 C：$x^2+y^2-4x-2y+4=0$ と点 $(-1,\ 1)$ を中心とする円 D が外接している。このとき，2円 C，D の共通接線の方程式を求めよ。

●福島大

解答 (1) $x=1$, $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{5\sqrt{2}}{4}+1$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{5\sqrt{2}}{4}+1$

解き方 (1) 右図より円 D の方程式は $(x+1)^2+(y-1)^2=4$



また，共通接線の1つは，$x=1$，他の2接線を $y=mx+n$ とすると，円 C と接しているから，$\dfrac{|2m-1+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

すなわち $|2m+n-1|=\sqrt{m^2+1}$……①

円 D と接しているから，$\dfrac{|-m-1+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

すなわち $|m-n+1|=2\sqrt{m^2+1}$……②

①，②より，$|m-n+1|=2|2m+n-1|$

これより，$m-n+1=\pm 2(2m+n-1)$

すなわち，

$n=-m+1$ または $n=-5m+1$

(i) $n=-m+1$ のとき①に代入して，

$|m|=\sqrt{m^2+1}$

これを満たす m は存在しない。

(ii) $n=-5m+1$ のとき①に代入して，

$|3m|=\sqrt{m^2+1}$　　これより，$m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

このとき，$n=\mp\dfrac{5\sqrt{2}}{4}+1$

以上より，$x=1$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}x\mp\dfrac{5\sqrt{2}}{4}+1$

(複号同順)

②C-1-20

２直線 $y=0$，$y=\sqrt{3}x$ に接し，点 $(3,\ 2\sqrt{3})$ を通る円の方程式を求めよ。　近畿大

解答 (2) $(x-3)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$，$(x-7)^2+\left(y-\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{49}{3}$

) x 軸に接しているから円の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$……①とおける。

円が点 $(3,\ 2\sqrt{3})$ を通り，この点は

$y\leqq\sqrt{3}x$ を満たすから，

$b\leqq\sqrt{3}a$ ……②が成り立つ。

①が $y=\sqrt{3}x$ と接するから $\dfrac{|\sqrt{3}a-b|}{\sqrt{3+1}}=b$

ここで，②より，$\sqrt{3}a-b=2b$

これより，$a=\sqrt{3}b$……③

①が点 $(3,\ 2\sqrt{3})$ を通るから

$(3-a)^2+(2\sqrt{3}-b)^2=b^2$……④

③，④より，$(a,\ b)=(3,\ \sqrt{3})$，$\left(7,\ \dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)$

これより，円の方程式を求める。

②C-1-21

円 $x^2+y^2+ax-3ay-5a-5=0$ によって y 軸から切り取られる線分の長さの最小値を求めよ。　北海学園大

解答 $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

解き方 $x=0$ を代入して，

$y^2-3ay-5a-5=0$

この２解を α，β とするとき，$|\alpha-\beta|$ の最小値を求める。

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9a^2-4(-5a-5)$

$=9a^2+20a+20=9\left(a+\dfrac{10}{9}\right)^2+\dfrac{80}{9}$

これより，

$a=-\dfrac{10}{9}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{80}{9}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

②C-1-22

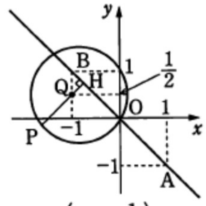
円 $x^2+y^2+2x-y=0$ 上の動点Pと２定点 $A(1,\ -1)$，$B(-1,\ 1)$ に対し，△PABの面積が最大になるときの点Pの座標と，そのときの△PABの面積を求めよ。　阪南大

解答 (1) $P\left(\dfrac{-4-\sqrt{10}}{4},\ \dfrac{2-\sqrt{10}}{4}\right)$，面積 $\dfrac{1+\sqrt{10}}{2}$

解き方 (1) 円の方程式は

$(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$……①

2 定点 A(1, −1), B(−1, 1) を通る直線の方程式は $y=-x$，円周上の点で直線 AB までの距離が最大になる点は，円の中心 $Q\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ を通り，直線 AB に垂直な直線 $y=x+\frac{3}{2}$ と円の交点だから，求める点 P の座標は，



$\left(\frac{-4-\sqrt{10}}{4},\ \frac{2-\sqrt{10}}{4}\right)$

この点 P と直線 AB の距離は，

$PQ+QH=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\left|-1+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1+\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}$

線分 AB の長さは $2\sqrt{2}$ より，△PAB の面積は，$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}\cdot2\sqrt{2}=\frac{1+\sqrt{10}}{2}$

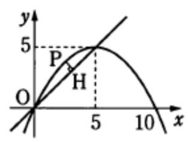
②$\boxed{\text{C-1-23}}$

放物線 $y=-\frac{1}{5}x^2+2x$ と直線 $y=x$ によって囲まれる領域（境界を含む）に含まれ，各辺が x 軸または y 軸に平行となる正方形の面積の最大値を求めよ。

◉中京大◉

解答 $\frac{25}{64}$

$y=-\frac{1}{5}x^2+2x$ 上の点を $P\left(t,\ -\frac{1}{5}t^2+2t\right)$ $(0<t<5)$ とおく。



右図の PH が最大のとき正方形の面積も最大になる。

$PH=\frac{\left|t+\frac{1}{5}t^2-2t\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}|t^2-5t|$

ここで $0<t<5$ より，$|t^2-5t|=5t-t^2$ から，$PH=\frac{1}{5\sqrt{2}}\left\{-\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\right\}$

したがって，$t=\frac{5}{2}$ のとき，PH は最大値 $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ をとる。

よって，このときの正方形の面積は，

$\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$

②$\boxed{\text{C-1-24}}$

放物線 $L: y=1-\frac{x^2}{4}$ 上の，点 $(2a,\ 1-a^2)$ における接線 l_1 と，これに垂直な接線 l_2 がある。l_1, l_2 と x 軸との交点をそれぞれ A, B とし，l_1, l_2 の交点を C とする。$a>0$ のとき，△ABC の面積の最小値を求めよ。

●武蔵工業大

解答 最小値 4 $(a=1)$

解き方 $l_1: y=m(x-2a)+1-a^2$ とおける。よって，$l_2: y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a^2}+1$……②

これが $y=1-\frac{x^2}{4}$ と接するから，

$1-\frac{x^2}{4}=m(x-2a)+1-a^2$ より，

$x^2+4mx-8am-4a^2=0$ について，

$\frac{D}{4}=0$ より，$m=-a$

よって，$l_1: y=-ax+a^2+1$……①

l_2 と L の接点を $(2b,\ 1-b^2)$ とすると同様に，$l_2: y=-bx+b^2+1$……②

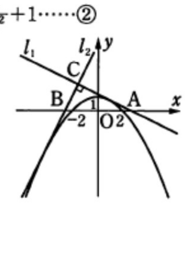
ここで $l_1\perp l_2$ より，$(-a)(-b)=-1$ から，

$b=-\frac{1}{a}$

①，②より，

$A\left(a+\frac{1}{a},\ 0\right)$,

$B\left(-a-\frac{1}{a},\ 0\right)$



また，l_1 と l_2 の交点は

$-ax+a^2+1=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a^2}+1$ より，$\left(a-\frac{1}{a},\ 2\right)$

△ABC の面積を S とすると，

$S=\frac{1}{2}\times AB\times2$

$=AB=\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(-a-\frac{1}{a}\right)=2\left(a+\frac{1}{a}\right)$

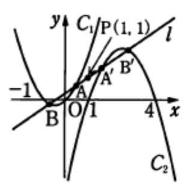
ここで，$a+\frac{1}{a}\geqq2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$ より，$a=\frac{1}{a}$ のとき，すなわち，$a=1$ のとき最小値 4 をとる。

②C-1-25

関数 $y=x^2+x$ のグラフ C_1 を，点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を中心として $180°$ 回転したグラフを C_2 とする。点 P を通る直線 l は，C_1，C_2 との共有点で長さの等しい 3 つの線分に切り取られる。この直線 l の方程式を求めよ。

●法政大

解答　$y=\dfrac{9\pm4\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{6\pm4\sqrt{3}}{3}$　(複号同順)



右図において

AB=AA′=A′B′ から，

AB=2AP……①

ここで

$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2+\alpha)$，

$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2+\beta)$ とおくと，$\beta<\alpha<1$ より①から，$\alpha-\beta=2(1-\alpha)$

すなわち，$\beta=3\alpha-2$……②

直線 l を $y=m(x-1)+1$ とすると，α，β は $x^2+x=m(x-1)+1$，すなわち，

$x^2+(1-m)x+m-1=0$ の 2 解より，

$D>0$ から，$m<1$，$5<m$……③

また，解と係数の関係から，

$\alpha+\beta=m-1$……④，$\alpha\beta=m-1$……⑤

②，④より，$\alpha=\dfrac{m+1}{4}$……⑥

②，⑤より，$3\alpha^2-2\alpha=m-1$

ここに⑥を代入して整理すると，

$3m^2-18m+11=0$ より，$m=\dfrac{9\pm4\sqrt{3}}{3}$

これはともに③を満たす。

よって，l の方程式は $y=\dfrac{9\pm4\sqrt{3}}{3}(x-1)+1$

②C-1-26

2 円 $(x-1)^2+y^2=81$，$(x-a)^2+(y-2a)^2=4a^2$ が接するような定数 a の値は何個あるか。また，そのうちで $|a|$ が最小となる a の値を求めよ。

㊥東京薬科大㊥

解答　**4 個，$a=-2$**

2 つの円の中心間の距離を d とすると，$d=\sqrt{(a-1)^2+4a^2}=\sqrt{5a^2-2a+1}$

半径を r_1，r_2 とすると $r_1=9$，$r_2=2|a|$

(i)　2 つの円が外接するとき，$d=r_1+r_2$

より，$\sqrt{5a^2-2a+1}=9+2|a|$

平方して整理すると，

$a^2-2a-36|a|-80=0$

$a>0$ のとき，$a^2-38a-80=0$ より，$a=40$

$a<0$ のとき，

$a^2+34a-80=0$ より，$a=-17-3\sqrt{41}$

(ii)　2 つの円が内接するとき，$d=|r_1-r_2|$

より，$\sqrt{5a^2-2a+1}=|9-2|a||$

平方して整理すると，

$a^2-2a+36|a|-80=0$

$a>0$ のとき，

$a^2+34a-80=0$ より，$a=-17+3\sqrt{41}$

$a<0$ のとき，

$a^2-38a-80=0$ より，$a=-2$

以上より 2 つの円が接するような a の値は 4 つあり，$|a|$ が最小となるのは $a=-2$ のときである。

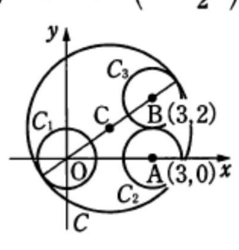
②C-1-27

3 つの円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$，$(x-3)^2+(y-2)^2=1$ を周上または内部に含む円のうちで最も半径の小さい円の方程式を求めよ。

●長岡技術科学大

解答　$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(1+\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

与えられた円を，順に C_1，C_2，C_3 とする。この 3 つの円の位置関係は右図のようになり，O と B の中点を



C とすると $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$ である。このとき

CO=CB=CA から，この点 C が題意を満たす円の中心であり，半径は

$1+\mathrm{OC}=1+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ より，求める円の方程式は，

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(1+\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

②C-1-28

放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-a)^2=16$ との共有点の個数を求めよ。ただし，a は任意の実数とする。　㊥中央大㊥

解 答　$4<a<\frac{65}{4}$ のとき4個，　$a=4$ のとき3個，　$-4<a<4$，$a=\frac{65}{4}$ のとき2個，$a=-4$ のとき1個，　$a<-4$，$\frac{65}{4}<a$ のとき0個

$y=x^2$ と $x^2+(y-a)^2=16$ より，$x^2+(x^2-a)^2=16$ から，

$x^4-(2a-1)x^2+a^2-16=0$……①

$t=x^2$ とおくと，$t^2-(2a-1)t+a^2-16=0$

ここで $f(t)=t^2-(2a-1)t+a^2-16$ とおき，$f(t)=0$ の判別式を D とおく。

(i)　$f(t)=0$ が異なる正の2解をもつとき，図1のようになり，異なる4つの解をもつ。

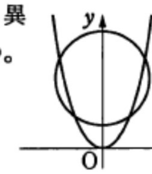


図1

$$\begin{cases} D>0 \\ \text{軸}>0 \\ f(0)>0 \end{cases}$$

これを解いて $4<a<\frac{65}{4}$

(ii)　$f(t)=0$ が正の重解をもつとき，図2のようになり，2つの解をもつ。

図2

$$\begin{cases} D=0 \\ \text{軸}>0 \end{cases}$$

これを解いて $a=\frac{65}{4}$

(iii)　$f(t)=0$ が正の解と負の解をもつとき，図3のようになり，2つの解をもつ。

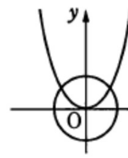


図3

$f(0)<0$ より $-4<a<4$

(iv)　$f(t)=0$ が0を解にもつとき，$a^2=16$ より $a=\pm4$

①　$a=4$ のとき，$t^2-7t=0$ から $t=0$，7

このとき，図4のようになり，3つの解をもつ。

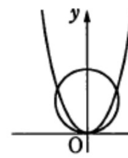


図4

②　$a=-4$ のとき $t^2+9t=0$ から $t=0$，-9

このとき，図5のようになり，1つの解をもつ。

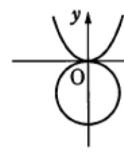


図5

(v)　(i)～(iv) 以外のとき，すなわち $a<-4$，$\frac{65}{4}<a$ のとき，実数解をもたない。

②C-1-29

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線と，点 $(a,\ a^2)$ において接する円で，中心が x 軸上にあるものと y 軸上にあるものの半径が等しくなるような a の値を求めよ。　㊥佐賀大㊥

解 答　$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき $\frac{\sqrt{4a-1}}{2}$，$a<\frac{1}{2}$ のとき $|a|$

点 $(a,\ a^2)$ における接線の方程式は $y=x^2$ と $y=m(x-a)+a^2$ を連立して $D=0$ より，$m=2a$ から，$y=2ax-a^2$

この直線に垂直で点 $(a,\ a^2)$ を通る直線は

$y-a^2=-\frac{1}{2a}(x-a)$ より，$y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$

これと x 軸，y 軸との交点はそれぞれ

$(2a^3+a,\ 0)$，$\left(0,\ a^2+\frac{1}{2}\right)$ で，これと点 $(a,\ a^2)$ との距離がそれぞれの円の半径となる。

$$\sqrt{(2a^3)^2+(-a^2)^2}=\sqrt{4a^6+a^4}$$

$$\sqrt{(-a)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}$$

この2円の半径が等しいから，

$4a^6+a^4=a^2+\frac{1}{4}$ より，$(4a^4-1)(4a^2+1)=0$

これより，$a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

第２章　図形と式（２）

《学習項目》

・積の領域

・軌跡（与えられた条件を満たす点全体の集合）

・軌跡の求め方

動点を P(x, y) とおき，x と y の関係式を作る。ただし，軌跡の限界に注意する。

A 問題

②A-2-1

点 A(6，0) と円 $x^2+y^2=9$ 上の動点 P を結ぶ，線分 AP を 1:2 の比に内分する点 Q の軌跡を求めよ。

解 答　**円 $(x-4)^2+y^2=1$**

P(x, y)，Q(X, Y) とすると，Q は AP を 1:2 に内分するから，$X=\dfrac{2\times6+1\times x}{1+2}$，$Y=\dfrac{2\times0+1\times y}{1+2}$ より

$x=3X-12$，$y=3Y$

これを $x^2+y^2=9$ に代入して，$(3X-12)^2+(3Y)^2=9$ より，

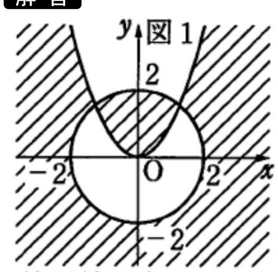
円 $(x-4)^2+y^2=1$

②A-2-2

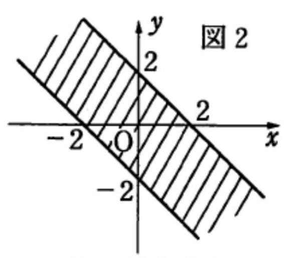
次の不等式で表される領域を図示せよ。

①　$(x^2+y^2-4)(y-x^2)<0$　　　②　$|x+y|\leqq 2$

解 答



境界線は含まない。



境界線を含む。

①　与式$\iff\begin{cases}x^2+y^2-4<0\\y-x^2>0\end{cases}$　または　$\begin{cases}x^2+y^2-4>0\\y-x^2<0\end{cases}$

②　与式$\iff -2\leqq x+y\leqq 2$　より

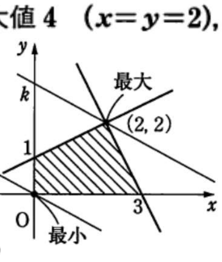
②A-2-3

実数 x, y が不等式 $x\geqq 0, y\geqq 0, 2y-x-2\leqq 0, 2x+y-6\leqq 0$ を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。●玉川大

解 答　**最大値 4　($x=y=2$)，最小値 0　($x=y=0$)**

与えられた領域を座標平面上に表すと，右の図の斜線部分。(境界線を含む。)

$x+y=k$ とおくと，



$y=-x+k$……①

k が最大となるのは①が点 (2，2) を通るときで，$k=4$

k が最小となるのは①が点 (0，0) を通るときで，$k=0$

②A-2-4

方程式 $x^2+y^2-4kx+(6k-2)y+14k^2-8k+1=0$ が円を表すとき

(1)　定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　k の値がこの範囲で変化するとき，円の中心の軌跡を求めよ。

解 答　(1)　$0<k<2$　　(2)　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1\,(0<x<4)$

(1)　方程式を変形して

$$(x-2k)^2+\{y+(3k-1)\}^2=-k^2+2k$$

これが円を表すための条件は　$-k^2+2k>0$

よって　$k(k-2)<0$　　したがって　$0<k<2$

(2)　円の中心の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=2k,\ y=-3k+1\ \ (0<k<2)$$

k を消去すると　$y=-\dfrac{3}{2}x+1$

また，$0<k<2$ であるから　$0<2k<4$　すなわち　$0<x<4$

よって，求める軌跡は　直線 $y=-\dfrac{3}{2}x+1\,(0<x<4)$

B 問題

②B-2-1

2 点 $\mathrm{A}(5,2)$, $\mathrm{B}(3,4)$ に対して，点 P が $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=18$ を満たすように動くものとする。このとき，点 P の軌跡を求めよ。また，原点 O と点 P との距離 OP の最大値，および最小値を求めよ。

●日本女子大

解 答　**中心 (4，3)，半径 $\sqrt{7}$ の円　最大値 $5+\sqrt{7}$　最小値 $5-\sqrt{7}$**

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=18$ より，

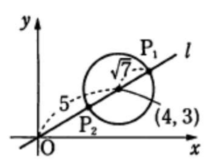
$(x-5)^2+(y-2)^2+(x-3)^2+(y-4)^2=18$

$x^2+y^2-8x-6y+18=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=7$

P の軌跡は，中心 (4，3)，半径 $\sqrt{7}$ の円である。

ここでこの円の中心 (4，3) と原点との距離は 5 だから，OP が最大・最小となるのは，点 P が原点と中心を通る直線 l と円との交点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ にくるときである。



$\mathrm{OP_1}=5+\sqrt{7}$，$\mathrm{OP_2}=5-\sqrt{7}$

②B-2-2

O(0，0)，A(3，0) と $x^2+y^2=9$ 上の動点 P によってできる △OAP の重心 G の軌跡を求めよ。

解 答　**円 $(x-1)^2+y^2=1$　ただし，点 (0，0)，(2，0) を除く。**

$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{G}(X,\ Y)$ とする。ただし $\mathrm{P}(\pm3,\ 0)$ のとき，三角形はできない。よって，$(x,\ y)$ は $x^2+y^2=9\ \ (x\neq\pm3,\ y\neq0)$……①を満たす。点 G は △AOP の重心であるから，

$(X,\ Y)=\left(\dfrac{x+3+0}{3},\ \dfrac{y+0+0}{3}\right)$ より，

$x=3X-3,\ y=3Y$……②

ここで①から，$x\neq\pm3$，$y\neq0$ より，

$X\neq2,\ 0,\ Y\neq0$…③

x，y は①を満たすから②を①へ代入する。

$(3X-3)^2+(3Y)^2=9$ より，$(X-1)^2+Y^2=1$

ただし，③より，点 (0，0)，(2，0) を除く。ゆえに，G の軌跡は円 $(x-1)^2+y^2=1$ ただし，点 (0，0)，(2，0) を除く。

②$\boxed{\text{B-2-3}}$

2 次方程式 $(1+t)x^2-2tx+(1-t)=0$ の 2 つの実数解を α，β とし，$t>0$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha\beta$ の値の範囲を求めよ。

(2)　$X=\alpha\beta$，$Y=\alpha+\beta$ とするとき，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ の描く図形をかけ。

●広島文教女子大

解 答　**(1)　$-1<\alpha\beta\leqq 3-2\sqrt{2}$　(2)　直線 $x+y=1$ $(-1<x\leqq 3-2\sqrt{2})$**

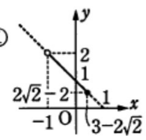
(1)　実数解をもつから $D\geqq 0$ より，

$\dfrac{D}{4}=t^2-(1+t)(1-t)=2t^2-1\geqq 0$

$t>0$ より，$t\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$……①

解と係数の関係から，

$\alpha\beta=\dfrac{1-t}{1+t}=-1+\dfrac{2}{t+1}$



ここで，①より $-1<\alpha\beta\leqq 3-2\sqrt{2}$

(2)　$X=\dfrac{1-t}{1+t}$，$Y=\dfrac{2t}{1+t}$ より $X+Y=1$

また，(1)より $-1<X\leqq 3-2\sqrt{2}$

②$\boxed{\text{B-2-4}}$

直線 $y=mx$ と直線 $y=-\dfrac{1}{m}(x-3)+5$ との交点は，m がこれらの 2 直線が意味をもつようなすべての実数の値を動くとき，どのような図形をえがくか。

慶應義塾大

解 答　**円 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{17}{2}$ ただし，2 点 (3, 0), (0, 5) を除く。**

$y=mx$……①

$y=-\dfrac{1}{m}(x-3)+5$……②

②より，$my=-(x-3)+5m$

これから，$m(y-5)=-(x-3)$……③

$x\neq 0$ のとき①より，$m=\dfrac{y}{x}$ を③に代入して，

$x^2+y^2-3x-5y=0$……④

ただし，$x\neq 0$ より点 (0, 0), (0, 5) を除く。……⑤

$x=0$ のとき①，②より，点 (0, 0) は交点となりうる。……⑥

また，$m\neq 0$ より③から，$x=3$ のとき $y=5$ である。

ここで④に $x=3$ を代入すると，$y=0$，5 より，点 (3, 0) は除かれる。……⑦

④～⑦より，円 $x^2+y^2-3x-5y=0$

ただし，(0, 5), (3, 0) の 2 点を除く。

②$\boxed{\text{B-2-5}}$

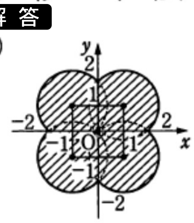
次の不等式の表す領域を図示し，その面積を求めよ。

(1)　$x^2+y^2\leqq 2(|x|+|y|)$　　(2)　$|2x+y|+|x-2y|\leqq 3$　北星学園大

(3)　$|y-x^2|+|y|\leqq 1$　法政大

解 答

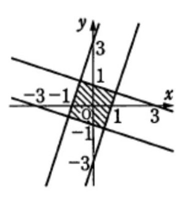
(1)



境界線を含む。

面積 $4\pi+8$

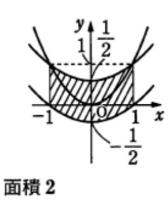
(2)



境界線を含む。

面積 $\dfrac{18}{5}$

(3)



境界線を含む。

面積 2

(1) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$
$x \geqq 0$，$y \leqq 0$ のとき $(x-1)^2+(y+1)^2 \leqq 2$
$x \leqq 0$，$y \geqq 0$ のとき $(x+1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$
$x \leqq 0$，$y \leqq 0$ のとき $(x+1)^2+(y+1)^2 \leqq 2$
面積は (半径 $\sqrt{2}$ の半円)×4＋(1 辺 $2\sqrt{2}$ の正方形)

(2) $2x+y \geqq 0$，$x-2y \geqq 0$ のとき $3x-y \leqq 3$
$2x+y \geqq 0$，$x-2y \leqq 0$ のとき $x+3y \leqq 3$
$2x+y \leqq 0$，$x-2y \geqq 0$ のとき $-x-3y \leqq 3$
$2x+y \leqq 0$，$x-2y \leqq 0$ のとき $-3x+y \leqq 3$
これらより求める領域は
4 点 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right)$，$\left(-\frac{3}{5},\ \frac{6}{5}\right)$，$\left(-\frac{6}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$，$\left(\frac{3}{5},\ -\frac{6}{5}\right)$ を頂点とする正方形の周および内部であり，1 辺の長さが $\sqrt{\frac{18}{5}}$ より，
面積は $\frac{18}{5}$

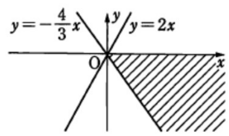
(3) $y \geqq x^2 \geqq 0$ のとき $y \leqq \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$
$y \leqq x^2$，$y \geqq 0$ のとき $0 \leqq x^2 \leqq 1$ より，
$-1 \leqq x \leqq 1$
$y \leqq x^2$，$y \leqq 0$ のとき $y \geqq \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$
x 軸の下方を上に移動すると長方形になり，
その面積は 2

②B-2-6

a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 $y=ax+a^2-5$ が通過する領域を表す不等式を求めよ。

(2)練習用　m が 0 以上の実数全体を動くとき，xy 平面において方程式
$x^2+y^2-4mx+2my+4m^2=0$ の表す図形が通過する領域を図示せよ。

解答　(1)　$y \geqq -\frac{1}{4}x^2-5$　(2)



境界線を含む。

(1) 直線の方程式を a に関して整理すると，
$a^2+xa-y-5=0$
これが実数解をもつから $D=x^2+4(y+5) \geqq 0$
すなわち，$\boldsymbol{y \geqq -\frac{1}{4}x^2-5}$

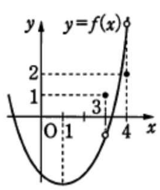
(2) 与えられた式を m で整理すると，
$4m^2+2(y-2x)m+x^2+y^2=0$
これが少なくとも 1 つ，0 以上の解をもつための条件を求める。
2 解の積は $\frac{x^2+y^2}{4} \geqq 0$ から 2 解はともに 0 以上の場合を考えればよい。
したがって，条件は，
$\begin{cases} D \geqq 0 \\ 軸 \geqq 0 \end{cases}$ から，$\begin{cases} y(4x+3y) \leqq 0 \\ y \leqq 2x \end{cases}$

②B-2-7

放物線 $y=x^2-2x+a$ に関して，点 (3，1) と点 (4，2) が互いに反対側にあるときの a の値の範囲を求めよ。　㊥福岡工業大㊥

解答　$-6<a<-2$

$-6<a<-2$
$f(x)=y$
$=x^2-2x+a$
$=(x-1)^2+a-1$
より，軸 $x=1$，点 (3，1) が放物線の上側，



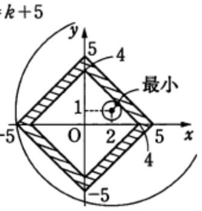
点 (4，2) が下側にあればよい。
$f(3)<1$ かつ $f(4)>2$
これを解いて，それぞれ $a<-2$，$a>-6$
よって，$-6<a<-2$

②B-2-8

点 $(x,\ y)$ が $4 \leqq |x|+|y| \leqq 5$ で表される領域を動くとき，$x^2+y^2-4x-2y$ の最大値と最小値を求めよ。　㊥中央大㊥

解答　最大値 45，最小値 $-\frac{9}{2}$

) $4 \leqq |x|+|y| \leqq 5$ を図示する。
$x^2+y^2-4x-2y=k$ とおくと，
$(x-2)^2+(y-1)^2=k+5$
よって，点 (2, 1) を中心とし，斜線部分と共有部分をもつ円の半径の大小を考える。

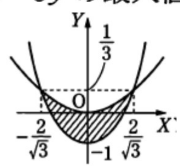


最小となるのは2点 (4, 0), (0, 4) を通る直線に接するときで，$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{k+5}$ から，
$k=-\frac{9}{2}$
また，点 (2, 1) からもっとも遠くにある点は点 (−5, 0) から，
半径 $\sqrt{(2+5)^2+1^2}=5\sqrt{2}$ で最大となる。
$5\sqrt{2}=\sqrt{k+5}$ から，$k=45$
よって $x^2+y^2-4x-2y$ の最大値は 45，最小値は $-\frac{9}{2}$

②B-2-9

実数 x，y が不等式 $x^2+xy+y^2 \leqq 1$ を満たすとき次の問いに答えよ。
(1)　$X=x+y$，$Y=xy$ とおくとき，点 $(X,\ Y)$ の存在範囲を図示せよ。
(2)　$xy-3x-3y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　(1)



境界線を含む。

(2)　最大値 $\frac{1}{3}+2\sqrt{3}$
$\left(x=y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
最小値 $\frac{1}{3}-2\sqrt{3}$
$\left(x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

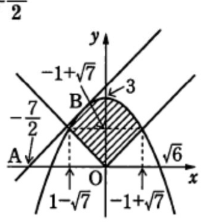
②B-2-10

実数 x，y が不等式 $|x| \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+3$ を満たすとき，$\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}$ のとる値の範囲を求めよ。　㊂北海道大㊂

解答　$0 \leqq \dfrac{y}{x+\frac{7}{2}} \leqq 1$

$x+\frac{7}{2}$

不等式を満たす領域は右図の斜線部分である。
また，$\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}$ は2点 $(x,\ y)$，$\mathrm{A}\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線の傾きを表すから，点Bで接するときの傾きが最大となる。傾きを m とおくと，



$y=m\left(x+\frac{7}{2}\right)$ と $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ が接するから，
$-\frac{1}{2}x^2+3=m\left(x+\frac{7}{2}\right)$
$x^2+2mx+7m-6=0$
$\frac{D}{4}=m^2-7m+6$ より，$m=1,\ 6$
($m=6$ は不適)
よって，最大値は 1，また，最小値は 0

②B-2-11

原点Oから出る半直線上に2点P，Qがあり，OP・OQ=2 を満たしている。点Pが直線 $x-3y+2=0$ 上を動くとき，点Qの軌跡を求めよ。

解答　円 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$　ただし，点 (0, 0) を除く。

) Pの座標を $(x,\ y)$，Qの座標を $(X,\ Y)$ とすると，2点はともに原点Oから出る半直線上にあるから，
$x=kX$，$y=kY$　$(k>0)$……①
OP・OQ=2 より $(x^2+y^2)(X^2+Y^2)=4$ より，ここに①を代入して，
$k^2(X^2+Y^2)^2=4$……②
$X^2+Y^2 \neq 0$ のとき $k=\frac{2}{X^2+Y^2}$
これを①に代入して，
$x=\frac{2X}{X^2+Y^2}$，$y=\frac{2Y}{X^2+Y^2}$
これを $x-3y+2=0$ に代入して，
$\frac{2X}{X^2+Y^2}-3\frac{2Y}{X^2+Y^2}+2=0$ より，
$\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

C 問題

②C-2-1

円 $C: x^2+y^2=1$ と 2 点 A(3, 0), B(3, 3) がある。点 A を通る傾き m の直線が円 C と異なる 2 点 P, Q で交わるとき，△BPQ の重心 G の軌跡を求めよ。 名城大

解答 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ $\left(1\leqq x<\frac{11}{9}\right)$

解き方　2 交点を通る直線は x 軸に垂直でないから $y=m(x-3)$ とおける。

これを $x^2+y^2=1$ に代入して，

$x^2+\{m(x-3)\}^2=1$ より，

$(m^2+1)x^2-6m^2x+9m^2-1=0$

これが異なる 2 実数解をもつから

$\frac{D}{4}=(-3m^2)^2-(m^2+1)(9m^2-1)>0$ より，

$m^2<\frac{1}{8}$……①

2 交点を P$(\alpha,\ m(\alpha-3))$，Q$(\beta,\ m(\beta-3))$，G$(X,\ Y)$ とおくと，

$(X,\ Y)$

$=\left(\frac{\alpha+\beta+3}{3},\ \frac{m(\alpha-3)+m(\beta-3)+3}{3}\right)$

ここで解と係数の関係から，

$\alpha+\beta=\frac{6m^2}{m^2+1}=6-\frac{6}{m^2+1}$ より，

$X=\frac{\alpha+\beta+3}{3}=3-\frac{2}{m^2+1}$……②

$Y=\frac{m(\alpha+\beta-6)+3}{3}=\frac{m(3X-3-6)+3}{3}$

$=m(X-3)+1$……③

②より，$X\neq 3$

よって，②から，$m^2=\frac{1-X}{X-3}$

③から，$m^2=\left(\frac{Y-1}{X-3}\right)^2$

これらより，$\frac{1-X}{X-3}=\left(\frac{Y-1}{X-3}\right)^2$

整理して，$(X-2)^2+(Y-1)^2=1$

ここで①から，$0\leqq m^2<\frac{1}{8}$

すなわち，$1\leqq m^2+1<\frac{9}{8}$

ゆえに，$1\leqq 3-\frac{2}{m^2+1}<\frac{11}{9}$ より，$1\leqq X<\frac{11}{9}$

以上から，求める軌跡は

円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ $\left(1\leqq x<\frac{11}{9}\right)$

②C-2-2

直線 $y=mx+2$ が円 $x^2+y^2=1$ と異なる 2 点で交わるとき，その 2 点の中点の軌跡を求めよ。 愛知工業大

解答 円 $x^2+(y-1)^2=1$ $\left(0<y<\frac{1}{2}\right)$

$x^2+(mx+2)^2=1$ より

$(m^2+1)x^2+4mx+3=0$

$D>0$ から，$\frac{D}{4}=4m^2-3(m^2+1)>0$ より，

$m^2>3$……①

2 交点の x 座標を α, β とし，中点を P とすると，P$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ m\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}+2\right)$

ここで，$\alpha+\beta=\frac{-4m}{m^2+1}$ を代入して，

P$\left(\frac{-2m}{m^2+1},\ \frac{2}{m^2+1}\right)$

$x=\frac{-2m}{m^2+1}$，$y=\frac{2}{m^2+1}$ とおくと

$y\neq 0$……②

このとき，$\frac{x}{y}=-m$ より，$m=-\frac{x}{y}$ を

$y=\frac{2}{m^2+1}$ に代入して $(x^2+y^2-2y)y=0$

ここで $y\neq 0$ より，$x^2+y^2-2y=0$

また，①，②より，$0<y<\frac{1}{2}$

②C-2-3

a，b を $a \neq -b$ を満たす実数の組とし，直線 $ax+by-2(a+b)=0$ に原点 O から下ろした垂線の足を P とする。

(1) P の軌跡を式で表せ。

(2) O を端とする半直線 OP 上に点 Q があり OP・OQ$=1$ を満たすとき，Q の軌跡を式で示せ。 ㊥宇都宮大㊥

解 答　(1) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　ただし，点 $(0,\ 0)$ を除く。 (2) $x+y=\dfrac{1}{2}$

②C-2-4

a，b は実数の定数とする。x の 2 次方程式

$$(x-1)(x-2)=m(x-a^2-b^2)$$

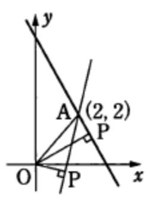
がすべての実数 m に対して実数解をもつような a，b を座標とする点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。 ㊥一橋大㊥

解 答

(1) 直線の方程式は

$a(x-2)+b(y-2)=0$

より，定点 A$(2,\ 2)$ を通る。右図より，つねに OP⊥AP から，点 P は OA を直径とする円周上を動く。



$(x-1)^2+(y-1)^2=2$……①

$a+b \neq 0$ より，$ax+by-2(a+b)=0$ は点 $(0,\ 0)$ を通らないから，①から $(0,\ 0)$ を除く。

(2) P$(x,\ y)$，Q$(X,\ Y)$ とおくと，

OP・OQ$=1$ から，$(x^2+y^2)(X^2+Y^2)=1$

ここで，$x=kX$，$y=kY$ （k は定数） とおけるから，$(k^2X^2+k^2Y^2)(X^2+Y^2)=1$

から，$k^2(X^2+Y^2)^2=1$

よって，$k=\dfrac{1}{X^2+Y^2}$ より，

$x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}$，$y=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$

これらを①，すなわち，

$x^2+y^2-2x-2y=0$ に代入して，

$\left(\dfrac{X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2$

$-2\left(\dfrac{X}{X^2+Y^2}+\dfrac{Y}{X^2+Y^2}\right)=0$ より，

$X+Y=\dfrac{1}{2}$

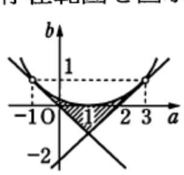
②C-2-5

点 A$(-1,\ -1)$ と 点 B$(1,\ 1)$ とを結ぶ線分を $\overline{\mathrm{AB}}$ とする。

(1) 放物線 $y=x^2+ax+b$ のグラフが，$\overline{\mathrm{AB}}$ と 2 点を共有するとき，$(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

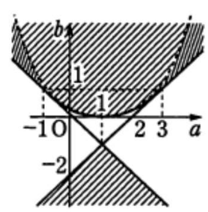
(2) 放物線 $y=x^2+ax+b$ のグラフが，$\overline{\mathrm{AB}}$ と共有点をもたないとき，$(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。 ㊥早稲田大㊥

解 答　(1)



境界線の直線部分は含み，
曲線部分は含まない。

(2)



境界線を含まない。

考え方 (1) 線分 AB の方程式は，$y=x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ より，これが $y=x^2+ax+b$ と 2 点を共有するから，$x^2+ax+b=x$ より，$x^2+(a-1)x+b=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ で異なる 2 解をもつ条件を求める。

$f(x)=x^2+(a-1)x+b$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフから，

$$\begin{cases} D>0 \cdots\cdots ① \\ -1<\text{軸}<1 \cdots\cdots ② \\ f(-1)\geqq 0 \cdots\cdots ③ \\ f(1)\geqq 0 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①より，$b<\dfrac{(a-1)^2}{4}$，②より，$-1<a<3$

③より，$b\geqq a-2$，④より，$b\geqq -a$

以上を図示する。

(2) $y=f(x)$ のグラフを考えて $x^2+(a-1)x+b=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ で解をもたない条件を求める。

(i) x 軸と共有点をもたないとき

$D<0$ より，$b>\dfrac{(a-1)^2}{4} \cdots\cdots ⑤$

(ii) $\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(1)<0 \end{cases}$ のとき

$$\begin{cases} -a+b+2<0 \\ a+b<0 \end{cases} \cdots\cdots ⑥$$

(iii) $\begin{cases} \text{軸}>1 \\ f(1)>0 \end{cases}$ のとき $\begin{cases} a<-1 \\ a+b>0 \end{cases} \cdots\cdots ⑦$

(iv) $\begin{cases} \text{軸}<-1 \\ f(-1)>0 \end{cases}$ のとき

$$\begin{cases} a>3 \\ -a+b+2>0 \end{cases} \cdots\cdots ⑧$$

⑤〜⑧を図示する。

②C-2-6

実数 a，b が $a^2+b^2=1$ を満たしながら変化するとき，直線 $(1+a)x+(1-a)y=b$ が通過する領域を表す不等式を求めよ。

●東京理科大

解答 $xy\leqq\dfrac{1}{4}$

$a=X$，$b=Y$ とおくと与式は

$X^2+Y^2=1 \cdots\cdots ①$

$(x-y)X-Y+x+y=0 \cdots\cdots ②$

となる。この XY 平面上の円①と直線②が共有点をもつための条件は，

(直線と円の中心の距離)≦(円の半径)

これから，$\dfrac{|x+y|}{\sqrt{(x-y)^2+1}}\leqq 1$

2 乗して整理すると，$xy\leqq\dfrac{1}{4}$

②C-2-7

$x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，$\dfrac{1}{ax+y+1}$ の最大値と最小値を求めよ。

◉東海大◉

解答 最小値 $\dfrac{1}{1+a\sqrt{a^2+1}}$　最大値 $0<a<1$ のとき $\dfrac{1}{a^2+1}$，$a\geqq 1$ のとき $\dfrac{1}{a+1}$

$ax+y+1$ の最大・最小を考える。$ax+y+1=k$ とおくと，

$y=-ax+k-1 \cdots\cdots ①$

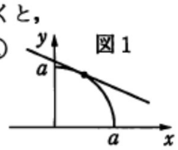


図 1

k が最大になるのは図 1 のように円と接しているときで，$\dfrac{|1-k|}{\sqrt{a^2+1}}=a$ より，

$k=1\pm a\sqrt{a^2+1}$ から，最大値は $1+\sqrt{a^2+1}$

これより，$\dfrac{1}{ax+y+1}$ の最小値は

$\dfrac{1}{1+a\sqrt{a^2+1}}$

k が最小になるのは，$0<a<1$ のとき，図 2 のようになり，k の最小値は①が点 $(a,\ 0)$ を通るときで a^2+1，

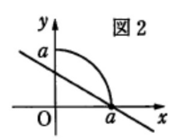


図 2

$a\geqq 1$ のとき，図 3 のようになり，k の最小値は①が点 $(0,\ a)$ を通るときで，$a+1$

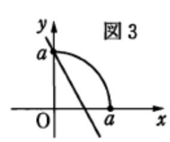


図 3

したがって，$\dfrac{1}{ax+y+1}$ の最大値は，

$0<a<1$ のとき $\dfrac{1}{a^2+1}$，

$a\geqq 1$ のとき $\dfrac{1}{a+1}$

②C-2-8

x，y は不等式 $3x+y\leqq 5$，$x+3y\leqq 7$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ を満たすとき，

(1)　$x+2y$ の最大値を求めよ。

(2)　$x+ay$ の最大値を求めよ。　　　　　　　　　　　　◎島根医科大◎

解答　(1)　**5**　**($x=1$，$y=2$)**　(2)　$a\leqq\dfrac{1}{3}$ **のとき** $\dfrac{5}{3}$，$\dfrac{1}{3}<a\leqq 3$ **のとき** $2a+1$，$3<a$ **のとき** $\dfrac{7}{3}a$

(1)

$x+2y=k$ より，

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$ から，

図１において点 $(1,\ 2)$ を通るとき最大値５をとる。

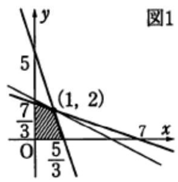


図1

(2)　$x+ay=k$ とおくと，$a\neq 0$ のとき

$y=-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{k}{a}$ より，

$-\dfrac{1}{a}<-3$ または

$-\dfrac{1}{a}>0$ のとき，

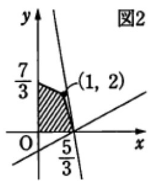


図2

すなわち，図２において $a<0$，

$0<a<\dfrac{1}{3}$ のとき，点 $\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$ において最大値 $\dfrac{5}{3}$ をとる。

$a=0$，$\dfrac{1}{3}$ のときも最大値 $\dfrac{5}{3}$ より，

$a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{5}{3}$

$-3<-\dfrac{1}{a}<-\dfrac{1}{3}$，すなわち，$\dfrac{1}{3}<a<3$ のとき図３のようになり点 $(1,\ 2)$ において最大値 $2a+1$ をとる。$a=3$ のとき最大値７より，$\dfrac{1}{3}<a\leqq 3$ のとき最大値 $2a+1$

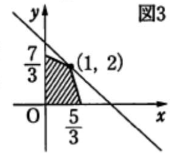


図3

$-\dfrac{1}{a}>-\dfrac{1}{3}$，すなわち，$a>3$ のとき図４のようになり点 $\left(0,\ \dfrac{7}{3}\right)$ において最大値 $\dfrac{7}{3}a$

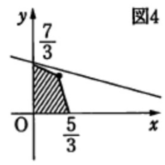


図4

②C-2-9

放物線 $y=a(1-x^2)$ と x 軸とで囲まれる範囲内にあり，原点で x 軸に接する円の半径の最大値を求めよ。ただし $a>0$ とする。　　◎一橋大◎

解答　$0<a<1$ **のとき** $\dfrac{a}{2}$，$a\geqq 1$ **のとき** $1-\dfrac{1}{2a}$

a が十分に小さいときは円は図１のように放物線と頂点 $(0,\ a)$ で接し，そのときの半径は $\dfrac{a}{2}$，それ以外のときは，図２のように放物線と接する。このときの半径は $x^2+(y-r)^2=r^2$ と $y=a(1-x^2)$ から，x^2 を消去して整理すると，

$y^2-\left(2r+\dfrac{1}{a}\right)y+1=0$

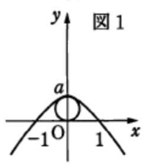


図1

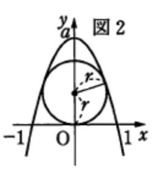


図2

$D=0$ から，$\left(2r+\dfrac{1}{a}\right)^2-4=0$ より，$2r+\dfrac{1}{a}=\pm 2$

ここで，$r>0$，$a>0$ より，$2r+\dfrac{1}{a}=2$ から，

$r=1-\dfrac{1}{2a}$

これより，図２のように接するときの半径は，

$r=1-\dfrac{1}{2a}$ である。……(*)

$\dfrac{a}{2}=1-\dfrac{1}{2a}$ より $a=1$ のとき，図１と図２の円が一致するから，$a\geqq 1$ のとき $r=1-\dfrac{1}{2a}$，

$0<a<1$ のとき $r=\dfrac{a}{2}$

(補足)　図２のときの接点の y 座標は

$r+\dfrac{1}{2a}$

これが放物線の y 切片 a 以下より，$r+\dfrac{1}{2a}\leqq a$

ここに(*)より，$r=1-\dfrac{1}{2a}$ を代入して

$1\leqq a$ と考えることもできる。

②$\boxed{\text{C-2-10}}$

2 点 P，Q は，放物線 $y=x^2$ 上を $\angle POQ$ が直角であるように動く。このとき，

(1) 線分 PQ は定点を通ることを示せ。

(2) 線分 PQ の長さの最小値を求めよ。　　　◎一橋大◎

解 答　(1)定点(0,1)を通る。　(2)　2

(1) $P(p,\ p^2)\ (p \neq 0)$ とすると，直線 OP の方程式は $y=px$，また，

$OP \perp OQ$ より，直線 OQ の方程式は

$y=-\dfrac{1}{p}x$

これより，点 Q の座標は $Q\left(-\dfrac{1}{p},\ \dfrac{1}{p^2}\right)$

よって，直線 PQ の方程式は，

$y-p^2=\left(p-\dfrac{1}{p}\right)(x-p)$ より

$p^2x+p(1-y)-x=0$

これが p についての恒等式となるから

$x=0,\ y=1$

よって，線分 PQ は定点 (0，1) を通る。

(2) PQ^2

$$=\left\{p-\left(-\frac{1}{p}\right)\right\}^2+\left(p^2-\frac{1}{p^2}\right)^2$$

$$=p^2+\frac{1}{p^2}+2+p^4+\frac{1}{p^4}-2$$

$$=\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)^2+\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)-2$$

ここで $p^2+\dfrac{1}{p^2}=t$ とおくと，

$t \geqq 2\sqrt{p^2 \cdot \dfrac{1}{p^2}}=2$

等号は $p=\pm 1$ で成立。このとき

$PQ^2=t^2+t-2=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\quad (t \geqq 2)$

より，$t=2$ のとき PQ^2 は最小値 4 をとる。

よって，PQ の最小値は 2

②$\boxed{\text{C-2-11}}$

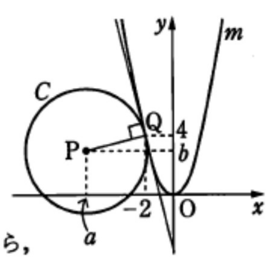
点 P $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ があり，点 P は直線 $l:y=-x-3$ 上にある。いま，円 C が放物線 $m:y=x^2$ と 点 $Q(-2,\ 4)$ で接しているとする。このとき，点 Q における共通接線の方程式を求めよ。また，a，b の値を求めよ。　◎西南学院大◎

解 答　**共通接線：$y=-4x-4$，$a=-6$，$b=3$**

$y=x^2$ 上の点 $Q(-2,\ 4)$ における接線の方程式を $y=k(x+2)+4$ とすると，

$x^2=k(x+2)+4$ から，

$x^2-kx-2k-4=0$……①



$D=0$ から，$k=-4$

よって，接線の方程式は，$y=-4x-4$

円の中心 P は点 Q における法線

$y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{2}$ 上にあり，かつ，$y=-x-3$ 上にあるから，この 2 直線の交点 $(-6,\ 3)$ が円の中心である。よって，$a=-6$，$b=3$

②C-2-12

座標表面上の放物線 $y=x^2$ と直線 l とが異なる 2 点 P，Q で交わっている。この放物線の 2 点 P，Q における 2 つの接線の交点を R とする。直線 l を表す方程式を $y=ax+b$ とするとき，

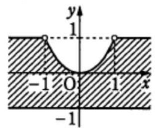
(1) 点 R の座標を a，b を用いて表せ。

(2) $-1\leqq b\leqq 1$ であるとき，点 R のとりうる範囲を求め，図示せよ。

解答

(1) $\left(\dfrac{a}{2},\ -b\right)$

(2) 境界線上の点のうち放物線 $y=x^2$ 上の点を含まず，他は含む。



(1) $P(\alpha,\ \alpha^2)$，$Q(\beta,\ \beta^2)$ とすると，

P における接線は $y=2\alpha x-\alpha^2$……①

Q における接線は $y=2\beta x-\beta^2$……②

①，②より $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\alpha\beta$……③

ここで，α，β は $x^2-ax-b=0$ の解より，

$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=-b$ を③に代入して，

$x=\dfrac{a}{2}$，$y=-b$　よって，$R\left(\dfrac{a}{2},\ -b\right)$

(2) $R(X,\ Y)$ とおくと，(1) から $X=\dfrac{a}{2}$，

$Y=-b$ より，$a=2X$，$b=-Y$……④

$x^2-ax-b=0$ が異なる実数解をもつから，

$D>0$ より，$a^2+4b>0$

これに④を代入して，

$4X^2-4Y>0$ より，$Y<X^2$……⑤

また，条件より，

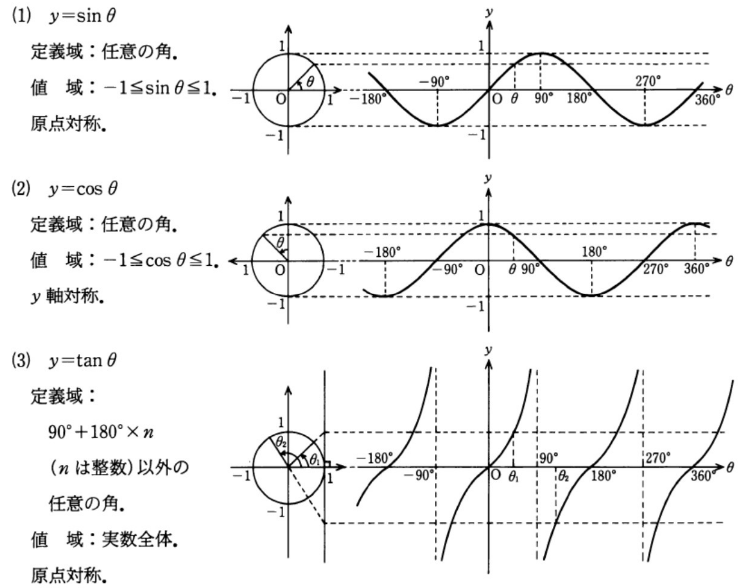
$-1\leqq b\leqq 1$ から，$-1\leqq Y\leqq 1$……⑥

よって⑤，⑥を図示する。

第３章　三角関数

《学習項目》

・動径と一般角
・三角関数の定義
・グラフ
・相互関係
・周期
・変換公式
・三角関数の方程式
・三角関数の不等式
・加法定理
・２倍角・半角・３倍角の公式
・三角関数の合成
・積和，和積変換



A 問題

②A-3-1

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値

(2)　$\sin\theta = -2\cos\theta$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値

解答　(1)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　または　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(2)　$\sin\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$　または　$\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

②A-3-2

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(4)　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5)　$2\cos\theta + 1 = 0$　　(6)　$\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

解答　(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$　(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{11}{6}\pi$　(3)　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$

(4)　$\theta = \dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$　(5)　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$　(6)　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi$

②A-3-3

α の動径は第３象限にあり，β の動径は第１象限にあるとする。$\sin\alpha=-\frac{3}{4}$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$

のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin(\alpha+\beta)$　　(2)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(3)　$\cos(\alpha+\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha-\beta)$

解答　(1) $-\dfrac{6+\sqrt{35}}{12}$　(2) $\dfrac{\sqrt{35}-6}{12}$　(3) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}$　(4) $-\dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$

②A-3-4

$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-2$ のとき，$\tan(\alpha-\beta)$ を求めよ。また，$\alpha-\beta$ を求めよ。

ただし，$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$ とする。

解答　$\tan(\alpha-\beta)=1$，$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$

②A-3-5

α の動径が第３象限にあり，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$　　(2)　$\cos 2\alpha$　　(3)　$\tan 2\alpha$

解答　(1) $\dfrac{24}{25}$　(2) $\dfrac{7}{25}$　(3) $\dfrac{24}{7}$

②A-3-6

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\cos 2x+5\cos x=2$　　(2)　$\sin 2x-\cos x=0$

(1)　$\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$　　(2)　$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$

解き方　(1)　$2\cos^2 x-1+5\cos x=2$ より，

$(\cos x+3)(2\cos x-1)=0$

よって，$\cos x=\frac{1}{2}$

(2)　$2\sin x\cos x-\cos x=0$ より，

$\cos x(2\sin x-1)=0$

よって，$\cos x=0$，$\sin x=\frac{1}{2}$

②A-3-7

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\sin\alpha=\frac{12}{13}$ のとき，$\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

解答　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから $\cos\alpha<0$。よって　　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{5}{13}$

したがって　　$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{5}{13}\right)\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{13}=\frac{9}{13}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{13}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{13}=\frac{4}{13}$

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\sin\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}>0$

よって　　$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$，　　$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

②A-3-8

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=\sin\theta-\cos\theta$　　(2)　$y=-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

(3)　$y=3\sin\theta+4\cos\theta$　　(4)　$y=2\sin\theta-\cos\theta$

解答　**(1)　最大値 $\sqrt{2}$，最小値 $-\sqrt{2}$　　(2)　最大値 2，最小値 -2**

(3)　最大値 5，最小値 -5　　(4)　最大値 $\sqrt{5}$，最小値 $-\sqrt{5}$

(1)　$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$　，$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

したがって　　y の最大値は $\sqrt{2}$，最小値は $-\sqrt{2}$

(2)　$y=2\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)$，　$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)\leqq1$ であるから $-2\leqq2\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)\leqq2$

したがって　　y の最大値は 2，最小値は -2

(3)　$y=5\sin(\theta+\alpha)$　　$-5\leqq5\sin(\theta+\alpha)\leqq5$

したがって　y の最大値は 5，最小値は -5

(4)　$y=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$　　$-\sqrt{5}\leqq\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\leqq\sqrt{5}$

したがって　y の最大値は $\sqrt{5}$，最小値は $-\sqrt{5}$

②A-3-9

次の積を和または差の形に，また，和・差を積の形に変形せよ。

(1)　$2\cos4\theta\sin2\theta$　　(2)　$\cos\theta\cos3\theta$

(3)　$\sin2\theta+\sin4\theta$　　(4)　$\cos4\theta-\cos2\theta$

(1)$\sin6\theta-\sin2\theta$　(2)$\frac{1}{2}(\cos4\theta+\cos2\theta)$　(3)$2\sin3\theta\cos\theta$　(4)$-2\sin3\theta\sin\theta$

(1)　$2\cos4\theta\sin2\theta=2\cdot\frac{1}{2}\{\sin(4\theta+2\theta)-\sin(4\theta-2\theta)\}=\sin6\theta-\sin2\theta$

(2)　$\cos\theta\cos3\theta=\frac{1}{2}\{\cos(\theta+3\theta)+\cos(\theta-3\theta)\}$

$=\frac{1}{2}\{\cos4\theta+\cos(-2\theta)\}=\frac{1}{2}(\cos4\theta+\cos2\theta)$

(3)　$\sin2\theta+\sin4\theta=2\sin\frac{2\theta+4\theta}{2}\cos\frac{2\theta-4\theta}{2}=2\sin3\theta\cos(-\theta)=2\sin3\theta\cos\theta$

(4)　$\cos4\theta-\cos2\theta=-2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2}=-2\sin3\theta\sin\theta$

B 問題

②B-3-1

(1) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta<0$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ。

◎芝浦工業大◎

$$-2+\sqrt{3}$$

解き方 (1) $\sin^2\theta=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

$1-\cos^2\theta=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\cos^2\theta=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$，$\cos\theta<0$ より，

$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}=-\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{8}}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}=-2+\sqrt{3}$

②B-3-2

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{17}{13}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ および $\tan\theta$ の値を求めよ。

◎西南学院大◎

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{60}{169},\ \tan\theta=\frac{12}{5}$$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{17}{13}\right)^2=\dfrac{289}{169}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{289}{169}$

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\dfrac{289}{169}-1}{2}=\dfrac{60}{169}$

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{169}{60}$

$60\tan^2\theta-169\tan\theta+60=0$

$(5\tan\theta-12)(12\tan\theta-5)=0$

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\tan\theta>1$ から，$\tan\theta=\dfrac{12}{5}$

②B-3-3

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$　　(2) $2\sin^2\theta+\cos\theta-1<0$

（1） $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{13}{12}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi}$　（2） $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\dfrac{4}{3}\pi}$

(1) $\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{25}{6}\pi$ から $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たすのは

$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$ から $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{13}{12}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi}$

(2) 左辺 $=2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=-2\cos^2\theta+\cos\theta+1$

よって，$(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)>0$ から，$(-1\leqq)\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$　　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\dfrac{4}{3}\pi}$

②B-3-4

(2)　α，β，γ は正の鋭角で，$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$ のとき，
$\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ。

$\dfrac{5}{4}\pi$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}$$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+8}{1-8\tan(\alpha+\beta)}\cdots\cdots①$$

ここで，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\dfrac{7}{9}$

を①に代入して，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$

よって，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$

ここで，$\tan\alpha=2$ より，$\dfrac{\pi}{4}$ は不適。

②B-3-5

$\theta=18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ であることを示せ。また，これを利用して，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

解答　（前半）略　　（後半）$\sin 18^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$\theta=18^\circ$ のとき　$5\theta=90^\circ$　よって，$2\theta+3\theta=90^\circ$ より，$2\theta=90^\circ-3\theta$ であるから

$\sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$ であるから

$$2\sin\theta\cos\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$$

$\cos\theta\neq 0$ であるから　$2\sin\theta=-3+4\cos^2\theta$

よって　$2\sin\theta=-3+4(1-\sin^2\theta)$

整理して　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$　これを解いて　$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

②B-3-6

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos x$　㊥佐賀大㊥

(2)　$f(x)=3\sin x+\cos x$　㊥工学院大㊥

(1)　最大値 $\sqrt{3}$　$\left(x=\dfrac{\pi}{6}\right)$，最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2)　最大値 $\sqrt{10}$　$\left(\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \sin x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$，最小値 1　$(x=0)$

②B-3-7

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値および，そのときの x を求めよ。

(3)　$f(x)=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x+2\sin x+2\sqrt{3}\cos x$　㊥帯広畜産大㊥

最大値 8 $\left(x=\dfrac{\pi}{6}\right)$，最小値 -1 $\left(x=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$

(3) $f(x)=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2+2(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$

ここで，$t=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおくと，

$f(x)=t^2+2t$

また，$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，

$-2\leqq t\leqq 2$

よって，$f(x)=(t+1)^2-1$

これから $t=2$ のとき最大値 8，このとき，

$x=\dfrac{\pi}{6}$

$t=-1$ のとき最小値 -1，このとき，

$x=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

②B-3-8

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値および，そのときの x を求めよ。

(1) $f(x)=(\sqrt{2}\sin x-1)(\sqrt{2}\cos x-1)$ 　北海道工業大

(1) 最大値 4 $\left(x=\dfrac{5}{4}\pi\right)$，最小値 $-\dfrac{1}{2}$ $\left(x=\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi\right)$

(1) $f(x)=2\sin x\cos x-\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1$

$\sin x+\cos x=t$ とおくと，

$t^2=1+2\sin x\cos x$ より，

$f(x)=t^2-\sqrt{2}t=\left(t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

ここで，$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

よって，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，すなわち，

$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，

$x=\dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$

$t=-\sqrt{2}$，すなわち，$x=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき

最大値 4

②B-3-9

(1) $\tan x=t$ のとき，$\sin 2x$ を t を用いて表せ。

(2) $-\pi<x<\pi$ の範囲で方程式 $(\sqrt{3}+1)\cos^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\sin x-1=0$ を解け。 　弘前大

(1) $\dfrac{2t}{1+t^2}$ 　(2) $x=-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi$

解き方 (1) $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\tan x\cos^2 x$

$=2\tan x\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

(2) $\tan\dfrac{x}{2}=a$ とおくと，

$\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{1+a^2}$ ……①

(1)から $\sin x=\dfrac{2a}{1+a^2}$ ……②

①，②を条件式に代入して，

$\dfrac{\sqrt{3}+1}{1+a^2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\dfrac{2a}{1+a^2}-1=0$

これを整理すると，

$a^2+(1-\sqrt{3})a-\sqrt{3}=0$ 　これより，

$(a+1)(a-\sqrt{3})=0$ から，$a=-1,\ \sqrt{3}$

よって，$\tan\dfrac{x}{2}=-1,\ \sqrt{3}$

また，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}$

ゆえに，$x=-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi$

②B-3-10

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$f(\theta)=\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}$ の最大値と最小値を求めよ。

慶應義塾大

最大値 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，最小値 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

解き方　$\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}=k$ とすると，

$k\cos\theta-\sin\theta=3k-2$ から，

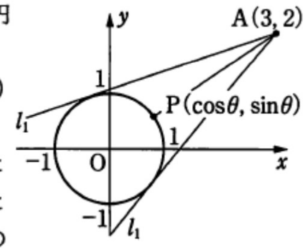
$\sqrt{k^2+1}\sin(\theta-\alpha)=3k-2$ より，

$\sin(\theta-\alpha)=\dfrac{3k-2}{\sqrt{k^2+1}}$

ここで，$|\sin(\theta-\alpha)| \leqq 1$ より，$\dfrac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}} \leqq 1$

これを解いて，$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \leqq k \leqq \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

別解　単位円周上に点 P $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとり，A$(3,\ 2)$ とする。このとき，$f(\theta)$ の値は線分 AP の傾きである。したがって，接線 l_1 の傾きが $f(\theta)$ の最大値であり，接線 l_2 の傾きが $f(\theta)$ の最小値である。A を通る直線 $y=m(x-3)+2$ が円と接するときの m を求めると，



$\dfrac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ から，$m=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

最大値 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，最小値 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

②B-3-11

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とするとき，$x^2-2(\cos\theta)x+2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$ が異符号の 2 つの実数解をもつときの θ の範囲を求めよ。　東北工業大

$0 \leqq \theta < \dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$

解き方　(1)　2 つの解を α，β とすると

$\alpha\beta<0$ より，$2\sin^2\theta-3\sin\theta-2<0$ から

$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)<0$

よって，$\sin\theta>-\dfrac{1}{2}$　　これを解く。

②B-3-12

方程式 $4\sin^2x-4(a-1)\sin x+4a-3=0$ が $0 \leqq x < 2\pi$ で異なる 2 つの実数解をもつための a の値の範囲を求めよ。　島根大

$a<\dfrac{3}{8}$，$a=3-\sqrt{5}$

解き方　$\sin x=t$ とおくと，

$4t^2-4(a-1)t+4a-3=0$……①
条件式が $0\leqq x<2\pi$ で異なる 2 つの実数解をもつのは次の 2 通りである。
(i)　①が $-1<t<1$ で 1 つだけ実数解をもつ。
(ii)　①が $t=-1$ と $t=1$ を解にもつ。
$f(t)=4t^2-4(a-1)t+4a-3$ とおくとき，
(i) は，$f(1)f(-1)<0$ より，$5(8a-3)<0$ からの $a<\frac{3}{8}$ または $-1<t<1$ において重解をもつとき，すなわち，

$\begin{cases} D=0 \\ -1<\text{軸}<1 \end{cases}$ より，$a=3-\sqrt{5}$

(ii)のとき，$f(1)=f(-1)=0$ であるが，$f(1)=5$ より，不適。
(i)，(ii)より，$a<\frac{3}{8}$，$a=3-\sqrt{5}$

②$\boxed{\text{B-3-13}}$

(1)* 不等式 $a\sin^2x+6\sin x+1\geqq 0$ がつねに成り立つような a の最小値を求めよ。　防衛大

$a=9$

解き方　(1)　$\sin x=t$ とおくと，$-1\leqq t\leqq 1$
このとき，$f(t)=at^2+6t+1$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ の最小値が 0 以上になるような a の値の範囲を求める。
［Ｉ］　$a=0$ のとき $f(t)=6t+1$ となり不適。
［II］　$a\neq 0$ のとき

$$f(t)=a\left(t+\frac{3}{a}\right)^2+1-\frac{9}{a}$$

グラフの軸は $t=-\frac{3}{a}$

(i)　$-\frac{3}{a}<-1$，すなわち，$0<a<3$ のとき $f(-1)=a-5\geqq 0$ より，$a\geqq 5$
これは $0<a<3$ に反する。
(ii)　$-1\leqq -\frac{3}{a}<0$，すなわち，$a\geqq 3$ のとき

$f\left(-\frac{3}{a}\right)>0$ より，$1-\frac{9}{a}\geqq 0$ から，$a\geqq 9$

(iii)　$a<0$ のとき $f(-1)\geqq 0$ より，$a\geqq 5$
これは $a<0$ に反する。
以上より題意を満たす a の値の範囲は $a\geqq 9$

C 問題

②C-3-1

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式・不等式を解け。

(1) $\sin\left(-2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$　　(2) $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}$

(3) $\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(4) $\sin\theta+1 \geqq 2\cos^2\theta$

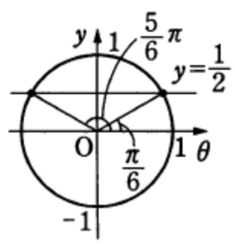
(1) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{13}{12}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi}$　　**(3)** $\boldsymbol{\dfrac{7}{12}\pi<\theta<\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi<\theta<\dfrac{7}{4}\pi}$

(2) $\boldsymbol{\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi}$　　**(4)** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi,\ \theta=\dfrac{3}{2}\pi}$

解き方　(1) $-\dfrac{11}{3}\pi<-2\theta+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{\pi}{3}$ より，

$-2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

のとき $\theta=\dfrac{\pi}{12}$



$-2\theta+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{7}{6}\pi$

のとき $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

$-2\theta+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{11}{6}\pi$ のとき $\theta=\dfrac{13}{12}\pi$

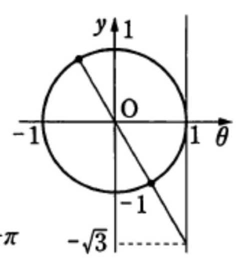
$-2\theta+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{19}{6}\pi$ のとき $\theta=\dfrac{7}{4}\pi$

(2) $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ より，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2}{3}\pi$

のとき $\theta=\dfrac{5}{12}\pi$

$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{3}\pi$

のとき $\theta=\dfrac{17}{12}\pi$



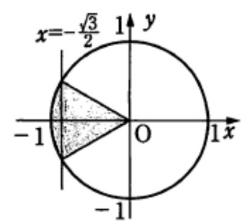
(3) $-\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{11}{3}\pi$

$\dfrac{5}{6}\pi<2\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{6}\pi$

のとき $\dfrac{7}{12}\pi<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$

$\dfrac{17}{6}\pi<2\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{19}{6}\pi$

のとき $\dfrac{19}{12}\pi<\theta<\dfrac{7}{4}\pi$



(4) $\sin\theta+1 \geqq 2\cos^2\theta$

$\sin\theta+1 \geqq 2(1-\sin^2\theta)$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1 \geqq 0$

$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1) \geqq 0$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より $\sin\theta=-1,\ \dfrac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq 1$

これを解く。

②$\boxed{\text{C-3-2}}$

(1)　x の方程式 $\cos 2x+2k\sin x+k-4=0$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の異なる解の個数が 2 つであるための k の満たす条件を求めよ。　関西大

(2)　$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\sin x+\cos x+2\sqrt{2}\sin x\cos x=a$ の解の個数を定数 a の値の範囲により分類せよ。　金沢大

(1)　$\boldsymbol{k=-1+\sqrt{7}}$，$\boldsymbol{\frac{5}{3}<k\leqq 3}$

(2)　$\boldsymbol{a<-\frac{9}{8}\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{2\sqrt{2}<a}$ **のとき 0 個，**

$\boldsymbol{a=2\sqrt{2}}$ **のとき 1 個，**

$\boldsymbol{a=-\frac{9}{8}\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{0<a<2\sqrt{2}}$ **のとき 2 個，**

$\boldsymbol{a=0}$ **のとき 3 個，**

$\boldsymbol{-\frac{9}{8}\sqrt{2}<a<0}$ **のとき 4 個**

解き方　(1)　条件式より，

$1-2\sin^2 x+2k\sin x+k-4=0$

$\sin x=t$ とおくと，

$2t^2-2kt-k+3=0$……①

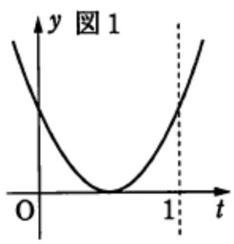
1 つの t の値に対して，x は 2 つの解をもつので，①が $0\leqq t<1$ にただ 1 つの解をもつ条件を求めればよい。

①の左辺を $f(t)$ とおき $y=f(t)$ のグラフを考える。

(i)　図 1 のようになるための条件は

$\begin{cases} D=0 \\ 0\leqq 軸<1 \end{cases}$

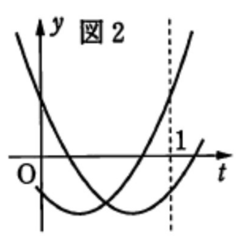
より，$k=-1+\sqrt{7}$



(ii)　図 2 のようになるための条件は

$\begin{cases} f(0)\leqq 0 \\ f(1)>0 \end{cases}$

または $\begin{cases} f(0)\geqq 0 \\ f(1)<0 \end{cases}$



$f(0)=-k+3$，$f(1)=-3k+5$ より，

$\frac{5}{3}<k\leqq 3$

(2)　$t=\sin x+\cos x$ とおくと，

$t^2=1+2\sin x\cos x$

これらを代入すると左辺について，

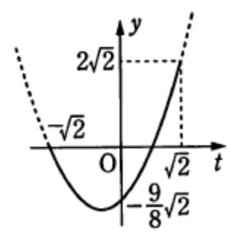
$\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=g(t)$ とおくと，

$g(t)=\sqrt{2}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\sqrt{2}$

$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$　$(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$　より，

$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ となる x は 2 つ存在し，$t=\pm\sqrt{2}$ となる x は 1 つ存在する。

右の $y=g(t)$ のグラフより，解の個数を求める。



②$\boxed{\text{C-3-3}}$

不等式 $\sin x>\sqrt{\cos x+\cos^2 x}$ を解け。ただし，$0<x<2\pi$ とする。

㊥中央大㊥

$$\frac{\pi}{3}<x\leqq\frac{\pi}{2}$$

(2)　$\cos x(1+\cos x)\geqq 0$ から，$\cos x=-1$，

または，$\cos x\geqq 0$……①

また，$\sin x>\sqrt{\cos x+\cos^2 x}\geqq 0$ から，

$\sin x>0$……②

①，②を同時に満たす x の範囲は

$0<x\leqq\frac{\pi}{2}$……③

このとき条件式の両辺を 2 乗して，

$\sin^2 x>\cos x+\cos^2 x$ から，

$1-\cos^2 x>\cos x+\cos^2 x$

よって，$2\cos^2 x+\cos x-1<0$

ゆえに，$(\cos x+1)(2\cos x-1)<0$

したがって，$-1<\cos x<\frac{1}{2}$

これと③より，$\frac{\pi}{3}<x\leqq\frac{\pi}{2}$

②$\boxed{\text{C-3-4}}$

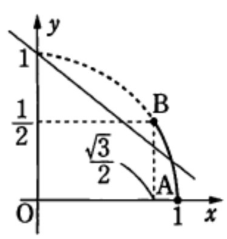
方程式 $k\cos\theta+\sin\theta=1$ が $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ の範囲で解をもつような正の数 k の値の範囲を求めよ。

㊥摂南大㊥

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq 1$$

解き方　$\cos\theta=x$，$\sin\theta=y$ とすると，与式は $kx+y=1$

これは点 (0，1) を通り，傾き $-k$ の直線であり，これが



$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ に単位円周上の弧 AB（上図）と共有点をもつための k の値の範囲を求める。

A(1，0) を通るとき $k=1$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を通るとき，$k=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq 1$

②$\boxed{\text{C-3-5}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$|\cos\theta - \cos 2\theta| = l$ $(l \geqq 0)$ の解の個数を定数 l の値により分類せよ。 ㊕東京大㊗

$l=0$ のとき 3 個，$0<l<\dfrac{9}{8}$ のとき 6 個，

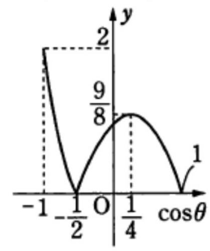
$l=\dfrac{9}{8}$ のとき 4 個，$\dfrac{9}{8}<l<2$ のとき 2 個，

$l=2$ のとき 1 個，$2<l$ のとき 0 個

解き方　$\cos\theta - \cos 2\theta = \cos\theta - (2\cos^2\theta - 1)$

$$= -2\left(\cos\theta - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

これより，右図のグラフと直線 $y=l$ の共有点の個数から解の個数を求める。
$\cos\theta = \pm 1$ のときは共有点 1 個に対し θ は 1 個存在し，
$-1<\cos\theta<1$ のときは共有点 1 個に対して，θ は 2 個存在する。



②$\boxed{\text{C-3-6}}$

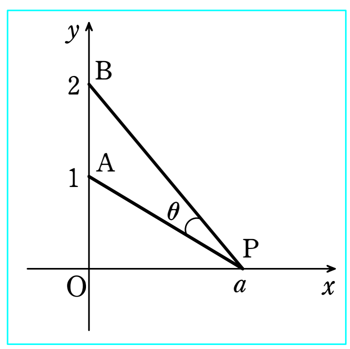
y 軸上の 2 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$ と動点 P$(a,\ 0)$ $(a>0)$ を考える。$\theta = \angle\text{APB}$ とおく。

(1)　$\tan\theta$ を a で表せ。　　　　(2)　θ が最大になる a を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$\tan\theta = \dfrac{a}{a^2+2}$　　(2)　$a=\sqrt{2}$

(1)　$\angle\text{OPA} = \alpha$，$\angle\text{OPB} = \beta$ とすると

$$\tan\alpha = \frac{1}{a},\quad \tan\beta = \frac{2}{a}$$



また，$\theta = \beta - \alpha$ であるから

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2}{a} - \frac{1}{a}}{1+\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{2}{a^2}} = \frac{a}{a^2+2}$$

(2)　$\tan\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，θ が増加するとそれにともなって増加するから，

θ が最大であることと，$\tan\theta$ が最大であることは同値である。

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\tan\theta = \frac{a}{a^2+2} = \frac{1}{a+\frac{2}{a}} \leqq \frac{1}{2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

等号が成り立つとき $\tan\theta$ は最大となる。

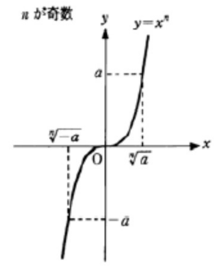
このとき　$a = \dfrac{2}{a}$　　$a>0$ であるから　　$a=\sqrt{2}$

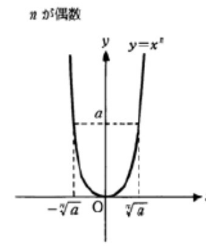
第 4 章　指数対数関数

《学習項目》

・m乗根

$$x=\sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^n=a & (n\text{が奇数}) \\ x^n=a,\ x\geqq 0 & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$





・指数法則
・指数の拡張
・指数関数とそのグラフ
・指数の方程式・不等式
・対数関数
・対数法則
・対数関数のグラフ
・対数の方程式
・対数の不等式
・常用対数

A 問題

②A-4-1

次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　3^{18}，5^{12}，15^6　　　(2)　$\sqrt[6]{11}$，$\sqrt[4]{5}$，$\sqrt[3]{3}$

解答　(1)　$15^6<5^{12}<3^{18}$　　(2)　$\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{11}<\sqrt[4]{5}$

(1)　$3^{18}=(3^3)^6=27^6$，$5^{12}=(5^2)^6=25^6$

$15<25<27$ であるから　$15^6<25^6<27^6$　よって　$15^6<5^{12}<3^{18}$

(2)　3 つの数を，それぞれ 12 乗すると

$(\sqrt[6]{11})^{12}=\left(11^{\frac{1}{6}}\right)^{12}=11^2=121$，$(\sqrt[4]{5})^{12}=\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{12}=5^3=125$，$(\sqrt[3]{3})^{12}=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{12}=3^4=81$

$81<121<125$ であるから　$(\sqrt[3]{3})^{12}<(\sqrt[6]{11})^{12}<(\sqrt[4]{5})^{12}$

したがって　$\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{11}<\sqrt[4]{5}$

②A-4-2

$a>0$，$b>0$ とする。次の (1)～(4) を a^r の形に書け。また，(5)，(6) を a^rb^s の形に書け。

(1)　$a^{-\frac{1}{2}}\times a^{\frac{2}{3}}$　　(2)　$\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[4]{a^3}$　　(3)　$\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt{a}\div\sqrt[6]{a^5}$

(4)　$\sqrt{a\times\sqrt[3]{a}}$　　(5)　$\left(a^{\frac{3}{2}}b^2\right)^2$　　(6)　$\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2\times a^{\frac{5}{3}}$

解答　(1)　$a^{\frac{1}{6}}$　　(2)　$a^{\frac{17}{12}}$　　(3)　$a^{\frac{5}{12}}$　　(4)　$a^{\frac{2}{3}}$　　(5)　a^3b^4　　(6)　ab

(1)　$a^{-\frac{1}{2}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{6}}$

(2)　$\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}=a^{\frac{17}{12}}$

(3)　$\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt{a}\div\sqrt[6]{a^5}=a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{5}{6}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}=a^{\frac{5}{12}}$

(4)　$\sqrt{a\times\sqrt[3]{a}}=\sqrt{a\times a^{\frac{1}{3}}}=\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}$

(5)　$\left(a^{\frac{3}{2}}b^2\right)^2=a^{\frac{3}{2}\times 2}b^{2\times 2}=a^3b^4$

(6)　$\left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2\times a^{\frac{5}{3}}=a^{-\frac{1}{3}\times 2+\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}\times 2}=ab$

②A-4-3

次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$　　(2)　$\sqrt[3]{\sqrt{125}}\times\sqrt[3]{-25}\div\sqrt[6]{5}$

(3)　$\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{512}$　　(4)　$\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}$

解答　(1)　$3\sqrt{2}$　(2)　-5　(3)　$\sqrt[4]{2}$　(4)　$2\sqrt[3]{2}$　(5)　-3　(6)　$4\sqrt[3]{2}$

(1)　(与式)$=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\dfrac{54}{6}}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{9}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

(2)　(与式)$=\sqrt[6]{125}\times(-\sqrt[3]{25})\div\sqrt[6]{5}=-(5^3)^{\frac{1}{6}}\times(5^2)^{\frac{1}{3}}\div 5^{\frac{1}{6}}=-5^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=-5$

参考　n が奇数のとき　$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

(3)　(与式)$=\sqrt[4]{2\times 2^4}+\sqrt[4]{2\times 3^4}-\sqrt[4]{2\times(2^2)^4}=(2+3-4)\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2}$

(4)　(与式)$=\sqrt[3]{3^3\times 2}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2^3\times 2}=3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

②A-4-4

次の方程式を解け。

(1)　$4^x-10\cdot 2^x+16=0$　　(2)　$4^x-2^{x+1}-8=0$

解答　(1)　$x=1，3$　(2)　$x=2$

(1)　方程式を変形すると　　$(2^x)^2-10\cdot 2^x+16=0$

　$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　　$t^2-10t+16=0$

　すなわち　　$(t-2)(t-8)=0$　$t>0$ であるから　　$t=2,\ 8$

　よって　　$x=1,\ 3$

(2)　方程式を変形すると　　$(2^x)^2-2\cdot 2^x-8=0$

　$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，方程式は　　$t^2-2t-8=0$

　すなわち　　$(t+2)(t-4)=0$　$t>0$ であるから　　$t=4$

　$2^x=4$ より，$2^x=2^2$ であるから　　$x=2$

②A-4-5

$\log_2 3=a$，$\log_2 5=b$ とするとき，次の式を a，b を用いて表せ。

(3)　$\log_2 75$　　　(4)　$\log_2 0.3$

(5)　$\log_{16} 15$　　　(6)　$\log_3 45$

解答　(3)　$a+2b$　　(4)　$a-b-1$　　(5)　$\dfrac{a+b}{4}$　　(6)　$2+\dfrac{b}{a}$

(3)　$\log_2 75=\log_2(3\times 5^2)=\log_2 3+2\log_2 5=a+2b$

(4)　$\log_2 0.3=\log_2\dfrac{3}{2\times 5}=\log_2 3-\log_2 2-\log_2 5=a-1-b=a-b-1$

(5)　$\log_{16} 15=\dfrac{\log_2 15}{\log_2 16}=\dfrac{\log_2(3\times 5)}{\log_2 2^4}=\dfrac{\log_2 3+\log_2 5}{4}=\dfrac{a+b}{4}$

(6)　$\log_3 45=\dfrac{\log_2 45}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2(3^2\times 5)}{\log_2 3}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 5}{\log_2 3}=\dfrac{2a+b}{a}=2+\dfrac{b}{a}$

②A-4-6

0 でない実数 x，y，z が $3^x=5^y=15^z$ を満たすとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

解答　0

$3^x=5^y=15^z$ の各辺は正の数であるから，15 を底とする対数をとると

$$x\log_{15} 3=y\log_{15} 5=z \qquad \text{よって} \qquad x=\frac{z}{\log_{15} 3},\ y=\frac{z}{\log_{15} 5}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\log_{15} 3}{z}+\frac{\log_{15} 5}{z}=\frac{\log_{15}(3\times 5)}{z}=\frac{\log_{15} 15}{z}=\frac{1}{z}$$

よって　　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=0$

②A-4-7

次の方程式を解け。

(1)　$\log_2(x+1)=5$　　　(2)　$\log_3(2x+1)+\log_3(x-3)=2$

解答　(1)　$x=31$　　(3)　$x=4$

(1)　対数の定義から　$x+1=2^5$　　よって　$x=2^5-1=31$

(2)　真数は正であるから　$2x+1>0$　かつ　$x-3>0$　すなわち　$x>3$　……①

方程式を変形すると　$\log_3(2x+1)(x-3)=2$　よって　$(2x+1)(x-3)=3^2$

式を整理すると　$2x^2-5x-12=0$　　すなわち　$(2x+3)(x-4)=0$

① より　$x-4=0$　　したがって　$x=4$

②A-4-8

次の不等式を解け。

(1)　$\log_4(x+3)\geqq\dfrac{1}{2}$　　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>3$

解答　(1)　$x\geqq-1$　　(2)　$2<x<\dfrac{17}{8}$

(1)　真数は正であるから　$x+3>0$　　すなわち　$x>-3$　……①

不等式を変形すると　$\log_4(x+3)\geqq\log_4 4^{\frac{1}{2}}$

底 4 は 1 より大きいから　$x+3\geqq2$　　すなわち　$x\geqq-1$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$x\geqq-1$

(2)　真数は正であるから　$x-2>0$　　すなわち　$x>2$　……①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x-2<\dfrac{1}{8}$　　すなわち　$x<\dfrac{17}{8}$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$2<x<\dfrac{17}{8}$

②A-4-9

6^{52} の桁数を調べよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　41 桁

$\log_{10}6^{52}=52\log_{10}(2\times3)=52\times(0.3010+0.4771)=40.4612$

$40<\log_{10}6^{52}<41$ であるから　$10^{40}<6^{52}<10^{41}$

よって，6^{52} は 41 桁の数である。

B 問題

②B-4-1

3 つの数 $\log_3 6$，$\log_5 10$，$\dfrac{3}{2}$ の大小を不等号を用いて表せ。

解答 $\log_5 10 < \dfrac{3}{2} < \log_3 6$

$\log_3 6 - \dfrac{3}{2} = \log_3 6 - \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 \dfrac{6}{3\sqrt{3}} = \log_3 \dfrac{2}{\sqrt{3}} > \log_3 1 = 0$

よって　$\log_3 6 > \dfrac{3}{2}$　……①

また　$\dfrac{3}{2} - \log_5 10 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 10 = \log_5 \dfrac{5\sqrt{5}}{10} = \log_5 \dfrac{\sqrt{5}}{2} > \log_5 1 = 0$

よって　$\dfrac{3}{2} > \log_5 10$　……②　　①，② から　$\log_5 10 < \dfrac{3}{2} < \log_3 6$

②B-4-2

(3) $\begin{cases} 8^{x-1} = 16^{y+1} \\ 9^x = 27^{y-1} \end{cases}$　　(4)* $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 4^x - 2^{x+1} - 2\cdot 3^y = 2 \end{cases}$

(5) $2^x \cdot 2^y - 2^{x+1} - 2^y + 2 = 0$　　㊥近畿大㊥

(3) $x=33$，$y=23$　(4) $x=2$，$y=1$　(5) $x=0$ または $y=1$

(3) $\begin{cases} 2^{3(x-1)} = 2^{4(y+1)} \cdots\cdots ① \\ 3^{2x} = 3^{3(y-1)} \cdots\cdots ② \end{cases}$

①より，$3x - 4y = 7 \cdots\cdots ③$

②より，$2x - 3y = -3 \cdots\cdots ④$

③，④を解いて，$x=33$，$y=23$

(4) $2^x = X\ (X>0)$，$3^y = Y\ (Y>0)$ とおくと，

$\begin{cases} X + Y = 7 \cdots\cdots ① \\ X^2 - 2X - 2Y = 2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①×2+②より，

$X^2 = 16$ で，$X>0$ より，$X=4$

このとき，$Y=3$　$2^x = 2^2$，$3^y = 3^1$ から，

$x=2$，$y=1$

(5) $2^x = X$，$2^y = Y$ とおくと，

$XY - 2X - Y + 2 = 0$ より，

$(X-1)(Y-2) = 0$　よって，$X=1$，$Y=2$

$2^x = 1$，$2^y = 2$ より，$x=0$，$y=1$

②B-4-3

408 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 3+2\log_4 28-6\log_8\sqrt{21}$　　(2) $\log_8(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$

②B-4-4

$2^x=5^y=10^z$ $(x\neq 0)$ のとき，$xy-yz-zx$ の値を求めよ。

0

) $2^x=5^y=10^z=k$ として対数をとると，

$x\log_{10}2=y\log_{10}5=z=\log_{10}k$　これより，

$x=\dfrac{\log_{10}k}{\log_{10}2}$，$y=\dfrac{\log_{10}k}{\log_{10}5}$，$z=\log_{10}k$ を代入

して，$xy-yz-zx$

$=\dfrac{(\log_{10}k)^2}{\log_{10}2\cdot\log_{10}5}-\dfrac{(\log_{10}k)^2}{\log_{10}5}-\dfrac{(\log_{10}k)^2}{\log_{10}2}$

$=(\log_{10}k)^2\left(\dfrac{1-\log_{10}2-\log_{10}5}{\log_{10}2\cdot\log_{10}5}\right)=0$

②B-4-5

410* 次の方程式・不等式を解け。

(1) $|\log_3 x+3\log_x 3|=4$　㊫金沢医科大㊫　　(2) $x^{\log_{10}x}=\sqrt[4]{1000x}$　㊫職業訓練大㊫

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>-2$　　(4) $\log_2 x+3\log_x 4-7<0$

(5) $\log_a(x-1)+\log_a(x+1)>\log_a(17-3x)$

(6) $x^{2x^3-3x^2}>x^{3x-2}$ $(x>0)$　㊫日本女子大㊫

(1) $\dfrac{1}{27}$，$\dfrac{1}{3}$，3，27　(2) $10^{-\frac{3}{4}}$，10　(3) $1<x<16$　(4) $0<x<1$，$2<x<64$

(5) $0<a<1$ のとき $1<x<3$，$1<a$ のとき $3<x<\dfrac{17}{3}$　(6) $\dfrac{1}{2}<x<1$，$2<x$

き方 (1) $\log_3 x+3\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x}=\pm 4$

$(\log_3 x)^2\pm 4\log_3 x+3=0$

(4) $\log_2 x=X$ とすると，

$\log_x 4=2\log_x 2=\dfrac{2}{X}$ より，$X+\dfrac{6}{X}-7<0$

$X>0$ のとき，

$X^2-7X+6=(X-1)(X-6)<0$ から，

$1<X<6$……①

$X<0$ のとき，

$X^2-7X+6=(X-1)(X-6)>0$ から，

$X<0$……②

①より，$1<\log_2 x<6$ から，$2<x<64$

②より，$\log_2 x<0$ から，$0<x<1$

(5) 真数条件より，$1<x<\dfrac{17}{3}$……①

$0<a<1$ のとき，$(x-1)(x+1)<17-3x$

これと①より，$1<x<3$

$1<a$ のとき，$(x-1)(x+1)>17-3x$

これと①より，$3<x<\dfrac{17}{3}$

$(\log_3 x \pm 3)(\log_3 x \pm 1)=0$　　　(複号同順)

$\log_3 x=3$，$\log_3 x=1$ から $x=27$，3

$\log_3 x=-3$，$\log_3 x=-1$ から $x=\dfrac{1}{27}$，$\dfrac{1}{3}$

(2)　与式$\Longleftrightarrow(\log_{10}x)^2=\dfrac{1}{4}(\log_{10}x+3)$ より，

$(\log_{10}x-1)(4\log_{10}x+3)=0$

(3)　真数条件より，$\log_2 x>0$ から，

$x>1$……①

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)>-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}}4$ より，$\log_2 x<4$　これより，$x<16$

これと①より，$1<x<16$

②$\boxed{\text{B-4-6}}$

(2)　$\log_a(ax^2+2x+2)>\log_a 2+\log_a(x^2+5x+7)$ がすべての実数 x に対して成り立つための a の値の範囲を求めよ。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

東北学院大

$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}}$

真数条件より，$ax^2+2x+2>0$……①

$x^2+5x+7>0$……②

②はつねに成り立つ。また，①がつねに成り立つ条件は，$a>0$ かつ $\dfrac{D}{4}<0$ より，

$a>\dfrac{1}{2}$　　ただし，底の条件より，$a\neq 1$ から，$\dfrac{1}{2}<a<1$，$1<a$……①

(i)　$\dfrac{1}{2}<a<1$ のとき，

$ax^2+2x+2<2(x^2+5x+7)$ より，

$(2-a)x^2+8x+12>0$

$2-a>0$ より，$\dfrac{D}{4}<0$ から，$a<\dfrac{2}{3}$

これと $\dfrac{1}{2}<a<1$ より，$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$

(ii)　$a>1$ のとき，

$ax^2+2x+2>2(x^2+5x+7)$ から，

$(2-a)x^2+8x+12<0$

これは $x=0$ のとき成り立たないから，つねに成り立つことはない。

以上から，求める a の値の範囲は

$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{2}{3}$

②B-4-7

414 (1) $f(x)=(\log_4 16x)(\log_2 4x)$ の最小値を求めよ。

$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\ \left(x=\frac{1}{8}\right)}$

き方 (1) $\log_2 x=t$ とおくと，

与式$=\left(2+\frac{t}{2}\right)(2+t)=\frac{1}{2}(t+3)^2-\frac{1}{2}$ より，

$t=-3$ すなわち，$x=\frac{1}{8}$ のとき最小値$-\frac{1}{2}$

②B-4-8

415 (1)* $x\geqq\frac{1}{2}$，$y\geqq\frac{1}{2}$，$x^3y=32$ のとき，$\log_2 x\times\log_2 y$ の最大値と最小値を求めよ。 ◉名城大◉

最大値 $\boldsymbol{\frac{25}{12}}$ $\boldsymbol{(x=2^{\frac{5}{6}},\ y=2^{\frac{5}{2}})}$，　最小値 $\boldsymbol{-8}$ $\boldsymbol{\left(x=\frac{1}{2},\ y=256\right)}$

②B-4-9

416* (1) $f(x)=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。 ◉中部大◉

$\boldsymbol{x=\log_2(2\pm\sqrt{3})}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-2}$

き方 (1) $t=2^x+2^{-x}$ とおくと，

$2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x2^{-x}}=2$ より，$t\geqq2$……①

$t^2=4^x+4^{-x}+2$ より，

$f(x)=t^2-2-8t+16=(t-4)^2-2$

$t=4$，すなわち，$2^x+2^{-x}=4$ のとき最小値 -2

$2^x=X$ とすると，$X+\frac{1}{X}=4$ より，

$X=2\pm\sqrt{3}$ から，$2^x=2\pm\sqrt{3}$　よって，

このとき $x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$

②B-4-10

(2) $x>1$ のとき，$f(x)=(\log_2 x)^2+(\log_x 2)^2-2(\log_2 x+\log_x 2)-1$ の最小値を求めよ。

$\boldsymbol{-3\ \ (x=2)}$

$\log_2 x=X$ とすると，$x>1$ より，

$X>0$……①

$f(x)=X^2+\frac{1}{X^2}-2\left(X+\frac{1}{X}\right)-1$

$\quad=\left(X+\frac{1}{X}\right)^2-2\left(X+\frac{1}{X}\right)-3$

ここで，$X+\frac{1}{X}=t$ とすると，①より

$t=X+\frac{1}{X}\geqq2\sqrt{X\cdot\frac{1}{X}}=2$……②

また，$f(x)=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$

②より，$t=2$ のとき最小値 -3

②B-4-11

421* $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。このとき，

(1) n^{13} が 10 桁の数となる自然数 n を求めよ。 ◉武蔵工業大◉

(2) 18^{50} の最高位の数字を求めよ。 ◉群馬大◉

(1)　**5**　　(2)　**5**

解き方　(1)　n^{13} が 10 桁より，

$10^9 \leqq n^{13} < 10^{10}$ から，$9 \leqq 13\log_{10}n < 10$ より，

$\frac{9}{13} \leqq \log_{10}n < \frac{10}{13}$

ここで，$\frac{9}{13} = 0.6923\cdots\cdots$，$\frac{10}{13} = 0.7692\cdots\cdots$

これと $\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ から，

$2\log_{10}2 < \frac{9}{13} \leqq \log_{10}n < \frac{10}{13} < \log_{10}2 + \log_{10}3$

すなわち，$\log_{10}4 < \log_{10}n < \log_{10}6$ より

$n=5$ であることが必要。逆に $n=5$ のとき題意を満たす。

(2)　$\log_{10}18^{50} = 50\log_{10}18 = 50(\log_{10}2 + 2\log_{10}3)$

$= 62.76$　　これより，

$A \times 10^{62} < 18^{50} < (A+1) \times 10^{62}$ とおいて，

$A < 10^{0.76} < A+1$　　これから，

$\log_{10}A < 0.76 < \log_{10}(A+1)$

ここで，$\log_{10}5 = 1 - \log_{10}2 = 0.6990$

$\log_{10}6 = \log_{10}2 + \log_{10}3 = 0.7781$

これより，$A=5$

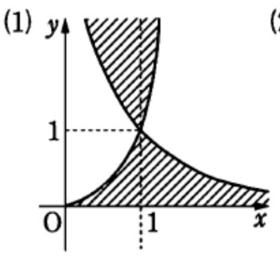
したがって最高位の数字は 5

②$\boxed{\text{B-4-12}}$

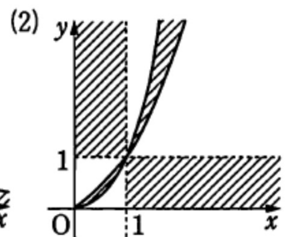
425　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$(\log_x y)^2 > 2 + \log_x y$　　　　◎日本大◎

(2)　$\log_x y + 6\log_y x < 5$　　　　◎京都府立医科大◎



境界線を含まない。
また，$x=1$ を除く。



境界線を含まない。

解き方　(1)　$X = \log_x y$ とおくと，

$X^2 > 2 + X$ から，$X < -1$，$2 < X$

(i)　$\log_x y < -1$ のとき，$\log_x y < \log_x x^{-1}$ から，$x > 1$ のとき $0 < y < \frac{1}{x}$

$0 < x < 1$ のとき $y > \frac{1}{x}$

(ii)　$\log_x y > 2$ のとき，$\log_x y > \log_x x^2$ から，

$x > 1$ のとき $y > x^2$

$0 < x < 1$ のとき $0 < y < x^2$

(2)　$X = \log_x y$ とおくと，$X + \frac{6}{X} < 5$ より，

X^2 を掛けて $X(X-2)(X-3) < 0$ から，

$X < 0$，$2 < X < 3$

(i)　$\log_x y < 0$ のとき，$\log_x y < \log_x 1$ より，

$x > 1$ のとき $0 < y < 1$

$0 < x < 1$ のとき $y > 1$

(ii)　$2 < \log_x y < 3$ のとき，

$\log_x x^2 < \log_x y < \log_x x^3$ より，

$x > 1$ のとき $x^2 < y < x^3$

$0 < x < 1$ のとき $x^2 > y > x^3$

C 問題

②C-4-1

406 $x=(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}}$，$y=(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}}$ のとき，$x-y$ の値を求めよ。

㊥神奈川大㊥

解答 1

解き方 $x^3=\sqrt{5}+2$，$y^3=\sqrt{5}-2$

また $xy=\{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)\}^{\frac{1}{3}}=1$

これより，$x^3-y^3=4$，$xy=1$

$(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$ から，

$x-y=t$ とおくと $t^3=4-3t$

よって $(t-1)(t^2+t+4)=0$　　t は実数より，$t=1$，すなわち，$x-y=1$

②C-4-2

407* 方程式 $4^x+4^{-x}+a(2^x+2^{-x})+6-a=0$ が異なる 4 つの実数解をもつための a の値の範囲を求めよ。

㊥関西大㊥

解答 $-8<a<-2-2\sqrt{5}$

解き方 $2^x+2^{-x}=t$ とおく。

$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$

$4^x+4^{-x}+2=t^2$ より，$4^x+4^{-x}=t^2-2$

これより，与式は $(t^2-2)+at+6-a=0$ から，$t^2+at+4-a=0$……①

x が異なる 4 つの実数解をもつためには①が $t>2$ で異なる 2 つの実数解をもてばよい。

$f(t)=t^2+at+4-a$ とおくと，

$f(t)=\left(t+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a+4$

$y=f(t)$ のグラフが満たす条件は，

$$\begin{cases} D>0\cdots\cdots① \\ 軸>2\cdots\cdots② \\ f(2)>0\cdots\cdots③ \end{cases}$$

①より，$a<-2-2\sqrt{5}$，$-2+2\sqrt{5}<a$

②より，$a<-4$，③より，$a>-8$

以上より，$-8<a<-2-2\sqrt{5}$

②C-4-3

(2) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が直線 $x+y=2$ の上を動くとき，$z=-4^x-4^y+2^{x+1}+2^{y+1}+3$ の最大値を求めよ。

㊥早稲田大㊥ 419

解答 **3 ($x=y=1$)**

(2) $z=-(2^x+2^y)^2+2\cdot 2^{x+y}+2(2^x+2^y)+3$

$=-(2^x+2^y)^2+2(2^x+2^y)+11$

$=-(2^x+2^y-1)^2+12$

$2^x+2^y=t$ とすると，$y=2-x$ より，

$t=2^x+2^{2-x}=2^x+\frac{4}{2^x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot\frac{4}{2^x}}=4$

よって，$z=-(t-1)^2+12$ の $t\geqq 4$ における最大値は 3 （$t=4$ すなわち $x=y=1$）

②C-4-4

422* x に関する方程式 $(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^4+2(t^2+1)=0$ が実数解 α，β をもつとき

(1) t の存在範囲を求めよ。

(2) $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$ の存在範囲を求めよ。　　㊥鳥取大㊥

解答 **(1) $-1\leqq t\leqq 1$　(2) $2\leqq \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha\leqq 6$**

解き方 (1) $X=\log_{10}x$ とおくと，条件式は，

$X^2-4X+2(t^2+1)=0$　　これが実数解 u をもてば，$\log_{10}x=u$ より，$x=10^u$ が解となる。したがって，実数解をもつための条件は $D\geqq 0$ より，$-1\leqq t\leqq 1$

(2) $X^2-4X+2(t^2+1)=0$ は 0 を解にもたないから α と β は 1 とは異なる正の数である。

解と係数の関係から，$\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta=4$

$\log_{10}\alpha\log_{10}\beta=2(t^2+1)$ より，

$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\frac{\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}+\frac{\log_{10}\alpha}{\log_{10}\beta}$

$=\frac{(\log_{10}\beta)^2+(\log_{10}\alpha)^2}{\log_{10}\alpha\log_{10}\beta}$

$=\frac{(\log_{10}\alpha+\log_{10}\beta)^2}{\log_{10}\alpha\log_{10}\beta}-2$

$=\frac{16}{2(t^2+1)}-2=\frac{8}{t^2+1}-2$

ここで，(1)から，$0\leqq t^2\leqq 1$ より，

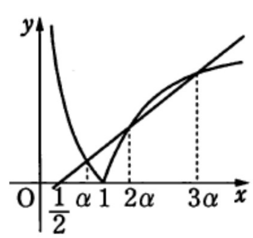
$2\leqq\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha\leqq 6$

②C-4-5

426 x についての方程式 $mx+n=|\log_2 x|$ （m，n は定数） は異なる 3 つの実数解をもち，それらは 1:2:3 の比をなすという。これらの解を求めよ。　　㊥熊本県立大㊥

解答 **$x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$**

解き方 $y=|\log_2 x|$ と $y=mx+n$ を図示すると，右図のようになる。



$y=mx+n$ と $y=-\log_2 x$ の交点の x 座標を α とすると $y=\log_2 x$ との交点の x 座標は 2α と 3α となるから，

$m\alpha+n=-\log_2\alpha$……①

$2m\alpha+n=\log_2 2\alpha$……②

$3m\alpha+n=\log_2 3\alpha$……③

③－②から，

$m\alpha=\log_2 3\alpha-\log_2 2\alpha=\log_2\dfrac{3}{2}$……④

②－①から，

$m\alpha=\log_2 2\alpha+\log_2\alpha=\log_2 2\alpha^2$……⑤

④，⑤より，$\dfrac{3}{2}=2\alpha^2$ から，$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

②$\boxed{\text{C-4-6}}$

431 (1) 方程式 $\log_2(2x+3y-2)=\log_2 x+\log_2(y+1)$ を満たす整数 x，y を求めよ。 ㊫早稲田大㊫

(2) $2(\log_y z+\log_z x+\log_x y)=2(\log_z y+\log_x z+\log_y x)=7$，$xyz=2^{10}$，$x\leqq y\leqq z$ を満たす正の整数解 x，y，z を求めよ。 ㊫横浜国立大㊫

(1) $(x,\ y)=(2,\ 0)$，$(4,\ 2)$ (2) $(x,\ y,\ z)=(4,\ 16,\ 16)$

解き方 **(1) 真数条件から，**

$2x+3y-2>0$，$x>0$，$y+1>0$……①

与式から，$\log_2(2x+3y-2)=\log_2 x(y+1)$

ゆえに，$2x+3y-2=xy+x$ から，

$(x-3)(y-1)=1$　これより，

$(x-3,\ y-1)=(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$

ゆえに，$(x,\ y)=(4,\ 2)$，$(2,\ 0)$

これらは①を満たす。

(2) $\log_y z=A$，$\log_z x=B$，$\log_x y=C$

とおくと，辺々を掛けて $ABC=1$……①

条件式より，$A+B+C=\dfrac{7}{2}$……②

$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}=\dfrac{7}{2}$……③

よって，A，B，C は $t^3-\dfrac{7}{2}t^2+\dfrac{7}{2}t-1=0$

すなわち，$\left(t-\dfrac{1}{2}\right)(t-1)(t-2)=0$ の解。

$x\leqq y\leqq z$ より，$C=\log_x y\geqq 1$，$B=\log_z x\leqq 1$

$A=\log_y z\geqq 1$ から，

$(A,\ B,\ C)=\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$，$\left(2,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$

$(x,\ y,\ z)=(x,\ x^2,\ x^2)$，$(x,\ x,\ x^2)$

ゆえに，$xyz=2^{10}$ から，$x=4$，$4\sqrt{2}$

$(x,\ y,\ z)=(4,\ 16,\ 16)$，

$(4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 32)$

したがって，整数解は，

$(x,\ y,\ z)=(4,\ 16,\ 16)$

②$\boxed{\text{C-4-7}}$

435 自然数 $N=7^{777}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，次の値（小数第 5 位を四捨五入したもの）を用いてよい。

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}5=0.6990$，$\log_{10}7=0.8451$

(1) N は何桁の数か。

(2) N の先頭の数字は何か。

(3) N の末尾の数字は何か。 ㊫図書館情報大㊫

(1) 657 桁　(2) 4　(3) 7

解き方 (1) $\log_{10}7^{777}=777\log_{10}7=656.6427$

よって，657 桁

(2) $7^{777}=10^{656.6427}=10^{0.6427}\times 10^{656}$

ここで，$\log_{10}4=2\times 0.3010=0.6020$

(3) 7^1，7^2，7^3，7^4，7^5，7^6，……の末尾は 7，9，3，1，7，……より，7，9，3，1 を繰り返すことがわかる。ここで，

$777=4\times 194+1$ から，

$7^{777}=7^{(4\times 194+1)}=(7^4)^{194}\times 7$

$(7^4)^{194}$ の末尾は 1 より，7^{777} の末尾は 7

$\log_{10}5=0.6990$ から，$4<10^{0.6427}<5$

よって先頭の数字は 4

②C-4-8

437* 実数 x，y が $(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=2(\log_2 x^2+\log_2 y^2)$ を満たしながら変化するとする。

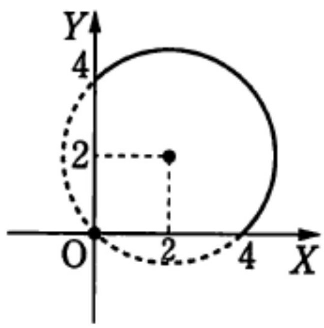
(1) $\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおき，$x\geqq 1$，$y\geqq 1$ のとき，X，Y を軸としてグラフをかけ。

(2) x，y の範囲が $x\geqq 1$，$y\geqq 1$ のとき，$\log_2 xy^2$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) x，y の範囲が $x\geqq 1$，$0<y\leqq 1$ のとき，$\log_2 xy^2$ のとりうる値の範囲を求めよ。

㊥武庫川大㊥

(1)



(2) $\log_2 xy^2=0$

または $4\leqq\log_2 xy^2\leqq 6+2\sqrt{10}$

(3) $6-2\sqrt{10}\leqq\log_2 xy^2\leqq 4$

解き方 (1) $x\geqq 1$，$y\geqq 1$ より，$X\geqq 0$，$Y\geqq 0$

また条件式より，$X^2+Y^2=4(X+Y)$ から，

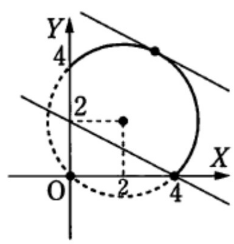
円 $(X-2)^2+(Y-2)^2=8$ の第 1 象限の部分および，点$(4,\ 0)$，$(0,\ 4)$，$(0,\ 0)$

(2) $\log_2 xy^2=k$ とおくと，

$\log_2 x+2\log_2 y=k$ より，$X+2Y=k$

この直線と(1)で求めた円が共有点をもつためのkの値の範囲を求める。

右図より，接するときと点 $(4,\ 0)$ を通るときを考える。接するときの k の値

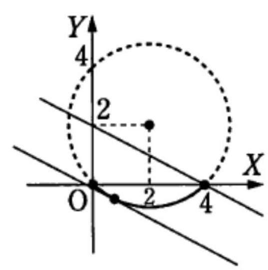


は $\dfrac{|2+2\cdot 2-k|}{\sqrt{1+4}}=2\sqrt{2}$ より，$k=6+2\sqrt{10}$

点 $(4,\ 0)$ を通るときは $k=4$

また，点 $(0,\ 0)$ を通るときは $k=0$

(3) $x\geqq 1$，$0<y\leqq 1$，から，$X\geqq 0$，$Y\leqq 0$ より，$(X-2)^2+(Y-2)^2=8$ の $X\geqq 0$，$Y\leqq 0$ の部分のグラフは右のようになる。



この部分と直線 $X+2Y=k$ が共有点をもつときの k の値の範囲を求める。

第 5 章　数学Ⅱの微分

《学習項目》

・極限
・微分係数と導関数
・微分公式
・関数の増加減少，極値，グラフ

A 問題

③5-A-9
次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x-1)}{(x-2)(x+1)}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x^2-5x-3}$

解答　(1)　$\dfrac{5}{3}$　　(2)　$\dfrac{6}{7}$

③5-A-10
定義に従って，次の関数の与えられた値における微分係数を求めよ。

(1)　$f(x)=2x+3$　$(x=1)$　　(2)　$f(x)=3x^2$　$(x=2)$

解答　(1)　$f'(1)=2$　　(2)　$f'(2)=12$

③5-A-11
次の関数を微分せよ。

(1)　$y=2x^3-5x+3$　　(2)　$y=(3x-1)(x^2+1)$

(3)　$y=2x^4-6x^3+3x-1$　　(4)　$y=(x^2-1)(x^2+1)$

解答 (1)　$y'=6x^2-5$　(2) $y'=9x^2-2x+3$　(3) $y'=8x^3-18x^2+3$　(4) $y'=4x^3$

③5-A-12
次の関数のグラフ上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=x^3-3x$，点 $(1,\ -2)$　　(2)　$y=5x-x^3$，点 $(2,\ 2)$

解答　(1)　$y=-2$　　(2)　$y=-7x+16$

③5-A-13
関数 $y=x^3+3x^2$ のグラフについて，傾きが 9 であるような接線の方程式を求めよ。

解答　$y=9x+27$，$y=9x-5$

③$\boxed{\text{5-A-14}}$

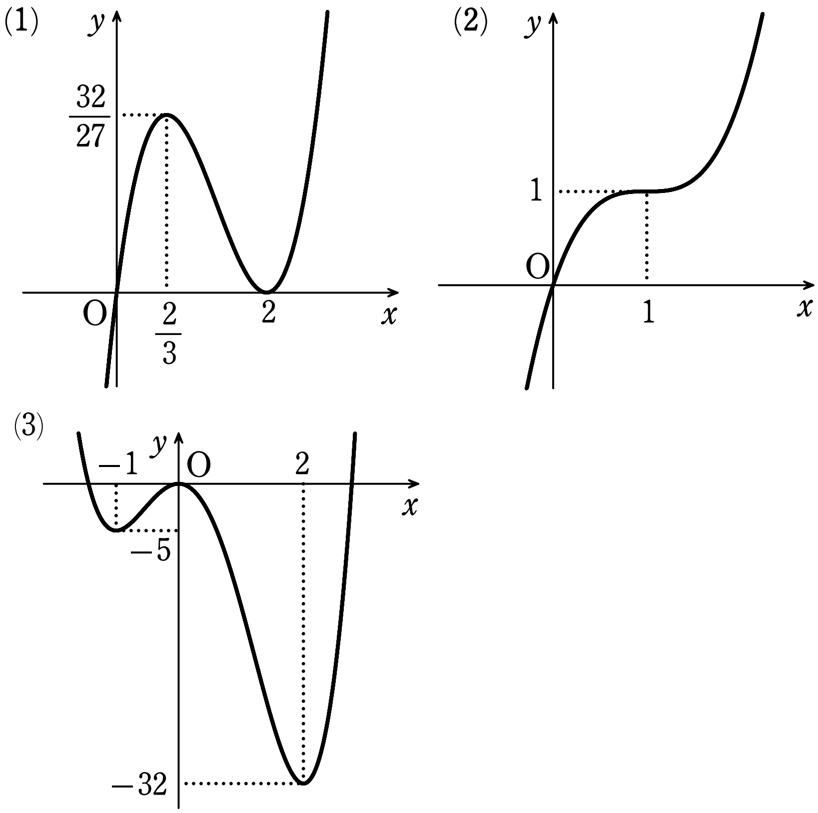
次の関数の増減・極値を調べ，グラフをかけ。

(1)　$y=x^3-4x^2+4x$

(2)　$y=x^3-3x^2+3x$

(3)　$y=3x^4-4x^3-12x^2$

$\boxed{\text{解答}}$



B 問題

③5-B-1

$$\lim_{x\to a}\frac{3x^2+5bx-2b^2}{x^2-(a+2)x+2a}=7$$

青山学院大

$a=-1$，$b=-3$ または $a=4$，$b=-2$

(2) $\lim_{x\to a}(3x^2+5bx-2b^2)=0$ より，

$3a^2+5ab-2b^2=(3a-b)(a+2b)=0$

よって，$b=3a$，$-\frac{1}{2}a$

(i) $b=3a$ のとき，

与式$=\lim_{x\to a}\frac{3(x-a)(x+6a)}{(x-a)(x-2)}=\frac{21a}{a-2}=7$

より，$a=-1$，$b=-3$

(ii) $b=-\frac{1}{2}a$ のとき，$a=-2b$ から，

与式$=\lim_{x\to -2b}\frac{(x+2b)(3x-b)}{(x-2)(x+2b)}$

$=\lim_{x\to -2b}\frac{3x-b}{x-2}=\frac{7b}{2b+2}$ より，

$\frac{7b}{2b+2}=7$ から，$b=-2$，$a=4$

③5-B-2

3 次式 $f(x)$ が $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$，$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=0$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

星薬科大

解答 **$f(x)=3(x-1)(x-2)^2$**

(2) 条件より，$f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$ とおける。

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)(ax+b)$

$=-(a+b)=3\cdots$①

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)(ax+b)$

$=2a+b=0\cdots$②

①，②より，$a=3$，$b=-6$

③5-B-3

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数が 2 のとき次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$　　京都府立大

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a-h)}{3h}$　　愛知工業大

解答 **(1) 6　　(2) 4**

解き方 (1) 与式$=\lim_{h\to 0}3\cdot\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}$

$=3f'(a)=3\times 2=6$

(2) 与式

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+5h)-f(a)}{3h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{3h}\right)$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{5}{3}\cdot\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}-\frac{1}{3}\cdot\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$

$=\frac{5}{3}f'(a)+\frac{1}{3}f'(a)=2f'(a)=2\times 2=4$

③5-B-4

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3f(x)-a^3f(a)}{x^3-a^3}$ を a，$f(a)$，$f'(a)$ で表せ。

(2) 関数 $f(x)$ が微分可能なとき，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(2x)-xf(2)}{x-1}$ を $f(2)$，$f'(2)$ で表せ。

解答 **(1) $f(a)+\dfrac{a}{3}f'(a)$ (2) $2f'(2)-f(2)$**

解き方 (1) 与式

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^3f(x)-a^3f(x)+a^3f(x)-a^3f(a)}{x^3-a^3}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{f(x)+\frac{a^3}{(x^2+ax+a^2)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}$$

$$=f(a)+\frac{a}{3}f'(a)$$

(2) 与式 $\displaystyle=\lim_{x\to 1}2\left\{\frac{f(2x)-f(2)+f(2)-xf(2)}{2x-2}\right\}$

$$=\lim_{x\to 1}2\left\{\frac{f(2x)-f(2)}{2x-2}-\frac{1}{2}f(2)\right\}$$

$$=2\left\{f'(2)-\frac{1}{2}f(2)\right\}=2f'(2)-f(2)$$

③5-B-5

点 $(-2,\ 4)$ から，曲線 $y=-x^3+3x+2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答 **$y=-9x-14$，$y=4$**

解き方 (1) 接点を $(t,\ -t^3+3t+2)$ とすると，接線の方程式は，

$y-(-t^3+3t+2)=(-3t^2+3)(x-t)$……①

これが点 $(-2,\ 4)$ を通るから，①に代入して，$t^3+3t^2-4=0$ より，$t=-2$（重解），1

これを①に代入して，$y=-9x-14$，$y=4$

③5-B-6

放物線 $y=ax^2+bx+c$ が点 $(-1,3)$ を通り，かつ点 $(2,\ 6)$ で $y=x^3-x$ と共通接線を持つとき，a，b，c の値を求めよ。

●共立薬科

解答 **$a=2$，$b=3$，$c=-8$**

解き方 (1) $y=ax^2+bx+c$ が点 $(1,\ -3)$ を通るから，$a+b+c=-3$……①

点 $(2,\ 6)$ を通るから，

$4a+2b+c=6$……②

また $(2,\ 6)$ における接線の方程式は，

$y=(4a+b)x+6-8a-2b$

これが，$y=x^3-x$ の $(2,\ 6)$ における接線 $y=11x-16$ と一致するから，この 2 式を比べて，$4a+b=11$……③

$6-8a-2b=-16$……④

①～④より，$a=2$，$b=3$，$c=-8$

③5-B-7

2 曲線 $y=x^3+3$，$y=x^3-1$ のどちらにも接する直線の方程式を求めよ。

明治大

解答 **$y=3x+1$**

(2)　$y=x^3+3$ の $x=a$ における接線は，
$y=3a^2x-2a^3+3$
$y=x^3-1$ の $x=b$ における接線は，
$y=3b^2x-2b^3-1$
この２直線が一致するから
$3a^2=3b^2$，$-2a^3+3=-2b^3-1$
$a\neq b$ だから，$a=1$，$b=-1$
よって，$y=3x+1$

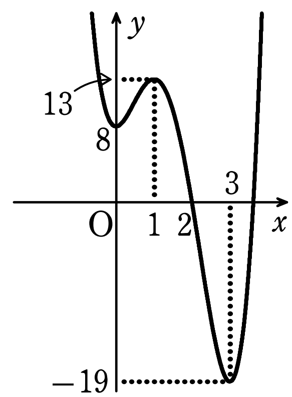
③$\boxed{\text{5-B-8}}$
次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=3x^4-16x^3+18x^2+8$　　　(2)　$y=-x^4+\dfrac{8}{3}x^3-2x^2$

(1)　$y'=12x^3-48x^2+36x=12x(x^2-4x+3)=12x(x-1)(x-3)$
$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1,\ 3$

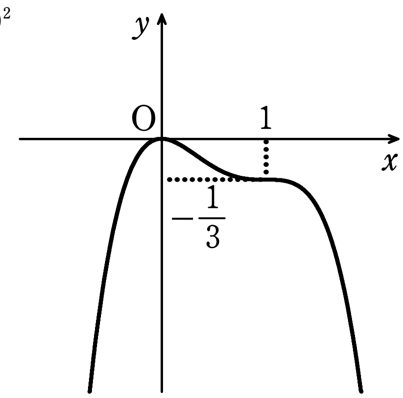
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 8	↗	極大 13	↘	極小 -19	↗

$x=0$ で極小値 8，$x=1$ で極大値 13，$x=3$ で極小値 -19



(2)　$y'=-4x^3+8x^2-4x=-4x(x^2-2x+1)=-4x(x-1)^2$
$y'=0$ とすると　$x=0,\ 1$
よって，$x=0$ で極大値 0 をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	↗	極大 0	↘	$-\dfrac{1}{3}$	↘



③$\boxed{\text{5-B-9}}$
3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が次の 2 条件を満たすとき，a，b，c，d の値を求めよ。
(i)　点 $(1,\ f(1))$ における接線は，$y=4x-3$ である。
(ii)　$x=-1$ において，極値として -7 をとる。

解答　$a=-1$，$b=1$，$c=5$，$d=-4$

解き方　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$　から，
$f'(-1)=0$ より，$3a-2b+c=0$……①
$f(-1)=-7$ より，$-a+b-c+d=-7$……②
$x=1$ における接線が $y=4x-3$ より，接点は
$(1,\ 1)$ から，$f(1)=1$，$f'(1)=4$
$f(1)=1$ より，$a+b+c+d=1$……③
$f'(1)=4$より，$3a+2b+c=4$……④
①～④を解く。

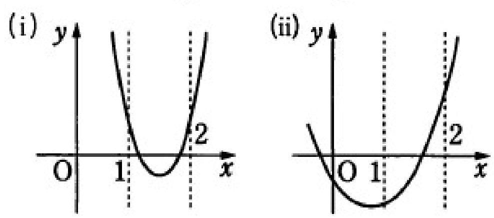
③5-B-10

3 次関数 $f(x)=x^3-3px^2+3px-1$ について，
(1)　極値をもたないための p の値の範囲を求めよ。
(2)　$1\leqq x\leqq 2$ の範囲で極小値をもつための p の範囲を求めよ。

◉昭和薬科大・改◉

解答　**(1)　$0\leqq p\leqq 1$　　(2)　$1<p\leqq\frac{4}{3}$**

解き方　(1)　$f'(x)=3x^2-6px+3p$
$=3(x^2-2px+p)$
これが極値をもたないためには，
$\frac{D}{4}=p^2-p\leqq 0$ より，$0\leqq p\leqq 1$
(2)　$1\leqq x\leqq 2$ で極小値をもつためには，この区間で $x^2-2px+p=0$ が
(i)　2 つの異なる解をもつ
(ii)　大きい方の解のみもつ
のいずれかを満たせばよい。



(i)のとき，$\begin{cases} D>0 \\ 1<\text{軸}<2 \\ f'(1)\geqq 0 \\ f'(2)\geqq 0 \end{cases}$
これを満たす p は存在しないため，解なし。
(ii)のとき，
$f'(1)<0$，$f'(2)>0$ より，$1<p<\frac{4}{3}$
または$\begin{cases} f'(1)=0 \\ \text{軸}<1 \end{cases}$ より，解なし。
または$\begin{cases} f'(2)=0 \\ \text{軸}<\frac{3}{2} \end{cases}$ より，$p=\frac{4}{3}$
以上から，$1<p\leqq\frac{4}{3}$

③$\boxed{\text{5-B-11}}$

方程式 $2x^3+3x^2-12x-k=0$ は，異なる 3 つの実数解 α，β，γ をもつとする。$\alpha<\beta<\gamma$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $-2<\beta<-\dfrac{1}{2}$ となるとき，α，γ の値の範囲を求めよ。　㊥高知大㊥

解答

(1) $-7<k<20$

(2) $\dfrac{-1-3\sqrt{3}}{2}<\alpha<-2$，$\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{2}<\gamma<\dfrac{5}{2}$

解き方 (1) 条件式より，

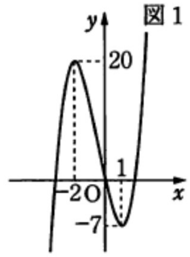
$2x^3+3x^2-12x=k$

ここで，

$y=2x^3+3x^2-12x$ のグラフと $y=k$ が異なる 3 つの共有点をもつのは図 1 より，

$-7<k<20$

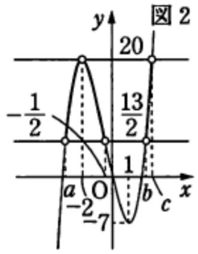
図 1



(2) 図 1 より，$\alpha<-2$，$-2<\beta<1$，$1<\gamma$ である。ここで，条件より，$-2<\beta<-\dfrac{1}{2}$，

$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=\dfrac{13}{2}$

図 2



より，図 2 における a，b，c，の座標を求める。a と b に関しては

$2x^3+3x^2-12x=\dfrac{13}{2}$ より，

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+2x-13)=0$ から，

$a=\dfrac{-1-3\sqrt{3}}{2}$，$b=\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{2}$

c に関しては $2x^3+3x^2-12x=20$ より，

$(x+2)^2(2x-5)=0$ から，$c=\dfrac{5}{2}$

これより，$\dfrac{-1-3\sqrt{3}}{2}<\alpha<-2$，

$\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{2}<\gamma<\dfrac{5}{2}$

③$\boxed{\text{5-B-12}}$

曲線 $y=x^3-x$ の接線で点 $(a,\ b)$ を通るものがちょうど 2 本存在する。

(1) a，b の満たすべき条件を求めよ。

(2) その 2 本の接線が直交するときの a，b の値を求めよ。　㊥一橋大㊥

解答

(1) $a\neq 0$ かつ $\{a+b=0$ または $b=a^3-a\}$

(2) $a=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$，$b=\mp\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$　(複号同順)

解き方 (1) $x=t$ における接線の方程式は
$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$
これが点 $(a,\ b)$ を通るから，代入して t に関して整理すると，
$2t^3-3at^2+(a+b)=0$ ……①
この左辺を $f(t)$ とおいて，$f(t)=0$ がちょうど 2 つの解をもつ条件を考える。
$f'(t)=6t(t-a)$ から，$a=0$ のときは $f(t)$ は単調増加になり，題意を満たさない。よって，$a\neq0$　このとき，$y=f(t)$ のグラフ上の極大点または極小点が t 軸に接すればよい。よって，求める条件は，
$a\neq0$ かつ $\{f(0)=0$ または $f(a)=0\}$

(2) (i) $a\neq0$ かつ $a+b=0$ のとき，
$f(t)=t^2(2t-3a)$ より，接点の x 座標 t は 0 と $\frac{3}{2}a$ であり，それぞれの傾きは -1，$\frac{27}{4}a^2-1$ で，これらが直交することから，$(-1)\cdot\left(\frac{27}{4}a^2-1\right)=-1$　よって，
$a=\pm\frac{2\sqrt{6}}{9}$，$b=\mp\frac{2\sqrt{6}}{9}$ （複号同順）

(ii) $a\neq0$ かつ $b=a^3-a$ のとき
$f(t)=(t-a)^2(2t+a)$ より，接点の x 座標 t は a と $-\frac{a}{2}$ であり，直交することから，$(3a^2-1)\left(\frac{3}{4}a^2-1\right)=-1$
よって，$9a^4-15a^2+8=0$
これは実数解をもたない。

③$\boxed{\text{5-B-13}}$

$x^4-2x^3-2x^2+a\geqq0$ がすべての実数 x に対して成立するような a の値の範囲を求めよ。　近畿大

解答　$a\geqq8$

解き方　$f(x)=x^4-2x^3-2x^2+a$ とおく。
$f(x)$ の最小値 $\geqq0$ が成立するような a を求める。$f'(x)=4x^3-6x^2-4x=2x(2x+1)(x-2)$

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$a-\frac{3}{16}$	↗	a	↘	$a-8$

増減表より，
$a-\frac{3}{16}\geqq0$ かつ $a-8\geqq0$　よって，$a\geqq8$

C 問題

③5-C-1

$f(0)=0$ および $(x+1)f'(x)-2f(x)+1=0$ を満たす整式 $f(x)$ に関して，

(1) $f(x)$ の最高次の項を ax^n として，n を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。　　　　◎滋賀大◎

解答　**(1) $n=2$　(2) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2-x$**

解き方 (1) $(x+1)f'(x)$ の最高次の項は nax^n，$-2f(x)$ の最高次の項は $-2ax^n$

したがって，$na-2a=0$ より，$n=2$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，

$f(0)=0$より，$c=0$

$f'(x)=2ax+b$ を条件式に代入して，

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx)+1=0$ より，

$(2a-b)x+b+1=0$

これから，$b=-1$，$a=-\dfrac{1}{2}$

③5-C-2

関数 $f(x)$ は任意の実数 x，y に対してつねに

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ を満たすとする。このとき

(1) $f(0)$ を求めよ。　(2) $f'(0)=1$ のとき，$f'(x)$ を求めよ。

◎自治医科大◎

解答　**(1) 0　(2) $f'(x)=x+1$**

解き方 (1) $x=y=0$ を代入して，

$f(0)=f(0)+f(0)$ より，$f(0)=0$

(2) $y=h$ を代入すると，

$f(x+h)=f(x)+f(h)+xh$ から，

$f(x+h)-f(x)=f(h)+xh$

両辺を h で割ると，

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(h)}{h}+x$

$=\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+x$

両辺の極限をとって，

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+x$

より，$f'(x)=f'(0)+x$

すなわち，$f'(x)=x+1$

③5-C-3

関数 $g(x)$ について，$g(1)=\alpha$，$g'(1)=\beta$ とするとき，次の極限を α と β で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{g((t+1)^2)-g(1)}{t}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2g(x)-g(1)}{x-1}$　◎青山学院大◎

解答　**(1) 2β　(2) $2\alpha+\beta$**

解き方　(1)　与式

$$=\lim_{t\to 0}\frac{g((t+1)^2)-g(1)}{(t+1)^2-1}\times\frac{(t+1)^2-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{g((t+1)^2)-g(1)}{(t+1)^2-1}\times(t+2)$$

$$=g'(1)\cdot 2=2\beta$$

(2)　与式

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2g(x)-g(x)+g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{(x^2-1)g(x)}{x-1}+\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{(x+1)g(x)+\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}$$

$$=2g(1)+g'(1)=2\alpha+\beta$$

③5-C-4

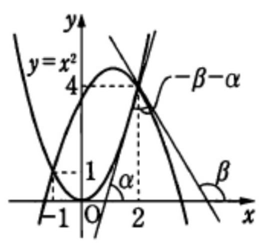
2 つの放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2+bx+c$ は，2 点 $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ で交わっていて，点 $(2,\ 4)$ におけるそれぞれの放物線の接線のなす角は $45°$ である。a，b，c を求めよ。

〈一橋大〉

解答

$$\boldsymbol{(a,\ b,\ c)=\left(-\frac{8}{9},\ \frac{17}{9},\ \frac{34}{9}\right),\ \left(-\frac{2}{15},\ \frac{17}{15},\ \frac{34}{15}\right)}$$

解き方　$f(x)=x^2$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とおく。$y=g(x)$ が 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$，$\mathrm{Q}(2,\ 4)$ を通るから



$1=a-b+c\cdots$①

$4=4a+2b+c\cdots$②

また，$f'(x)=2x$，$g'(x)=2ax+b$ より，点 $(2,\ 4)$ における接線と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α，β とすると，

$\tan\alpha=f'(2)=4$，$\tan\beta=g'(2)=4a+b$

この 2 接線のなす角は $45°$ より，

$\tan 45°=|\tan(\beta-\alpha)|$ より，

$\tan(\beta-\alpha)=\pm 1$ から，$\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\pm 1$

すなわち，$\dfrac{4a+b-4}{1+4(4a+b)}=\pm 1$ から，

$4a+b-4=\pm(16a+4b+1)$

よって，$12a+3b+5=0\cdots$③

または，$20a+5b-3=0\cdots$④

①，②より，$a+b=1\cdots$⑤

③，⑤より，$a=-\dfrac{8}{9}$，$b=\dfrac{17}{9}$，$c=\dfrac{34}{9}$

④，⑤より，$a=-\dfrac{2}{15}$，$b=\dfrac{17}{15}$，$c=\dfrac{34}{15}$

③5-C-5

$f(x)=x^3-6ax^2+9a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値およびそのときの x の値を求めよ。

〈関西大〉

解答

(i)　$\boldsymbol{a<\frac{1}{4}}$，$\boldsymbol{1\leqq a}$ **のとき，**

$\boldsymbol{x=1}$ **で 最大値** $\boldsymbol{9a^2-6a+1}$

(ii)　$\boldsymbol{a=\frac{1}{4}}$ **のとき，** $\boldsymbol{x=\frac{1}{4}}$**，1 で最大値** $\boldsymbol{\frac{1}{16}}$

(iii)　$\boldsymbol{\frac{1}{4}<a<1}$ **のとき，** $\boldsymbol{x=a}$ **で最大値** $\boldsymbol{4a^3}$

解き方　$f'(x)=3(x-a)(x-3a)$

(i)　$a\leqq 0$ のとき，$0\leqq x\leqq 1$ において

$x-a\geqq 0$，$x-3a\geqq 0$ より，$f'(x)\geqq 0$

よって，$f(x)$ は単調増加であり，$x=1$ で

最大値 $9a^2-6a+1$

(ii)　$0<a<3a<1$，すなわち，$0<a<\dfrac{1}{3}$ のとき

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$3a$	$\cdots$	1
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0	↗	

上の増減表から，$f(a)$ と $f(1)$ を比較すると，

$$f(a)-f(1)=4a^3-(9a^2-6a+1)$$
$$=(a-1)^2(4a-1)$$

より，$0<a<\dfrac{1}{4}$ のとき，$f(a)<f(1)$ で

最大値は $f(1)=9a^2-6a+1$

$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，最大値は $f(a)=f(1)=\dfrac{1}{16}$

$\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{3}$ のとき，$f(a)>f(1)$ で

最大値は $f(a)=4a^3$

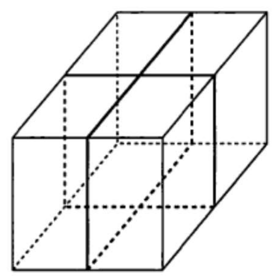
(iii)　$0<a<1\leqq 3a$，すなわち，$\dfrac{1}{3}\leqq a<1$ のとき最大値は $f(a)=4a^3$

(iv)　$1\leqq a$ のとき，$f'(x)\geqq 0$ より，$f(x)$ は単調増加。最大値は $f(1)=9a^2-6a+1$

③5-C-6

図のように直方体の各辺に平行に２本のひもがかけてある。ひもの長さの和は 16 で，直方体の表面積は 16 である。このような直方体の体積 V の最大値を求めよ。

◉東京学芸大◉



解答　$16(3\sqrt{2}-4)$

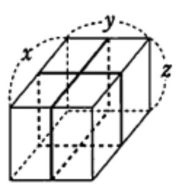
解き方　直方体の縦を x，横を y，高さを z とする。ひもの長さの和から，

$2x+2y+4z=16$……①

表面積から，

$2(xy+yz+zx)=16$……②

体積は，$V=xyz$……③



①から，$x+y=8-2z$……④

②から，$xy=8-z(x+y)=2z^2-8z+8$……⑤

④，⑤より，x，y は方程式

$t^2-(8-2z)t+2z^2-8z+8=0$ の実数解だから

$D\geqq 0$ より，$-2\sqrt{2}\leqq z\leqq 2\sqrt{2}$

$z>0$ から，$0<z\leqq 2\sqrt{2}$

③に⑤を代入して，$V=2z^3-8z^2+8z$

右辺を $f(z)$ とおくと，$f(z)=2z^3-8z^2+8z$

より，$f'(z)=2(3z-2)(z-2)$ から，

z	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
V'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
V		↗	極大	↘	極小	↗	

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{64}{27}$，$f(2\sqrt{2})=16(3\sqrt{2}-4)$ より，

③$\boxed{\text{5-C-7}}$

a を実数の定数とし，$f(y)=y^2+ay+a^2-1$，$g(x)=4x^3-3x$ とする。

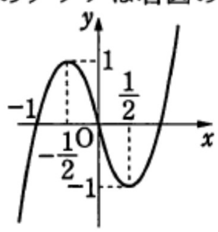
(1)　x についての方程式 $g(x)=c$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(2)　x についての方程式 $f(g(x))=0$ が異なる 6 個の実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。　　◎一橋大◎

解答　(1)　$c<-1$，$1<c$ のとき 1 個，$c=\pm1$ のとき 2 個，$-1<c<1$ のとき 3 個

(2)　$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}<a<-1$，$1<a<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

解き方　(1)　$y=4x^3-3x$ のグラフは右図のようになる。このグラフと直線 $y=c$ の共有点の個数を調べる。



(2)　$f(g(x))=0$ が異なる 6 つの解をもつには，$f(y)=0$ が異なる 2 つの解 c_1，c_2 をもち，かつ，$g(x)=c_1$，$g(x)=c_2$ がともに異なる 3 つの解をもつことが必要十分である。これより，$f(y)=0$ が $-1<y<1$ に異なる 2 つの解をもつ条件は

$$\begin{cases} D>0 & \cdots\cdots① \\ -1<\text{軸}<1 & \cdots\cdots② \\ f(-1)>0 & \cdots\cdots③ \\ f(1)>0 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

①より $3a^2-4<0$，②より $-2<a<2$

③より $a<0$，$1<a$，④より $a<-1$，$0<a$

これら 4 つを同時に満たす a の値の範囲は，

$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}<a<-1$，$1<a<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

③$\boxed{\text{5-C-8}}$

すべての $x\geqq0$ に対して，$x^3-3x^2\geqq k(3x^2-12x-4)$ が成り立つ定数 k の値の範囲を求めよ。　　◎慶應義塾大◎

解答　$\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

解き方　$f(x)=x^3-3x^2-k(3x^2-12x-4)$ とおくと，$f'(x)=3(x-2)(x-2k)$

(i)　$k<1$ のとき $2k<2$ より，題意を満たすための条件は，$\begin{cases} f(0)\geqq0 \\ f(2)\geqq0 \end{cases}$ より，$\dfrac{1}{4}\leqq k<1$

(ii)　$k=1$ のとき $f'(x)\geqq0$ から，$f(x)$ は単調増加。よって，$f(0)\geqq0$ より，$k\geqq0$

よって，$k=1$

(iii)　$k>1$ のとき $2<2k$ より，題意を満たすための条件は，

$\begin{cases} f(0)\geqq0 \\ f(2k)\geqq0 \end{cases}$ より，$1<k\leqq\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

以上から，求める k の値の範囲は，

$\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

③$\boxed{\text{5-C-9}}$

a を定数とし，$f(x)=x^4+x^2-6x$，$g(x)=-2x^2-16x+a$ とする。

(1)　どのような実数 x に対しても $f(x)\geqq g(x)$ となる a の値の範囲を求めよ。

(2)　どのような実数 x_1，x_2 に対しても $f(x_1)\geqq g(x_2)$ となる a の値の範囲を求めよ。　　◎豊橋技術科学大◎

解答　(1)　$a\leqq-6$　　(2)　$a\leqq-36$

解き方 (1) $h(x)=f(x)-g(x)$ として，最小値が 0 以上ならばよい。
$h(x)=x^4+3x^2+10x-a$ より，
$h'(x)=2(x+1)(2x^2-2x+5)$
よって，$x=-1$ で最小をとる。
$h(-1)=-6-a\geqq 0$ から，$a\leqq -6$

(2) $f(x)$ の最小値が $g(x)$ の最大値以上ならばよい。
$f'(x)=2(x-1)(2x^2+2x+3)$ より，
$x=1$ で最小，$f(1)=-4$
$g(x)=-2(x+4)^2+32+a$ より，
$x=-4$ で最大，$g(-4)=32+a$
$-4\geqq 32+a$ から，$a\leqq -36$

③ 5-C-10

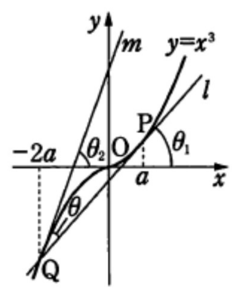
曲線 $y=x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における接線を l，l が再びこの曲線と交わる点を Q，Q におけるこの曲線の接線を m とし，2 直線 l，m がなす角のうち鋭角であるほうを θ とする。$a>0$ として，次の問いに答えよ。
(1) $\tan\theta$ を a で表せ。
(2) θ が最大になるときの a の値と $\tan\theta$ の値を求めよ。 一橋大

解答

(1) $\dfrac{9a^2}{36a^4+1}$

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

解き方 (1) 点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における接線 l は，
$y=3a^2x-2a^3$
これと $y=x^3$ の交点は，
$x^3=3a^2x-2a^3$
から，$(x-a)^2(x+2a)=0$
$x=a,\ -2a$ から $\mathrm{Q}(-2a,\ -8a^3)$
これより，点 Q における接線の傾きは
$3(-2a)^2=12a^2$



l と m が x 軸となす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると，$\tan\theta_1=3a^2$，$\tan\theta_2=12a^2$
どちらも正で $\tan\theta_1<\tan\theta_2$ なので，
$0°<\theta_1<\theta_2<90°$
よって，

$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$
$$=\frac{12a^2-3a^2}{1+12a^2\cdot 3a^2}=\frac{9a^2}{36a^4+1}$$

(2) $$\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{9}\left(36a^2+\frac{1}{a^2}\right)\geqq\frac{2}{9}\sqrt{36a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=\frac{4}{3}$$
より，$\tan\theta\leqq\dfrac{3}{4}$
等号は $36a^2=\dfrac{1}{a^2}$ より，$a=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき成立する。

第５章　数学Ⅱの積分

《学習項目》

・不定積分とその公式
・定積分とその公式
・定積分と面積
・1/6公式
・偶関数と奇関数の積分公式
・絶対値の積分
・微分積分学の基本定理
・積分方程式

A 問題

③5-A-1

次の不定積分を求めよ。

$$\int (2y^2+2y+3)dy$$

解答　C は積分定数とする。$\dfrac{2}{3}y^3+y^2+3y+C$

③5-A-2

等式 $\displaystyle\int_0^2 (2x^2+ax-5)dx=\frac{4}{3}$ を満たす定数 a の値を求めよ。

解答　$a=3$

③5-A-3

次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^4-5x^3+x^2+9x)dx$　　(2)　$\displaystyle\int_{-3}^{3} (x+1)(x+2)(x+3)dx$

解答　(1)　$\dfrac{272}{15}$　　(2)　144

③5-A-4

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^{3} (x-2)^2 dx$$

解答　$\dfrac{28}{3}$

③5-A-5

次の曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2(x-5)$　　　(2)　$y=-x^3-x^2+x+1$

解答　(1)　$\dfrac{625}{12}$　　(2)　$\dfrac{4}{3}$

③5-A-6

次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{3}|x-2|dx$　　　(2)　$\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2-4x+3|dx$

解答　(1)　5　　(2)　2

③5-A-7

等式 $f(x)=3x^2+2\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=3x^2-2$

③5-A-8

次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+6x+5$　　　(2)　$\displaystyle\int_1^x f(t)dt=2x^2-3x+a$

解答　(1)　$f(x)=2x+6$，$a=-5$，-1　　(2)　$f(x)=4x-3$，$a=1$

B 問題

③5-B-1

$S=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)^2dx$ の最小値と，そのときの定数 a，b の値を求めよ。　㊥東京理科大㊥

解答 $a=0$，$b=-\dfrac{1}{3}$ のとき 最小値 $\dfrac{8}{45}$

解き方 $S=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)^2dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^4+a^2x^2+b^2+2ax^3+2abx+2bx^2)dx$

$=2\int_{0}^{1}\{x^4+(a^2+2b)x^2+b^2\}dx$

$=2\left[\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{a^2+2b}{3}x^3+b^2x\right]_0^1$

$=2\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{a^2+2b}{3}+b^2\right)$

$=2\left\{\dfrac{a^2}{3}+\left(b+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{45}\right\}$

よって，$a=0$，$b=-\dfrac{1}{3}$ のとき

S は最小値 $\dfrac{8}{45}$ をとる。

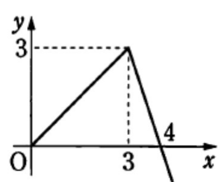
③5-B-2

$f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 3) \\ -3x+12 & (x>3) \end{cases}$ のとき，$x\geqq 0$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ と定める。このとき，$g(x)$ を求めよ。　㊥センター試験㊥

解答 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & (0\leqq x\leqq 3) \\ -\dfrac{3}{2}x^2+12x-18 & (x\geqq 3) \end{cases}$

(i) $0\leqq x\leqq 3$ のとき

$g(x)=\int_0^x tdt=\dfrac{1}{2}x^2$



(ii) $x\geqq 3$ のとき

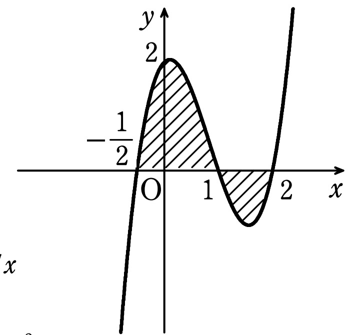
$g(x)=\int_0^3 tdt+\int_3^x(-3t+12)dt$

$=-\dfrac{3}{2}x^2+12x-18$

③5-B-3

曲線 $y=2x^3-5x^2+x+2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答 $\dfrac{253}{96}$



曲線 $y=2x^3-5x^2+x+2$ と x 軸の交点の x 座標は，

$P(x)=2x^3-5x+x+2$ とすると

$P(x)=0$ を解いて　　$x=1,\ 2,\ -\frac{1}{2}$

求める面積 S は

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x^3-5x^2+x+2)dx-\int_1^2(2x^3-5x^2+x+2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{5}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}-\left[\frac{x^4}{2}-\frac{5}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{2^4}{2}-\frac{5}{3}\cdot 2^3+\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}-\left(-\frac{61}{96}\right)=\frac{253}{96}$$

③$\boxed{\text{5-B-4}}$

2 つの放物線 $y=-x^2+k$ と $y=x^2+1$ で囲まれた部分の面積 S が $\frac{8}{3}$ のとき，k の値を求めよ。

解答　$k=3$

(1)　$-x^2+k=x^2+1$，すなわち，$2x^2=k-1$ が実数解 α，β（$\alpha<\beta$）をもつとすると，

$k>1$ で，このとき，$\beta-\alpha=\sqrt{2(k-1)}$

$S=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+k)-(x^2+1)\}dx=\int_\alpha^\beta(-2x^2+k-1)dx=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{8}{3}$ より，$\beta-\alpha=2$

ゆえに，$\sqrt{2(k-1)}=2$ より，$\boldsymbol{k=3}$

③$\boxed{\text{5-B-5}}$

点（1，-3）を通って，曲線 C：$y=x^2$ に 2 本の接線を引くとき，

(1) 接線の方程式を求めよ。

(2) (1)の 2 接線と，曲線Cとで囲まれた図形の面積Sを求めよ

解答　（ア）　$y=-2x-1$，$y=6x-9$　　（イ）　$\frac{16}{3}$

$y=x^2$ から　$y'=2x$

接点の座標を $(\alpha,\ \alpha^2)$ とすると，接線の方程式は

$$y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$$

これが点 $(1,\ -3)$ を通るとき　$-3-\alpha^2=2\alpha(1-\alpha)$

これを解くと　$\alpha=-1,\ 3$

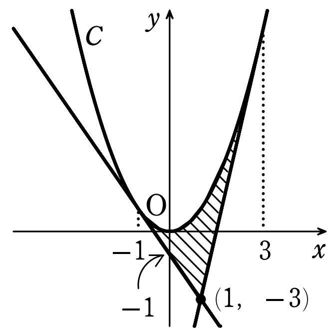
よって，接線の方程式は　$^{ア}\,y=-2x-1,\ y=6x-9$

ゆえに

$$S=\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}dx+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{1}^{3}$$

$$=\left(\frac{1}{3}+1+1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)+(9-27+27)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)={}^{イ}\,\frac{16}{3}$$



③ $\boxed{\text{5-B-6}}$

放物線 $y=x^2+ax+b$ が曲線 $y=x^2(x-2)$ と，$x=1$ で共通の接線をもつとき，定数 a と b の値およびこの共通接線の方程式を求めよ。

また，この放物線と共通接線と直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

解答　$a=-3$，$b=1$，共通接線の方程式 $y=-x$，面積 $\dfrac{2}{3}$

$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x^2(x-2)=x^3-2x^2$ とする。

このとき　$f'(x)=2x+a$，$g'(x)=3x^2-4x$

$x=1$ で共通の接線をもつから　$f(1)=g(1)$ かつ $f'(1)=g'(1)$

よって　$1+a+b=-1$，$2+a=-1$

ゆえに　$a=-3$，$b=1$

したがって，共通接線の方程式は

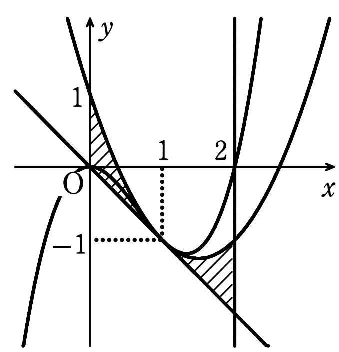
$$y=-1\cdot(x-1)-1 \quad すなわち \quad y=-x$$

また　$f(x)=x^2-3x+1$

求める面積は

$$\int_0^2\{(x^2-3x+1)-(-x)\}dx=\int_0^2(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^2=\frac{2}{3}$$



③ $\boxed{\text{5-B-7}}$

曲線 $C：y=x^3-x$ 上の点 $\mathrm{A}(2,\ 6)$ における接線と曲線 C で囲まれる面積を求めよ。

解答　108

接線の方程式は $y=11x-16$ より
$x^3-x=11x-16$ から，$(x-2)^2(x+4)=0$
これより，$S=\int_{-4}^{2}(x^3-12x+16)dx$
$=\frac{1}{12}\{2-(-4)\}^4=\mathbf{108}$

C 問題

③5-C-1

$f(x)f'(x)=\int_0^x f(t)dt+\frac{4}{9}$ を満たす整式 $f(x)$ を求めよ。　㊥名城大㊥

解答　$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}$

解き方　$f(x)$を n 次式とすると両辺の次数を比較して，$n+(n-1)=n+1$ から，$n=2$
これより，$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ とおくと，
$(ax^2+bx+c)(2ax+b)=\int_0^x(at^2+bt+c)dt+\frac{4}{9}$
これより，
$2a^2x^3+3abx^2+(b^2+2ac)x+bc$
$=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+\frac{4}{9}$
この式が x の恒等式であるから，
$2a^2=\frac{a}{3}$，$3ab=\frac{b}{2}$，$b^2+2ac=c$，$bc=\frac{4}{9}$　　これより，$a=\frac{1}{6}$，$b=\frac{2}{3}$，$c=\frac{2}{3}$

③5-C-2

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ は原点 (0，0) を通り，原点での接線の傾きが 2 であるという。さらに，すべての 1 次関数 $g(x)$ に対して，つねに $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ が成立するという。このとき，a，b，c，d を求めよ。　㊥青山学院大㊥

解答　$\boldsymbol{a=\frac{20}{3}}$，$\boldsymbol{b=-8}$，$\boldsymbol{c=2}$，$\boldsymbol{d=0}$

解き方　$f(0)=0$ より，$d=0$

$f'(0)=2$ より，$c=2$

これより，$f(x)=ax^3+bx^2+2x$,

$g(x)=px+q$ $(p\neq 0)$ とおくと，

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$=\int_0^1 (ax^3+bx^2+2x)(px+q)dx$$

$$=\frac{ap}{5}+\frac{aq+bp}{4}+\frac{bq+2p}{3}+q$$

$$=\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{2}{3}\right)p+\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+1\right)q=0$$

これが p，q について恒等式であるから，

$\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{2}{3}=0$，$\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+1=0$ から，

$a=\frac{20}{3}$，$b=-8$

③5-C-3

2 つの曲線 $y=x^3-(2a+1)x^2+a(a+1)x$，$y=x^2-ax$ が囲む 2 つの部分の面積が等しいときの a $(a>0)$ の値を求めよ。　立教大

解答　$a=2$

解き方　$x^3-(2a+1)x^2+a(a+1)x=x^2-ax$ より，$x(x-a)(x-a-2)=0$ から，交点の x 座標は，$x=0$，a，$a+2$ で，$a>0$ より，$0<a<a+2$ から，2 つの面積が等しいとき，その差は 0 だから，

$$\int_0^{a+2}\{x^3-(2a+1)x^2+a(a+1)x-(x^2-ax)\}dx$$

$$=\int_0^{a+2}\{x^3-2(a+1)x^2+a(a+2)x\}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}(a+1)x^3+\frac{1}{2}a(a+2)x^2\right]_0^{a+2}$$

$$=\frac{1}{12}(a+2)^3(a-2)=0$$

$a>0$ から，$a=2$

③5-C-4

2 つの曲線 $y=x(x-1)^2$，$y=kx^2$ $(k>0)$ について

(1)　この 2 つの曲線は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(2)　この 2 つの曲線で囲まれる 2 つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ。　防衛大

解答

(1)　$x(x-1)^2=kx^2$ とおいて，$x\{x^2-(k+2)x+1\}=0$……①の実数解の個数を考える。$x^2-(k+2)x+1=0$ は $k>0$ から，$D=(k+2)^2-4=k^2+4k>0$ となり，異なる 2 つの実数解をもつ。また，この方程式は 0 を解にもたないから，①は異なる 3 つの解をもつ。すなわち 2 つの曲線は相異なる 3 点で交わる。

(2)　$k=\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

解き方　(2)　①の 3 つの解を 0，α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，2 つの部分の面積が等しいとき，

$\int_0^{\beta}\{x(x-1)^2-kx^2\}dx=0$ より，

$\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-4(k+2)\beta+6\}=0$

ここで，$\beta\neq 0$ より，

$3\beta^2-4(k+2)\beta+6=0$……②

また，β は $x^2-(k+2)x+1=0$ の解より，

$\beta^2-(k+2)\beta+1=0$……③

③×4－②より，$\beta^2=2$

ここで，$\beta>0$ より，$\beta=\sqrt{2}$

②に代入して，$k=\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$

③5-C-5

曲線 C_1：$y=x^3-x$ を x 軸方向に a $(a>0)$ だけ平行移動して得られる曲線を C_2 とする。2 曲線が異なる共有点をもつとき，この 2 曲線で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ。　一橋大

$\dfrac{1}{2}$　$(a=1)$

解答

解き方　$f(x)=x^3-x$ とおく。

$C_2: y=g(x)$ とすると，

$g(x)=f(x-a)=(x-a)^3-(x-a)$

より，2 曲線 C_1，C_2 の共有点の x 座標は

$x^3-x=(x-a)^3-(x-a)$ より，

$a(3x^2-3ax+a^2-1)=0$……①

異なる共有点をもつから，

$D>0$ より，$0<a<2$

①の 2 解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，

$\alpha+\beta=a$，$\alpha\beta=\dfrac{a^2-1}{3}$　　また，面積は，

$$S=\left|\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx\right|$$

$$=3a\left|\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx\right|$$

$$=3a\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{a}{2}\left(\frac{4-a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

これより，$S^2=\dfrac{a^2}{4}\cdot\dfrac{(4-a^2)^3}{3^3}$

$$=\frac{1}{4\times3^3}a^2(4-a^2)^3$$

ここで，$a^2=x$ とおき，$h(x)=x(4-x)^3$

とおくと，

$h'(x)=-4(x-1)(x-4)^2$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(x)$	／	+	0	−	0	−
$h(x)$	／	↗	27	↘	0	↘

よって，$x=1$ のとき $h(x)$ は極大かつ最大となる。ゆえに，$a^2=1$ すなわち $a=1$ のとき S は最大値 $\dfrac{1}{2}$

③5-C-6

2 つの放物線 $C_1: y=x^2-(a+1)x+a$ と $C_2: y=x^2-(a-1)x-a$ がある。ただし，$-1<a<1$ とする。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 および l によって囲まれた図形の面積を求めよ。　㊎島根大㊎

(1)　$y=ax-a^2-\dfrac{1}{4}$　　(2)　$\dfrac{1}{12}$

解答

解き方　(1)　$l: y=mx+n$ とすると C_1 と接するから $x^2-(a+1+m)x-(n-a)=0$ において，$D_1=0$ より，

$(a+1+m)^2+4(n-a)=0$……①

同様に C_2 と接するから，$D_2=0$ より，

$(a-1+m)^2+4(n+a)=0$……②

①，②より，$m=a$，$n=-a^2-\dfrac{1}{4}$ から，

$l: y=ax-a^2-\dfrac{1}{4}$

(2)　l と C_1 の接点の x 座標は，$\dfrac{2a+1}{2}$

l と C_2 の接点の x 座標は，$\dfrac{2a-1}{2}$

C_1 と C_2 の交点の x 座標は，a

これより，求める面積は，

$$\int_{\frac{2a-1}{2}}^{a}\left\{x^2-(2a-1)x+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right\}dx$$

$$+\int_a^{\frac{2a+1}{2}}\left\{x^2-(2a+1)x+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{2a-1}{2}\right)^3\right]_{\frac{2a-1}{2}}^{a}$$

$$+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{2a+1}{2}\right)^3\right]_a^{\frac{2a+1}{2}}$$

$$=\frac{1}{12}$$

③$\boxed{\text{5-C-7}}$

xy 平面上に曲線 $C: y=x^3-x^2$ と直線 $l: y=mx$ がある。

(1) C と l が $x>0$ の範囲で相異なる 2 つの共有点をもつための m の条件を求めよ。

(2) (1)の条件のもとで m を変化させるとき，C と l で囲まれる部分の面積の和を最小にする m の値を求めよ。

(3) (2)における面積の和の最小値を求めよ。

㊎芝浦工業大㊎

解答 (1) $-\dfrac{1}{4}<m<0$ (2) $m=4-3\sqrt{2}$ (3) $\dfrac{17-12\sqrt{2}}{6}$

解き方 (1) $x^3-x^2=mx$ とおいて，

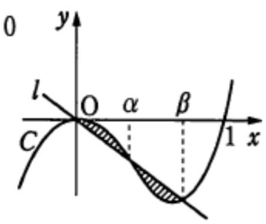
$x(x^2-x-m)=0$

よって，$x^2-x-m=0$……①が $x>0$ で相異なる 2 つの実数解をもつための条件は，

$f(x)=x^2-x-m$ とおくと

$\begin{cases} D>0 \text{ より，} 1+4m>0 \\ f(0)>0 \text{ より，} m<0 \\ \text{軸}>0 \text{ は成立。} \end{cases}$

よって，$-\dfrac{1}{4}<m<0$



(2) C と l の原点以外の共有点の x 座標を α，β ($\alpha<\beta$) とおくと，求める面積の和 S は，

$$S=\int_0^{\alpha}(x^3-x^2-mx)dx+\int_{\alpha}^{\beta}(mx-x^3+x^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{m}{2}x^2\right]_0^{\alpha}+\left[\frac{m}{2}x^2-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{4}(\alpha^4-\beta^4)-\frac{1}{3}(\alpha^3-\beta^3)-\frac{m}{2}(\alpha^2-\beta^2)+\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^3}{3}-\frac{m}{2}\alpha^2$$

$$=\frac{1}{12}(\alpha-\beta)[3(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-4\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-6m(\alpha+\beta)]+\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^3}{3}-\frac{m}{2}\alpha^2$$

ここで，①から $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-m$ より，

$$S=\frac{1}{12}\{(2\alpha-1)(-4\alpha^2+4\alpha-1)+2\alpha^3-3\alpha^4\}$$

$$=-\frac{1}{12}(3\alpha^4+6\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha-1)$$

$$S'=-\frac{1}{2}(2\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha+1)$$

③$\boxed{\text{5-C-8}}$

曲線 $y=x^4-2x^3-3x^2+5x+5$ に異なる 2 点で接する接線の方程式を求めよ。また，この曲線と接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

㊎東京理科大㊎

解答 $\dfrac{81}{10}$

解き方 接線の方程式を $y=ax+b$，接点の x 座標を α，β ($\alpha<\beta$) とすると，

$x^4-2x^3-3x^2+5x+5-ax-b$

$=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ より，$-2=-2(\alpha+\beta)$……①

$-3=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta$……②

$5-a=-2\alpha\beta(\alpha+\beta)$……③

$5-b=\alpha^2\beta^2$……④

①から，$\alpha+\beta=1$，これを②に代入して，

$\alpha\beta=-2$　これらを③，④に代入して，

$a=1$，$b=1$

また，$\alpha=-1$，$\beta=2$　したがって，

$$S=\int_{-1}^{2}(x^4-2x^3-3x^2+4x+4)dx=\frac{81}{10}$$

③$\boxed{\text{5-C-9}}$

関数 $g(x)=\int_x^{x+1}|t(t-3)|dt$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。　　　　　　　　　　　　　　㊐佐賀大㊐

解 答　**(1)　最大値 $\frac{13}{6}$　$(x=1)$，最小値 $\frac{27-16\sqrt{2}}{6}$　$(x=1+\sqrt{2})$**

解き方　(1)　(i)　$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，図1より，$g(x)$

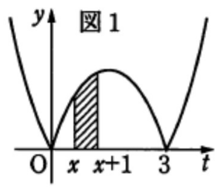


図 1

$=\int_x^{x+1}\{-t(t-3)\}dt$

$=-x^2+2x+\frac{7}{6}=-(x-1)^2+\frac{13}{6}$

よって，この区間では $x=1$ で最大値 $\frac{13}{6}$，

$x=0$，2 で最小値 $\frac{7}{6}$

(ii)　$2 \leqq x \leqq 3$ のとき，図2より，$g(x)$

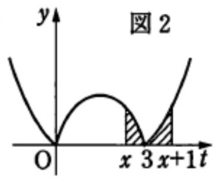


図 2

$=\int_x^3(3t-t^2)dt$

$+\int_3^{x+1}(t^2-3t)dt=\frac{2}{3}x^3-2x^2-2x+\frac{47}{6}$

$g'(x)=2(x^2-2x-1)$ より，

$x=1+\sqrt{2}$ で極小となり，$\frac{27-16\sqrt{2}}{6}$

$g(2)=\frac{7}{6}$，$g(3)=\frac{11}{6}$ より，

この区間では，$x=3$ で最大値 $\frac{11}{6}$

$x=1+\sqrt{2}$ で最小値 $\frac{27-16\sqrt{2}}{6}$

以上(i)，(ii)より最大値 $\frac{13}{6}$　$(x=1)$

最小値 $\frac{27-16\sqrt{2}}{6}$　$(x=1+\sqrt{2})$

③$\boxed{\text{5-C-10}}$

放物線 $y=x^2$ …… ① と半径 r の円 $x^2+(y-1)^2=r^2$ …… ② がある。

(1)　放物線 ①と 円 ② が 2 点で接するとき，半径 r の値を求めよ。ただし，「2曲線が接する」とは，その共有点における接線が一致することを表すものとする。

(2)　(1)で求めた r の値に対して，①と②で囲まれる部分の面積を求めよ。

解答　(1)　$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$S=\frac{1}{24}(32-9\pi)$

(1)　$y'=2x$

よって，接線 l の方程式は　$y-a^2=2a(x-a)$　すなわち　$y=2ax-a^2$

(2)　接点を A$(a,\ a^2)$，円 ② の中心を C$(0,\ 1)$ とする．

直線 AC の傾きは　$\dfrac{a^2-1}{a-0}=\dfrac{a^2-1}{a}$

直線 AC と接線 l は垂直であるから　$2a\cdot\dfrac{a^2-1}{a}=-1$

ゆえに　$a^2=\dfrac{1}{2}$　　$a>0$ であるから　$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

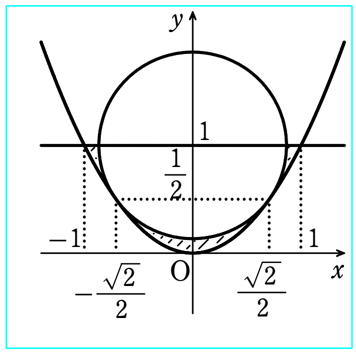
また，A は円 ② 上の点であるから　$a^2+(a^2-1)^2=r^2$

ゆえに　$r^2=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2=\dfrac{3}{4}$

$r>0$ であるから　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$y\geqq x^2$，$y\leqq 1$，$x^2+(y-1)^2\geqq\dfrac{3}{4}$ を図示すると

右図の斜線部分となる．ただし，境界線を含む．



また　$S=2\left\{1\times1-\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{4}-\displaystyle\int_0^1 x^2dx\right\}$

$=2\left(1-\dfrac{3}{16}\pi-\dfrac{1}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{24}(32-9\pi)$