第 8 章　数列

《学習項目》

・数列の定義
・等差数列の一般項と和
・等比数列の一般項と和
・等差中項，等比中項
・Σ記号と和の公式
・階差数列
・等差×等比の和
・和から一般項を求める公式

A 問題

②A-8-21

(1) 第 3 項が -2，第 12 項が 25 である等差数列の一般項を求めよ。

(2) (1) の数列の末項が 109 であるとき，初項から末項までの和を求めよ。

●解答　(1) 初項を a，公差を d とすると，

$a_3=a+2d=-2$，$a_{12}=a+11d=25$　　この 2 式を解いて，$a=-8$，$d=3$

よって，一般項は，$a_n=-8+(n-1)\cdot 3=3n-11$

(2) $a_n=109$ とすると，$3n-11=109$ より，$n=40$

よって，求める和 S は，$S=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot(-8+109)=2020$

②A-8-22

(1) 第 3 項が 12，第 6 項が -96 である等比数列の一般項を求めよ。

(2) (1) の等比数列の末項が -1536 であるとき，初項から末項までの和を求めよ。

●解答　(1) 初項を a，公比を r とすると，$a_3=ar^2=12$ ……①　$a_6=ar^5=-96$ ……②

②÷①より，$r^3=-8$，$r^3+8=0$，$(r+2)(r^2-2r+4)=0$，$(r+2)\{(r-1)^2+3\}=0$

よって，$(r-1)^2+3>0$（r は実数）より，$r=-2$　このとき，①より，$a=3$

したがって，一般項は，$a_n=3\times(-2)^{n-1}$

(2) $a_n=-1536$ とすると，(1)より，$3\times(-2)^{n-1}=-1536$

よって，$(-2)^{n-1}=-512=-2^9=(-2)^9$ より，$n-1=9$　よって，$n=10$　← $a^m=$

ゆえに，求める和 S は，$S=\frac{3\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=1-2^{10}=1-1024=-1023$

②A-8-23

数列 x, 12, y が等比数列になっており，68, y, x が等差数列になっている。$0<x<y$ x, y の値を求めよ。

$x=4$，$y=36$

(3) 条件から，$12^2=xy$，$2y=68+x$

この 2 式を連立させて，$(x, y)=(-72, -2)$，$(4, 36)$

$0<x<y$ より，$x=4$，$y=36$

②A-8-24

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k-3)$　　(2) $\sum_{k=1}^{n}2k(k^2-1)$

(3) $\sum_{k=0}^{n-1}(4k+3)$　　(4) $\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)(k-2)$

(6) $\frac{1}{6}n(4n^2+3n-19)$

(7) $\frac{1}{2}n(n-1)(n+1)(n+2)$　　(8) $n(2n+1)$

(9) $\frac{1}{6}(n-1)(2n^2-n-24)$

(6) $\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k-3)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}3$

$=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}-3n$

$=\frac{n}{6}\{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)-18\}$

$=\frac{n}{6}(4n^2+3n-19)$

(7) $2\sum_{k=1}^{n}k^3-2\sum_{k=1}^{n}k=2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{2}\{n(n+1)-2\}=\frac{n(n+1)}{2}(n-1)(n+2)$

(8) $3+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)=3+4\sum_{k=1}^{n-1}k+3(n-1)$

$=4\cdot\frac{(n-1)n}{2}+3n=n\{2(n-1)+3\}=n(2n+1)$

(9) $\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-4)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}4$

$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-4(n-1)=\frac{n-1}{6}\{n(2n-1)-24\}$

$=\frac{1}{6}(n-1)(2n^2-n-24)$

②A-8-25

次の和を求めよ。

(1) $2^2+4^2+6^2+8^2+\cdots\cdots+(2n)^2$

(2) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot7+4\cdot5\cdot9+\cdots\cdots+n(n+1)(2n+1)$

解答　(1) $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$　　(2) $\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$

②A-8-26

次の和 S を求めよ。

$$S=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

解答　$\dfrac{n}{3n+1}$

②A-8-27

次の和 S を求めよ。

$$S=1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}$$

解答　$S=(2n-3)\cdot 2^n+3$

②A-8-28

初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=2^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_1=2$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=2^{n-1}$

B 問題

②B-8-14

(1)　ある等差数列において，初めの 10 項の和が 10 で，次の 10 項の和が 20 である。この数列の一般項を求めよ。

(2)　2 つの自然数 3 と 15 の間にある，分母が 7 の既約分数の和を求めよ。

(1)　$a_n=\frac{1}{10}n+\frac{9}{20}$　　(2)　648

解き方　(1)　初めの 10 項の和が 10 より，初項 a，公差 d とすると，

$10=\frac{1}{2}\times10\times(2a+9d)$

よって，$2=2a+9d$…①

次の 10 項の和が 20 より，初めから第 20 項までの和は 30 となり，

$30=\frac{1}{2}\times20\times(2a+19d)$

よって，$3=2a+19d$…②

①，②より，$a=\frac{11}{20}$，$d=\frac{1}{10}$

(2)　$\frac{22}{7}+\frac{23}{7}+\frac{24}{7}+\frac{25}{7}+\frac{26}{7}+\frac{27}{7}+\frac{28}{7}+\frac{29}{7}+\cdots\cdots+\frac{104}{7}-(4+5+6+\cdots\cdots+14)$

$=\frac{1}{7}(22+23+\cdots\cdots+104)-(4+5+\cdots\cdots+14)$

$=648$

②B-8-15

(1)　ある等比数列において，初項から第 5 項までの和が 4 で，第 10 項までの和は 132 である。この数列の一般項を求めよ。

(2)　等比数列のはじめの 10 項の和は 2 で，その次の 20 項の和は 12 である。さらにこれにつづく 30 項の和を求めよ。

(1)　$a_n=\frac{4}{31}\cdot2^{n-1}$　　(2)　112

解き方　(1)　$S_5=\frac{a(r^5-1)}{r-1}$

$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{a(r^5-1)}{r-1}(r^5+1)$

$=S_5(r^5+1)$

よって，$132=4(r^5+1)$ となり，$r^5=32$

$r=2$ より，$a=\frac{4}{31}$ となり，初項 $\frac{4}{31}$，公比 2

(2)　$S_{10}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=2$……①

$S_{30}=\frac{a(1-r^{30})}{1-r}=2+12$……②

②より，$14=\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r}$

ここに①を代入して，

$14=2(1+r^{10}+r^{20})$ から，$r^{10}=2$

$S_{60}=\frac{a(1-r^{60})}{1-r}=\frac{a(1-r^{30})(1+r^{30})}{1-r}$

$=14(1+2^3)=126$

よって，求める和は $S_{60}-S_{30}=112$

②B-8-16

初項が 23，公差が整数である等差数列 $\{a_n\}$ があり，初項から第 6 項までは正の数であって，第 7 項から負に変わるという。初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n の最大値を求めよ。

解き方　公差を d とおくと，$a_n=23+(n-1)d$

$n=6$ を代入して，$23+5d>0$……①

$n=7$ を代入して，$23+6d<0$……②

①，②を満たす整数 d は $d=-4$

第 6 項まで正で，第 7 項から負になるから，

第 6 項までの和が最大である。最大値は，

$S_6=\frac{6}{2}\{2\times23+5\times(-4)\}=78$

②B-8-17

次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$9,\ 99,\ 999,\ 9999,\ \cdots\cdots$$

解答　第 k 項 10^k-1，和 $\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{9}$

$9=10-1$，$99=10^2-1$，$999=10^3-1$，$9999=10^4-1$，……

であるから，第 k 項は　　10^k-1

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$$

②B-8-18

次の数列の和を求めよ。

(1)　$1\cdot(n+1)$，$2\cdot(n+2)$，$3\cdot(n+3)$，……，$n(n+n)$

(2)　$1^2\cdot n$，$2^2\cdot(n-1)$，$3^2\cdot(n-2)$，……，$n^2\cdot 1$

解答　(1)　$\dfrac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$　　(2)　$\dfrac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

(1)　この数列の第 k 項 a_k $(k\leqq n)$ は　　$a_k=k(n+k)=k^2+nk$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+nk)=\sum_{k=1}^{n}k^2+n\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3n\}=\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$$

(2)　この数列の第 k 項 a_k $(k\leqq n)$ は　　$a_k=k^2\{n-(k-1)\}=-k^3+(n+1)k^2$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^3+(n+1)k^2\}=-\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{-3n+2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

②B-8-19

次の数列の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+\dfrac{1}{5\cdot7\cdot9}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{31\cdot33\cdot35}$

(1) $\boldsymbol{\sqrt{n+1}-1}$　　(2) $\boldsymbol{\dfrac{32}{385}}$

(2) $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}-\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right)$

与式$=\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{1}{1\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot5}\right)+\left(\dfrac{1}{3\cdot5}-\dfrac{1}{5\cdot7}\right)\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{5\cdot7}-\dfrac{1}{7\cdot9}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{31\cdot33}-\dfrac{1}{33\cdot35}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1\cdot3}-\dfrac{1}{33\cdot35}\right)=\dfrac{32}{385}$

解き方　(1) $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

より，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$

$+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

②B-8-20

初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられるとき，一般項 a_n を求めよ。ただし，(3)は $a_n>0$ とする。

(1)　$S_n=3n^2-6n$　　(2)*　$S_n=3^n-4n-1$

(3)*　$3S_1{}^2+5S_2{}^2+7S_3{}^2+\cdots\cdots+(2n+1)S_n{}^2=3n^2(n+1)^2(n+2)^2$

(1) $\boldsymbol{a_n=6n-9}$　　(2) $\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}-4}$

(3) $\boldsymbol{a_n=6n}$

解き方　(1)　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3n^2-6n-\{3(n-1)^2-6(n-1)\}$

$=6n-9$　$(n\geqq2)\cdots\cdots①$

$n=1$ のとき，$a_1=6-9$，$S_1=3-6$ より

$a_1=S_1$ から①は $n=1$ でも成立。

(2)　$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3^n-4n-1-\{3^{n-1}-4(n-1)-1\}$

$=2\cdot3^{n-1}-4$　$(n\geqq2)\cdots\cdots①$

$n=1$ のとき，$a_1=2-4$，$S_1=3-4-1$ より，$a_1=S_1$ から，①は $n=1$ でも成立。

(3)　$3S_1{}^2+5S_2{}^2+\cdots\cdots+(2n-1)S_{n-1}{}^2$

$+(2n+1)S_n{}^2$

$=3n^2(n+1)^2(n+2)^2$

$3S_1{}^2+5S_2{}^2+\cdots\cdots+(2n-1)S_{n-1}{}^2$

$=3(n-1)^2n^2(n+1)^2$

ただし，$n\geqq2$

この 2 式の辺々を引いて，

$(2n+1)S_n{}^2=3n^2(n+1)^2\{(n+2)^2-(n-1)^2\}$

$=9n^2(n+1)^2(2n+1)$

より，$S_n{}^2=9n^2(n+1)^2$

ここで，$a_n>0$ より，$S_n>0$

よって，$S_n=3n(n+1)$　$(n\geqq2)$

条件式に $n=1$ を代入すると，

$3S_1{}^2=3\times2^2\times3^2$ より，$S_1=6$

よって，$S_n=3n(n+1)$ は $n=1$ でも成立する。

以上より，$S_n=3n^2+3n$

$a_n=S_n-S_{n-1}$　$(n\geqq2)$　より，$a_n=6n$

これは $S_1=6$ より，$n=1$ でも成立する。

$a_n=6n$

②B-8-21

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$3,\ \frac{5}{1^3+2^3},\ \frac{7}{1^3+2^3+3^3},\ \frac{9}{1^3+2^3+3^3+4^3},\ \cdots\cdots$$

解答　$\dfrac{4n(n+2)}{(n+1)^2}$

数列の第 k 項の分子は　　$3+(k-1)\cdot 2=2k+1$

また，数列の第 k 項の分母は

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\sum_{l=1}^{k}l^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

よって，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot\frac{4}{k^2(k+1)^2}&=4\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=4\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\\&=4\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}\right]\\&=4\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{4n(n+2)}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

C 問題

②C-8-11

S：5，8，11，14，……，902，T：2，7，12，17，……，997 なる 2 つの等差数列がある。S と T に共通に含まれる数を，小さい方から並べて得た数列を U とする。次の問いに答えよ。

(1)　U の初項と公差を求めよ。

(2)　U の和を求めよ。

(1)　初項 17，公差 15　　(2)　27570

解き方　(1)　S の第 n 項は $3n+2$，T の第 m 項は $5m-3$ より共通項は $3n+2=5m-3$ とおいて $3n=5(m-1)$ から，$n=5k$（k は整数）とおける。

$n=5k$ を $3n+2$ に代入して，共通項は $15k+2$　　これより，共通項からなる数列は初項 17，公差 15

(2)　U の第 n 項は $17+(n-1)\cdot 15$ より，

$17+(n-1)\cdot 15 \leqq 902$ から $n \leqq 60$

これより，求める和は，$\sum_{k=1}^{60}(15k+2)=27570$

②C-8-12

等比数列 $\{a_n\}$ において，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10}=3$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{10}}=2$ のとき，積 $a_1a_2\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ。

$\dfrac{243}{32}$

解き方　$a_n=ar^{n-1}$ とすると条件式より，

$a\neq 0$，$r\neq 0$ で，

$a(1+r+r^2+\cdots+r^9)=3\cdots①$

$\dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r^2}+\cdots+\dfrac{1}{r^9}\right)=2\cdots②$

②より，$\dfrac{1}{ar^9}(r^9+r^8+\cdots+r+1)=2\cdots③$

①，③より，$2a^2r^9=3\cdots④$

$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}=a^{10}r^{1+2+\cdots+9}=a^{10}r^{45}=(a^2r^9)^5$

ここに④を代入して，

$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}$

②C-8-13

2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べてできる数列を a_1，a_2，$a_3\cdots\cdots$，a_n，……とする。

(1)　1003 は数列 $\{a_n\}$ の第何項か。

(2)　a_{2000} の値を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2m$ 項までの和を求めよ。

(1)　第 335 項　　(2)　5999　　(3)　$6m^2$

(2)　②より $a_{2000}=a_{2\times1000}=6\times1000-1=5999$

(3)　$\sum_{n=1}^{2m}a_n$

$=(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2m-1})+(a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{2m})$

$=\sum_{n=1}^{m}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{m}a_{2n}=\sum_{n=1}^{m}(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{n=1}^{m}(12n-6)=12\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-6m$

$=6m^2$

②C-8-14

(1)　数列 $\{a_n\}$ において，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)$ が成り立つとき，一般項 a_n を求めよ。

$a_n=3n+3$

解き方　(1)　$n\geqq2$ のとき，与式と与式の n を $n-1$ とおきかえた式を辺々引くことにより，

$na_n=3n(n+1)$

これより，$a_n=3(n+1)$…①

$n=1$ のとき，$a_1=1\times2\times3=6$

よって，①は $n=1$ のときも成り立つ。

②C-8-15

(1)　数列 1，2，3，……，n において，隣接する 2 数の積の総和を求めよ。

(2)　数列 1，2，3，……，n において，互いに相異なり，かつ隣接しない 2 数の積の総和を求めよ。

解答　(1)　$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$　　(2)　$\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

(1)　求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

(2)　求める和を T とすると

$$(1+2+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+2(S+T)$$

すなわち　$\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2(S+T)$

したがって，(1) より

$$T=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

第９章　漸化式・数学的帰納法の基礎

《学習項目》

・階差数列
・２項間漸化式
・３項間漸化式
・２項間帰納法
・３項間帰納法

A 問題

②A-9-1

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=10,\ a_{n+1}=a_n+4$　　(2)　$a_1=4,\ a_{n+1}=-3a_n$

解答　(1)　$a_n=4n+6$　　(2)　$a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$

②A-9-2

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=-1,\ a_{n+1}=3a_n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　$a_n=-\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1}-\dfrac{1}{2}$

②A-9-3

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n-6n^2$

(2)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+7^n$

解答　(1)　$a_n=-2n^3+3n^2-n+1$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{6}(7^n+11)$

②A-9-4

$a_1=-1,\ a_{n+1}={a_n}^2+2na_n-2$ で定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法で証明せよ。

解答　(1)　$a_2=-3,\ a_3=-5,\ a_4=-7$　　(2)　略

B 問題

②B-9-1

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$5a_n=3S_n+3n+2$，ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ とする。

$$\boldsymbol{a_n=\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1}$$

解き方　(1)　$n=1$ を代入して，

$5a_1=3S_1+3\times1+2$

ここで，$S_1=a_1$ より，$a_1=\frac{5}{2}$

$5a_{n+1}=3S_{n+1}+3(n+1)+2\cdots\cdots①$

$5a_n=3S_n+3n+2\cdots\cdots②$

①−②より，$5(a_{n+1}-a_n)=3(S_{n+1}-S_n)+3$

ここで，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ より，

$a_{n+1}=\frac{5}{2}a_n+\frac{3}{2}$ から，$a_{n+1}+1=\frac{5}{2}(a_n+1)$

これより，$a_n=\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}-1$

②B-9-2

次の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}}$$

解き方　(1)　$a_n\neq0$ から逆数をとると，

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+3}{a_n}=3\left(\dfrac{1}{a_n}\right)+2$

ここで，$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと，$b_n=3b_n+2$

$b_1=1$ より，$b_n=2\cdot3^{n-1}-1$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

②B-9-3

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=4a_n+3^n$

$$\boldsymbol{a_n=4^n-3^n}$$

解き方　(1)　全体を 3^{n+1} で割ると，

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

ここで，$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ とすると，

$b_{n+1}=\frac{4}{3}b_n+\frac{1}{3}$　　また，$b_1=\frac{a_1}{3}=\frac{1}{3}$

$b_{n+1}-\alpha=\frac{4}{3}(b_n-\alpha)$ とおくと，$\alpha=-1$ から，

$b_{n+1}+1=\frac{4}{3}(b_n+1)$

よって，$b_n+1=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}(b_1+1)$ から，

$b_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n-1$

これより，$a_n=3^nb_n=4^n-3^n$

($n=1$ のときも成立)

②B-9-4

次の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求めよ。

(2)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n$

$a_n=3\cdot2^{n-1}-n-1$

(2)　$a_{n+2}=2a_{n+1}+n+1$

$-)$　$a_{n+1}=2a_n+n$

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n+1$

$a_2=3$ より，$b_1=a_2-a_1=2$ から，

$b_n=3\cdot2^{n-1}-1$

すなわち，$a_{n+1}-a_n=3\cdot2^{n-1}-1$

ここに，$a_{n+1}=2a_n+n$ を代入して，

$2a_n+n-a_n=3\cdot2^{n-1}-1$

よって，$a_n=3\cdot2^{n-1}-n-1$

②B-9-5

次の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求めよ。

(3)　$a_1=5$，$a_{n+1}=8a_n{}^2$

$\frac{1}{8}\cdot40^{2^{n-1}}$

(3)　両辺の対数(底 2)をとると

$\log_2a_{n+1}=3+2\log_2a_n$

$b_n=\log_2a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n+3$

$b_1=\log_25$ より，$b_n=(\log_240)\cdot2^{n-1}-3$

$=2^{n-1}\log_240-3=\log_240^{2^{n-1}}+\log_2\frac{1}{8}$

$=\log_2\frac{1}{8}\cdot40^{2^{n-1}}$ より，$a_n=\frac{1}{8}\cdot40^{2^{n-1}}$

②B-9-6

次の漸化式で与えられる数列の一般項 a_n を求め，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ を計算せよ。

$a_1=1$，$(2n+2)a_n-na_{n+1}=0$

$a_n=n\cdot2^{n-1}$，　$S_n=(n-1)\cdot2^n+1$

解き方　$na_{n+1}=2(n+1)a_n$ より，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=2\frac{a_n}{n}$

したがって，$b_n=\frac{a_n}{n}$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n$

$b_1=\frac{a_1}{1}=1$ から，$b_n=2^{n-1}$ より，$\frac{a_n}{n}=2^{n-1}$

よって，$a_n=n\cdot 2^{n-1}$

$S_n-2S_n=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n$

$-S_n=2^n-1-n\cdot 2^n$

$S_n=(n-1)2^n+1$

②B-9-7

次の漸化式で与えられた数列の一般項を求めよ。

$x_1=1,\ y_1=5,\ x_{n+1}=2x_n+y_n,\ y_{n+1}=x_n+2y_n$

$x_n=3^n-2,\ y_n=3^n+2$

(2)　2 式の和をとり，$x_{n+1}+y_{n+1}=3(x_n+y_n)$ から，$x_n+y_n=3^{n-1}(x_1+y_1)=2\times 3^n\cdots\cdots①$

2 式の差をとり，$x_{n+1}-y_{n+1}=x_n-y_n$ から，$x_n-y_n=x_1-y_1=-4\cdots\cdots②$

①，②を連立して，$x_n=3^n-2,\ y_n=3^n+2$

②B-9-8

$a_1=1,\ b_1=3,\ a_{n+1}=3a_n+b_n,\ b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定められている数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

(1)　$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ を満たす α，β の組を 2 組求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　**$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 5),\ \left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$**

(2)　**$a_n=\frac{4}{3}\cdot 5^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$**

$b_n=\frac{8}{3}\cdot 5^{n-1}+\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$

解き方　(1)　$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ の左辺に，$a_{n+1}=3a_n+b_n$，$b_{n+1}=2a_n+4b_n$ を代入して，

$(3+2\alpha)a_n+(1+4\alpha)b_n=\beta a_n+\alpha\beta b_n$

ゆえに，$3+2\alpha=\beta$，$1+4\alpha=\alpha\beta$

これを解いて，

$\alpha=1,\ \beta=5$ または $\alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=2$

(2)　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$，$a_1+b_1=4$ より，

$a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1}\cdots\cdots①$

$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)$，

$a_1-\frac{1}{2}b_1=-\frac{1}{2}$ より

$a_n-\frac{1}{2}b_n=-\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\cdots\cdots②$

①，②を連立して，$a_n=\frac{4}{3}\cdot 5^{n-1}-\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$

$b_n=\frac{8}{3}\cdot 5^{n-1}+\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}$

②B-9-9

次の漸化式で与えられた数列の一般項を求めよ。

$a_1=1,\ a_2=4,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

(3)　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ とおくと，$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ から，

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=6$ を解いて，$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(i)　$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 3)$ のとき，$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ から，$a_{n+1}-2a_n=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n$ より，$b_n=3^{n-1}b_1=2\times3^{n-1}$ より，$a_{n+1}-2a_n=2\times3^{n-1}$……③

(ii)　$(\alpha,\ \beta)=(3,\ 2)$ のとき，同様に $a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}$……④

③−④より，$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}-2^{n-1}}$

②B-9-10

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

$\boldsymbol{a_n=(5-2n)\cdot3^{n-2}}$

(2)　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ とおくと，

$\alpha=\beta=3$ となり，

$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$ から，

$a_{n+2}-3a_{n+1}=3^n(a_2-3a_1)=-2\cdot3^n$

よって，$a_{n+1}=3a_n-2\cdot3^{n-1}$

全体を 3^{n+1} で割って，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}-\dfrac{2}{9}$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とすると，$b_1=\dfrac{1}{3}$，

$b_{n+1}=b_n-\dfrac{2}{9}$ より，$\{b_n\}$ は等差数列。

$b_n=\dfrac{1}{3}+(n-1)\times\left(-\dfrac{2}{9}\right),\ b_n=\dfrac{5}{9}-\dfrac{2}{9}n$ から，

$a_n=\left(\dfrac{5}{9}-\dfrac{2}{9}n\right)\cdot3^n=(5-2n)\cdot3^{n-2}$

②B-9-11

(1)　$x=t+\dfrac{1}{t}$ とし，$P_n=t^n+\dfrac{1}{t^n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　とおく。このとき，P_n は x の n 次の整式で表されることを，数学的帰納法で示せ。

(1)　[I]　$P_1=t+\dfrac{1}{t}$ より，$P_1=x$ から，$n=1$ のとき，成り立つ。

$P_2=t^2+\dfrac{1}{t^2}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-2=x^2-2$

より，$n=2$ のときも成り立つ。

[II]　$n=k-1,\ k$ のとき成り立つと仮定すると，

$P_{k+1}=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\left(t^k+\dfrac{1}{t^k}\right)-\left(t^{k-1}+\dfrac{1}{t^{k-1}}\right)$

であり，$t+\dfrac{1}{t}=x$，$t^k+\dfrac{1}{t^k}$ は x の k 次式，$t^{k-1}+\dfrac{1}{t^{k-1}}$ は x の $k-1$ 次式より，P_{k+1} は x の $k+1$ 次式である。これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，P_n は x の n 次式。

②B-9-12

n を 3 以上の自然数とするとき，不等式 $3^n > 8n$ ……(A) を証明せよ。

解答

[1]　$n=3$ のとき　　左辺 $=3^3=27$,　　右辺 $=8\cdot 3=24$

よって，$n=3$ のとき，(A) が成り立つ。

[2]　$k \geqq 3$ として，$n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち $3^k > 8k$ が成り立つと仮定する。$n=k+1$ のときの (A) の両辺の差を考えると

$$3^{k+1}-8(k+1)=3\cdot 3^k-(8k+8)>3\cdot 8k-(8k+8)$$
$$=8(2k-1)$$

$k \geqq 3$ のとき，$8(2k-1)>0$ であるから　　$3^{k+1}>8(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から，3 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ。

C 問題

②C-9-1

$a_1=1$，$a_{2k+1}=\frac{1}{3}a_{2k}$，$a_{2k}=\frac{1}{2}a_{2k-1}$　$(k=1,\ 2\cdots\cdots)$　のとき，一般項 a_n を求めよ。

n が奇数のとき $a_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}$，

n が偶数のとき $a_n=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}}$

解き方　$a_{2k+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a_{2k-1}=\frac{1}{6}a_{2k-1}$ から数列 $\{a_{2n-1}\}$ は初項 1，公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列より，$a_{2k-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$

ここで，$n=2k-1$ とすると，$k=\frac{n+1}{2}$ より，

$a_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

$a_{2k}=\frac{1}{2}a_{2k-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k}$

ここで，$n=2k$ とすると，$k=\frac{n}{2}$ より，

$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}}$

②C-9-2

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$a_1=2$，$a_2=6$，$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n-3$

$a_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{17}{2}n-5$

(2)　$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=-3$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とすると，

$b_{n+1}-b_n=-3$ から数列 $\{b_n\}$ は初項 $a_2-a_1=4$，公差 -3 の等差数列より，

$b_n=-3n+7$

$n\geqq 2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(-3k+7)$

$=-\frac{3}{2}n^2+\frac{17}{2}n-5$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

②C-9-3

$a_1=\frac{1}{2}$，$n\geqq 2$ のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ に対し $a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}$ を満たす。このとき，

(1)　$n\geqq 2$ に対して，S_n を S_{n-1} で表せ。　　(2)　a_n を求めよ。

(1)　$S_n=\dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$　　(2)　$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (n=1)\\ \dfrac{1}{2n(1-n)} & (n\geqq 2)\end{cases}$

②C-9-4

$a_1=5$，$a_{n+1}=n^2-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列を $\{a_n\}$ とするとき

(1)　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{20}$ を求めよ。

(2)　$a_{n+2}-a_n$ を n の式で表せ。

(3)　a_{2m}，a_{2m-1} を m の式で表せ。

(1)　**1330**　　(2)　$\boldsymbol{2n+1}$

(3)　$\boldsymbol{a_{2m}=2m^2-m-5}$，$\boldsymbol{a_{2m-1}=2m^2-3m+6}$

解き方　(1)　$a_n+a_{n+1}=n^2$……①より，

$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{20}$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots\cdots+(a_{19}+a_{20})$

$=1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+19^2$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+1)$

$=4\cdot\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21-4\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11+10=1330$

(2)　①から，$a_{n+1}+a_{n+2}=(n+1)^2$……②

②−①から，

$a_{n+2}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$……③

(3)　③から，$n=2m$ のとき，

$a_{2m+2}-a_{2m}=4m+1$

また，$a_2=1^2-a_1=-4$

よって，$m\geqq 2$ のとき，

$a_{2m}=-4+\sum_{k=1}^{m-1}(4k+1)=2m^2-m-5$……④

$m=1$ のとき，$a_2=-4$ となり適する。

①において，$n=2m-1$ とすると，

$a_{2m-1}+a_{2m}=(2m-1)^2$

ここに④を代入して，

$a_{2m-1}=(2m-1)^2-a_{2m}=2m^2-3m+6$

②C-9-5

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。すべての項 a_n が同符号であり，$S_n=2a_n{}^2+\frac{1}{2}a_n-\frac{3}{2}$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}}$

(2)　$S_{n+1}=2{a_{n+1}}^2+\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{3}{2}$

$S_n=2{a_n}^2+\frac{1}{2}a_n-\frac{3}{2}$

辺々を引くと，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ から，

$a_{n+1}=2({a_{n+1}}^2-{a_n}^2)+\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

${a_{n+1}}^2-{a_n}^2-\frac{1}{4}(a_{n+1}+a_n)=0$ より

$(a_{n+1}+a_n)\left(a_{n+1}-a_n-\frac{1}{4}\right)=0$

ここで，a_n はすべて同符号より，

$a_{n+1}+a_n\neq 0$

ゆえに，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{4}$ より $\{a_n\}$ は公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列……①

$a_1=S_1=2{a_1}^2+\frac{1}{2}a_1-\frac{3}{2}$ から

$4{a_1}^2-a_1-3=0$ より，$(4a_1+3)(a_1-1)=0$

(i)　$a_1=-\frac{3}{4}$ のとき，①から $a_n=\frac{1}{4}(n-4)$

これは $1\leqq n\leqq 3$ のとき負，$n\geqq 5$ のとき正となるためすべての項 a_n が同符号という条件に反する。

(ii)　$a_1=1$ のとき，$a_n=\frac{1}{4}(n+3)$

このとき，すべての項は正となり適する。

②C-9-6

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n^2+n$

$$a_n=n^2+n+2-2^{n-1}$$

(2)

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2}=2a_{n+1}-(n+1)^2+n+1 \\ -) & a_{n+1}=2a_n\ -n^2\ \ \ +n \\ \hline & a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-2n \end{array}$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=2b_n-2n$……①

$b_1=a_2-a_1=3$

同じように考えて，

$b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)-2$

$c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと，$c_{n+1}=2c_n-2$

$c_1=b_2-b_1=1$ から，$c_n=2-2^{n-1}$

すなわち，$b_{n+1}-b_n=2-2^{n-1}$

ここに①を代入して，

$(2b_n-2n)-b_n=2-2^{n-1}$ から，

$b_n=2n+2-2^{n-1}$

すなわち，$a_{n+1}-a_n=2n+2-2^{n-1}$

ここに a_{n+1} の漸化式を代入して，

$(2a_n-n^2+n)-a_n=2n+2-2^{n-1}$ から，

$a_n=n^2+n+2-2^{n-1}$

②C-9-7

数列 $\{x_n\}$ が $x_1=3$，$x_{n+1}=\dfrac{4x_n-2}{x_n+1}$ で定義されている。

(1)　$x=\dfrac{4x-2}{x+1}$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$y_n=\dfrac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$ で定義される数列 $\{y_n\}$ が満たす漸化式を導き，一般項 y_n を求めよ。

(2)　一般項 x_n を求めよ。

解答　(1)　$y_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　　(2)　$x_n=\dfrac{2^{n-2}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n-2}-3^{n-1}}$

(1)　$x=\dfrac{4x-2}{x+1}$ から　　$x(x+1)=4x-2$　　ただし $x+1\neq 0$

よって　　$x^2-3x+2=0$　　ゆえに　　$x=1,\ 2$

これは $x+1\neq 0$ を満たす。

したがって　　$\alpha=1,\ \beta=2$

よって，$y_n=\dfrac{x_n-2}{x_n-1}$ …… ①　であるから

$$y_{n+1}=\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}-1}=\frac{\dfrac{4x_n-2}{x_n+1}-2}{\dfrac{4x_n-2}{x_n+1}-1}=\frac{4x_n-2-2(x_n+1)}{4x_n-2-(x_n+1)}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x_n-2}{x_n-1}=\frac{2}{3}y_n$$

また　　$y_1=\dfrac{x_1-2}{x_1-1}=\dfrac{3-2}{3-1}=\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\{y_n\}$ が満たす漸化式は　　$y_{n+1}=\dfrac{2}{3}y_n,\ \ y_1=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$y_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

(2)　① から　　$(x_n-1)y_n=x_n-2$

よって　　$(y_n-1)x_n=y_n-2$

$y_n=1$ のとき ① を満たす x_n が存在しないから，すべての自然数 n に対して

$$y_n\neq 1$$

ゆえに，$x_n=\dfrac{y_n-2}{y_n-1}$ であるから

$$x_n=\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-2}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-1}=\frac{2^{n-2}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n-2}-3^{n-1}}$$

第 10 章　数列の応用

《学習項目》

・群数列
・数学的帰納法
・格子点
・確率漸化式など
・さまざまな漸化式の応用（作業の繰り返し）

A 問題

②A-10-1

(1)　数列 1，2，1，3，2，1，4，3，2，1，5，4，……の第 337 項を求めよ。　㊫秋田大㊫

(2)　次のように並べた数列を考える。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

(1)　$\frac{1}{20}$ は第何項か。　(2)　$\frac{2^n+1}{4^n}$ は第何項か。　㊫広島女学院大㊫

解答　(1)15　(2)の(1)第 191 項　(2)　**第$(2^{4n-1}+2^{3n}+2^{n-1}+1)$項**

1|2，1|3，2，1|4，3，2，1|5，4，…… のように群に分けると，
第 k 群の末項までの項数は，
$1+2+\cdots\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ より，第 337 項
a_{337} が第 k 群に属するとすると，
$\frac{k(k-1)}{2}<337\leqq\frac{k(k+1)}{2}$ より，$k=26$
第 1 群から第 25 群の末項までの項数は 325 項
よって，$337-325=12$ から，a_{337} は第 26 群の第 12 項で $a_{337}=26-12+1=15$

(1)　$\frac{1}{1}\,|\,\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\,|\,\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\,|\,\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\,|$，……のように群に分けると，
$\frac{1}{20}$ は，第 20 群の最初の項より
$1+2+\cdots\cdots+19+1=191$

(2)　$\frac{2^n+1}{4^n}$ は第 $\{(4^n+2^n+1)-1\}$ 群の 2^n+1 項目になるから
(第(4^n+2^n-1)群までの項数の和)$+(2^n+1)$
$=\frac{1}{2}(2^{2n}+2^n-1)(2^{2n}+2^n)+2^n+1$
$=2^{4n-1}+2^{3n}+2^{n-1}+1$

②A-10-2

次の等式・不等式が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)　$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

(2)　$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$　㊫山口大㊫

解答

(1) ［Ⅰ］$n=1$ のとき左辺$=\frac{1}{2}$，右辺$=\frac{1}{2}$ より，成り立つ。

［II］$n=k$ のとき等式が成り立つと仮定すると，

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$　この両辺に $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ を加えると，

左辺$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

右辺$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

［Ⅰ］，［II］から数学的帰納法により，等式は成り立つ。

(2) ［Ⅰ］$n=1$ のとき左辺$=1$，右辺$=2\sqrt{2}-2=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)<1$ より成り立つ。

［II］$n=k$ のとき不等式が成り立つと仮定すると，

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>2\sqrt{k+1}-2$　両辺に $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ を加えて，

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-2$

$\left(2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2-(2\sqrt{k+2})^2=\frac{1}{k+1}>0$ より，

$2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-2>2\sqrt{k+2}-2$ から，$n=k+1$ のときも成り立つ。

［Ⅰ］，［II］から，数学的帰納法により，不等式は成り立つ。

②A-10-3

座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という。

(1)　$x\geqq0$，$y\geqq0$，$x+y\leqq20$ を同時に満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

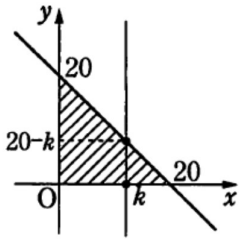
(2)* $y\geqq0$，$y\leqq2x$，$x+2y\leqq20$ を同時に満たす格子点 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

滋賀大

解答　(1)　**231 個**　　(2)　**97 個**

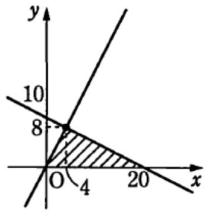
(1)　条件式を表す領域は，右図の斜線部分である。

$x=k$ 上の格子点の個数は $(20-k)+1=21-k$ より，求める格子点の個数は



$\sum_{k=0}^{20}(21-k)=\sum_{i=1}^{21}i=\frac{21\times22}{2}=231$ (個)

(2)　条件式を表す領域は，右図の斜線部分である。$0\leqq x\leqq4$ においては，$x=m$ $(0\leqq m\leqq4)$ 上の格子点の個数は $2m+1$



$5\leqq x\leqq20$ においては，$x+2y=20$ より，$x=20-2y$ と考えて，$y=k$ $(0\leqq k\leqq7)$ 上の格子点の個数は $(20-2k)-4=16-2k$

したがって，求める格子点の個数は

$\sum_{m=0}^{4}(2m+1)+\sum_{k=0}^{7}(16-2k)=97$ (個)

②A-10-4

直線上に異なる2点A，Bがあって，PはAとBの2点を行ったり来たりする点である。さいころを投げて1の目が出たとき，Pは他の点に移動し，1以外の目が出たときはその場所にとどまるとする。初めにPはAにいるとして，さいころを n 回 $(n \geqq 1)$ 投げたときPがAにいる確率を p_n で表す。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。　　(2)　p_n を求めよ。　　◎中央大◎

解答　(1)　$\boldsymbol{p_1=\frac{5}{6},\ p_2=\frac{13}{18}}$　　(2)　$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}}$

(1)　p_1 はAにとどまる確率だから，

$p_1=\frac{5}{6}$

2回投げてAにいるのは

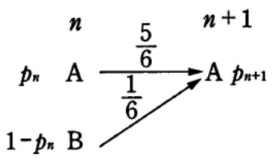
(i)　2回続けてとどまる

(ii)　2回とも移動する

の場合である。よって，

$p_2=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{13}{18}$

(2)



上の図より，

$p_{n+1}=\frac{5}{6}p_n+\frac{1}{6}(1-p_n)=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}$

ここで，$p_1=\frac{5}{6}$ より，$p_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}$

B 問題

②B-10-1

分母が 2 の累乗である 1 より小さい既約分数を次のように並べる。

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16},\ \cdots\cdots$$

(1)　第 100 項の分数を求めよ。

(2)　初項から第 100 項までの和を求めよ。

(3)　初項から第 n 項までの和を S_n とする。このとき $S_n>20$ となる n の最小値を求めよ。

解答　(1) $\dfrac{73}{128}$　(2) $\dfrac{5401}{128}$　(3) 48

(1)　分母の等しい項を 1 つの群にして分けると，第 k 群の項数は 2^{k-1} より，第 k 群までの項数は

$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$ より，第 100 項が第 n 群に属するとすると，

$2^{n-1}-1<100\leqq 2^n-1$

これより，$n=7$ だから，第 7 群。第 6 群までの項数は

$2^6-1=63$

これより，第100 項は，第 7 群の 37 項目だから，$\dfrac{2\times 37-1}{2^7}=\dfrac{73}{128}$

(2)　第 k 群の和は

$\dfrac{1}{2^k}(1+3+5+7+\cdots\cdots+(2^k-1))=2^{k-2}$

求める和は，

$\dfrac{1}{2}+1+2+2^2+2^3+2^4$

$\quad+\dfrac{1}{128}(1+3+5+\cdots\cdots+73)=\dfrac{5401}{128}$

(3)　第 5 群までの和は $\dfrac{1}{2}+1+2+4+8=\dfrac{31}{2}$

$20-\dfrac{31}{2}=\dfrac{9}{2}$ より，第 6 群の初項より第 k 項までの和が $\dfrac{9}{2}$ より大きくなればよい。

$\dfrac{1}{64}(1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1))>\dfrac{9}{2}$ より，

$k\geqq 12\sqrt{2}\fallingdotseq 16.97$

k は整数だから，k の最小値は 17

第 6 群の第 17 項は最初から数えて，

$1+2+4+8+16+17=48$　(項目)

②B-10-2

奇数からなる数列を，右図のように正方形状に並べていったとき，対角線上に並んだ数列

1，5，13，25，……

の第 n 項を a_n とするとき，次の問いに答えよ。

1	3	9	19
7	5	11	21
17	15	13	23
31	29	27	25

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

◉図書館情報大◉

解答　(1) $a_n=2n^2-2n+1$　(2) $\dfrac{n(2n^2+1)}{3}$

(1) 奇数列を 1|3, 5, 7|9, 11, 13, 15, 17|19, ……のように群に分けると，a_n は第 n 群の n 番目の項であるから，初めの数列の

$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-3)+n=n^2-n+1$

(項目) である。よって，$a_n=2(n^2-n+1)-1=2n^2-2n+1$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)=\frac{n(2n^2+1)}{3}$

②B-10-3

自然数を右の図のように並べる。

1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

(1) n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(2) n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(3) 1000 は左から何番目，上から何段目にあるか。

●岩手大

解答 (1) $\dfrac{1}{2}n(n+1)$　(2) $\dfrac{1}{2}(n-1)n+1$　(3) 左から 36 番目，上から 10 番目

1|2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9, 10|11, ……を考える。また，1 番上の段の左から n 番目の数を a_n とする。

(1) n が偶数のとき，a_n は第 n 群の末項だから，$a_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

(2) n が奇数のとき，a_n は第 n 群の初項だから

$a_n=1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+1$

$=\dfrac{1}{2}(n-1)n+1$

(3) 1000 が第 n 群にあるとき，

$\dfrac{1}{2}n(n-1)<1000\leqq\dfrac{1}{2}n(n+1)$

より，$n=45$　ここで，第 44 群までの項数は 990 項だから，第 45 群の 10 項目。いま，45 は奇数だから右上から左下へ 45 項が並び，1000 は上から 10 段目にある。よって，左から 36 番目になる。

②B-10-4

3 の累乗を分母とする 1 より小さい正の既約分数を次のように並べる。

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{2}{27},\ \cdots\cdots$$

(1) 第 20 項を求めよ。　(2) 分母が 3^n のものは何個あるか。

(3) $\dfrac{1}{3^{n+1}}$ は第何項か。　(4) 第 90 項を求めよ。　●関西大●

解答 (1) $\dfrac{17}{27}$　(2) $2\cdot3^{n-1}$ (個)　(3) 第 3^n 項　(4) $\dfrac{14}{243}$

(1) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \mid \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \mid \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \cdots\cdots$

第 1 群は 2 項，第 2 群は 6 項，第 3 群は 18 項あり，$20=(2+6)+12$ より，第 20 項は，第 3 群の 12 項目　　よって，$\frac{17}{27}$

(2) 第 n 項の分母は 3^n であり，分子は 1 から 3^n のうち 3 の倍数は 3^{n-1} 個あるから，$3^n-3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$（個）が既約分数である。

(3) $\frac{1}{3^{n+1}}$ は，第 $n+1$ 群の初項だから，

$2+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{n-1}+1$

$=\frac{2(3^n-1)}{3-1}+1=3^n$ より，3^n 項目

(4) 第 90 項が第 n 群にあるとすると，(3)より，$3^{n-1}\leqq90<3^n$

これを満たす n の値は，$n=5$

ここで，第 4 群までの項数は $3^4-1=80$ より，第 90 項は第 5 群の 10 項目，分子だけをみると 10 項目は 1，2，4，5，7，8，10，11，13，14 より，10 項目は 14

よって，求める数は $\frac{14}{3^5}=\frac{14}{243}$

②B-10-5

数列 a_1，a_2，a_3，……を次のように定める。

$a_1=1$，$a_2=a_3=2$，$a_4=a_5=a_6=3$，……

(1) 自然数 n に対して，$a_i=n$ となるような i の範囲を求めよ。

(2) m を自然数とするとき，初項から第 $2m^2$ 項までの総和を求めよ。

●一橋大

解答　(1) $\frac{1}{2}n(n-1)+1\leqq i\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$　(2) $\frac{1}{3}m(8m^2+1)$

1 | 2，2 | 3，3，3 | …… | n，n，…n | ……

1 群 2 群　3 群　　n 群

のように群に分ける。

(1) $(n-1)$ 群までの個数は

$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

よって，$a_i=n$ となるのは

$\frac{n^2-n}{2}+1\leqq i\leqq\frac{n(n+1)}{2}$

(2) a_{2m^2} が第 k 群に属するとすると，(1)より，

$\frac{k^2-k}{2}+1\leqq2m^2\leqq\frac{k^2+k}{2}$

$\begin{cases}k^2-k+2\leqq4m^2\cdots\cdots①\\k^2+k\geqq4m^2\cdots\cdots②\end{cases}$

①，② より，

$\frac{-1+\sqrt{16m^2+1}}{2}\leqq k\leqq\frac{1+\sqrt{16m^2-7}}{2}$

$\frac{-1+4m}{2}<\frac{-1+\sqrt{16m^2+1}}{2}$，

$\frac{1+\sqrt{16m^2-7}}{2}<\frac{1+4m}{2}$ だから，

$\frac{-1+4m}{2}<k<\frac{1+4m}{2}$

$2m-\frac{1}{2}<k<2m+\frac{1}{2}$

k は整数なので，$k=2m$

$2m-1$ 群までの項数は，

$1+2+3+\cdots\cdots+2m-1=m(2m-1)$

これより，第 $2m^2$ 項は第 $2m$ 群の

$2m^2-m(2m-1)=m$（項目）

第 k 群の和は k^2 より，第$(2m-1)$群までの総和は，$\sum_{k=1}^{2m-1}k^2=\frac{1}{3}(2m-1)m(4m-1)\cdots\cdots③$

第 $2m$ 群の m 項目までには $2m$ が m 個あるから，和は $2m^2$

したがって，③に $2m^2$ を加えて，

$\frac{1}{3}m(8m^2+1)$

②B-10-6

(1)　n を自然数とする。$|x|+|y|\leqq n$ となる 2 つの整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　n を自然数とするとき，$|x|+|y|+|z|\leqq n$ となる 3 つの整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。　　◉熊本大◉

解答　(1) $2n^2+2n+1$ **(個)**　　(2) $\frac{1}{3}(2n+1)(2n^2+2n+3)$

(1)　$|x|=k$ $(0\leqq k\leqq n)$ のとき，$|y|\leqq n-k$ より，$-n+k\leqq y\leqq n-k$

これを満たす整数 y の個数は $(n-k)-(-n+k)+1=2n-2k+1$ (個)

格子点は y 軸上に $2n+1$ 個あり，その両側は $|x|+|y|=n$ のグラフの対称性から，

それぞれ等しいので，求める個数は，

$$2n+1+2\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)=2n+1+2\{(2n+1)n-2\sum_{k=1}^{n}k\}$$

$$=2n^2+2n+1 \text{ (個)}$$

(2)
$$2n^2+2n+1+2\sum_{k=1}^{n}\{2(n-k)^2+2(n-k)+1\}$$
$$=2n^2+2n+1$$
$$+2\sum_{k=1}^{n}\{2n^2+2n+1+2k^2-(4n+2)k\}$$
$$=2n^2+2n+1+2\{n(2n^2+2n+1)$$
$$+2\sum_{k=1}^{n}k^2-(4n+2)\sum_{k=1}^{n}k\}$$

$$=4n^3+6n^2+4n+1-\frac{4}{3}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{3}(2n+1)(2n^2+2n+3)$$

②B-10-7

数字 1，2，3 を n 個並べてできる n 桁の数全体を考える。そのうち 1 が奇数回現れるものの個数を a_n，1 が偶数回現れるかまったく現れないものの個数を b_n とする。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2)　a_n，b_n を求めよ。　　◉早稲田大◉

解答　(1)　$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$　　(2)　$a_n=\frac{3^n-1}{2}$，$b_n=\frac{3^n+1}{2}$

(1) (i)　$n+1$ 個の中に 1 が奇数回現れるのは，

・最初の n 個の中に奇数個，最後の $n+1$ 個目に 2 または 3 が出る。このとき $2a_n$ 通り。

・最初の n 個に 1 が偶数回，最後の $n+1$ 回目に 1 が出る。このとき b_n 通り。

よって，$a_{n+1}=2a_n+b_n$……①

(ii)　$n+1$ 個の中に 1 が偶数回現れるのは

・最初の n 個に 1 が奇数回，最後の $n+1$ 個目に 1 が出る。このとき，a_n 通り。

・最初の n 個に 1 が偶数回，最後の $n+1$ 個目に 2 または 3 が出る。このとき，$2b_n$ 通り。

よって，$b_{n+1}=a_n+2b_n$……②

(2)　$a_1=1$，$b_1=2$，また，①+②から，

$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$ より，

$a_n+b_n=3^n$……③

①−②から，$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$ より，

$a_n-b_n=-1$……④

③，④から，$a_n=\frac{3^n-1}{2}$，$b_n=\frac{3^n+1}{2}$

C 問題

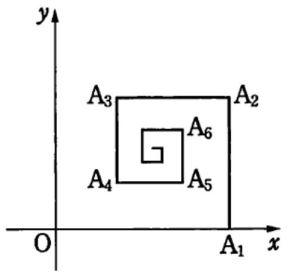
②C-10-1

動点 P が座標平面上を，原点 O から x 軸に沿って A_1 まで進み，次に左に直角に曲って A_2 まで進み，さらに左に直角に曲って A_3 まで進み，……と動いていく。ただし，

$OA_1=1$,

$A_{n-1}A_n=r^{n-1}$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

とする。ここで，r は $0<r<1$ の定数である。



A_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とおくとき，

(1)　x_{2k-1} を求めよ。　　(2)　x_n を求めよ。

解答　(1)　$x_{2k-1}=\dfrac{1-(-r^2)^k}{1+r^2}$　　(2)　$x_n=\begin{cases} \dfrac{1-(-r^2)^{\frac{n+1}{2}}}{1+r^2} & (n\text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{1-(-r^2)^{\frac{n}{2}}}{1+r^2} & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$

(1)　$x_{2k-1}=1-r^2+r^4-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}r^{2k-2}$

$=1-r^2+r^4-\cdots\cdots+(-r^2)^{k-1}$

$=\dfrac{1-(-r^2)^k}{1+r^2}$

(2)　n が奇数のとき，$n=2k-1$ とおくと，

$x_n=x_{2k-1}=\dfrac{1-(-r^2)^k}{1+r^2}=\dfrac{1-(-r^2)^{\frac{n+1}{2}}}{1+r^2}$

n が偶数のとき，$n=2k$ とおくと，

$x_n=x_{2k}=x_{2k-1}=\dfrac{1-(-r^2)^k}{1+r^2}=\dfrac{1-(-r^2)^{\frac{n}{2}}}{1+r^2}$

②C-10-2

次の数列の第 n 項を a_n とする。

$\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{3}{9},\ \dfrac{4}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \dfrac{6}{9},\ \dfrac{7}{9},\ \dfrac{8}{9},\ \cdots,\ \dfrac{1}{m^2},\ \dfrac{2}{m^2},\ \cdots,$

$\dfrac{m^2-1}{m^2},\ \cdots\cdots$

(1)　第 100 項を求めよ。

(2)　数列の各項を約分したとき，最初に $a_n=\dfrac{5}{12}$ となるのは第何項か。

(3)　数列の各項を約分したとき，2 度目に $a_n=\dfrac{5}{12}$ となるのは第何項か。

●奈良女子大

解答　(1)　$\frac{15}{49}$　(2)　第 65 項　(3)　第555 項

$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \mid \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \cdots, \frac{8}{9} \mid, \cdots, \mid \frac{1}{m^2}, \frac{2}{m^2}, \cdots$

分母が同じものを 1 つの群と見ると，第 m 群には $(m+1)^2-1=m^2+2m$ (個) の項がある。

(1)　第 100 項が第 m 群に含まれるとすると，

$\sum_{k=1}^{m-1}(k^2+2k)<100\leqq\sum_{k=1}^{m}(k^2+2k)$ より，

$\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+(m-1)m<100$

$\leqq\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+m(m+1)$

から，$m=6$

第 5 群までの項数は $\sum_{k=1}^{5}(k^2+2k)=85$ より

100 項目は第 6 群の 15 項，

すなわち，$\frac{15}{(6+1)^2}=\frac{15}{49}$

(2)　$\frac{5}{12}=\frac{15}{36}=\frac{15}{(5+1)^2}$ より，

第 5 群の 15 項目

よって，$\sum_{k=1}^{4}(k^2+2k)+15=65$

(3)　$\frac{5}{12}=\frac{15}{6^2}=\frac{60}{12^2}=\frac{60}{(11+1)^2}$

より，第 11 群の 60 項目である。

よって，$\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k)+60=495+60=555$

②C-10-3

A，B，Cの 3 人がそれぞれ 1 枚ずつ札を持っている。最初，Bが赤札，他の 2 人は白札を持っている。赤札を持っている人がコインを投げて，表が出ればAとBの持っている札を交換する。裏が出ればBとCが持っている札を交換する。これを n 回繰り返したとき，最後に A，B，C が赤札を持っている確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とする。

(1)　$n=1$，2 のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(2)　p_n，q_n，r_nを求めよ。

●お茶の水女子大●

解答　(1)　$p_1=\frac{1}{2}$，$q_1=0$，$r_1=\frac{1}{2}$，$p_2=\frac{1}{4}$，$q_2=\frac{1}{2}$，$r_2=\frac{1}{4}$

(2)　$p_n=r_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$，$q_n=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right.$

②C-10-4

正の整数 n に対して，正の整数 a_n，b_n を次の式で定める。

$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$　　このとき，

(1)　$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ であることを示せ。

(2)　$(2+\sqrt{3})^n$ の小数展開の整数部分が奇数であることを示せ。

●京都府立医科大

解答

(1) $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ （n は正の整数） だから，

$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{n+1}$

$=(2+\sqrt{3})^n(2+\sqrt{3})=(a_n+b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

$=(2a_n+3b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{3}$

これより，

$a_{n+1}=2a_n+3b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$……①

また $a_1=2$，$b_1=1$……②

このとき，$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ が成り立つことを数学的帰納法により証明する。

［I］ $n=1$ のとき，②より，成り立つ。

［II］ $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$(2-\sqrt{3})^k=a_k-b_k\sqrt{3}$

両辺に $(2-\sqrt{3})$ を掛けて，

$(2-\sqrt{3})^{k+1}=(a_k-b_k\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$=(2a_k+3b_k)-(a_k+2b_k)\sqrt{3}$

$=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{3}$ （①より）

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，

$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ は成り立つ。

(2) $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n=2a_n$

$2a_n$ は偶数で $0<(2-\sqrt{3})^n<1$ より

$(2+\sqrt{3})^n$ の整数部分は $2a_n-1$ となり，

a_n は正の整数だから，これは奇数である。

確率漸化式の練習

②C-10-5

2つの箱A，Bのそれぞれに赤玉が1個，白玉が3個，合計4個ずつ入っている。1回の試行で箱 Aの玉1個と箱Bの玉1個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後，箱 **A** に赤玉が1個，白玉が3個入っている確率 p_n を求めよ。　◎一橋大◎

解答　$\boldsymbol{p_n=\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n+\frac{4}{7}}$

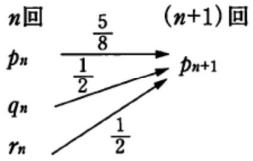
n 回試行を繰り返したとき，

(i) 箱Aに赤玉1個，白玉3個が入っている確率を p_n

(ii) 箱Aに赤玉0個，白玉4個が入っている確率を q_n

(iii) 箱Aに赤玉2個，白玉2個が入っている確率を r_n

とする。



n 回目に (ii) の状態から $(n+1)$ 回目に(i)になる確率は $\frac{1}{2}$，また n 回目に (iii) の状態から $(n+1)$ 回目に(i)になる確率も $\frac{1}{2}$ であり，n 回目に (i) の状態であり，$(n+1)$ 回目も (i) である確率 はA，Bの箱から同じ色の玉を選び出す場合より，$\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{8}$

これより，$p_{n+1}=\frac{5}{8}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n$……①

ここで，$p_n+q_n+r_n=1$ より，$q_n+r_n=1-p_n$ から，①は

$$p_{n+1}=\frac{5}{8}p_n+\frac{1}{2}(q_n+r_n)=\frac{5}{8}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n)$$
$$=\frac{1}{8}p_n+\frac{1}{2}$$

ここで，$p_0=1$ から，$p_n=\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n+\frac{4}{7}$

②C-10-6

1回の試行で事象 A が起こる確率が p $(0<p<1)$ であるとする。この試行を n 回行うときに奇数回 A が起こる確率を a_n とする。

(1)　a_1，a_2，a_3 を p で表せ。　(2)　a_n を n と p で表せ。　◎佐賀大◎

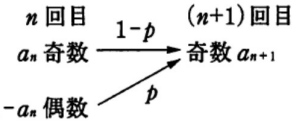
解答　**(1)　$\boldsymbol{a_1=p,\ a_2=2p(1-p),\ a_3=p(4p^2-6p+3)}$**

(2)　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}\{1-(1-2p)^n\}}$

(1)　$a_1=p$，$a_2={}_2C_1p(1-p)$

$a_3={}_3C_1p(1-p)^2+{}_3C_3p^3=p(4p^2-6p+3)$

(2)



上の図より

$a_{n+1}=(1-p)a_n+p(1-a_n)=(1-2p)a_n+p$

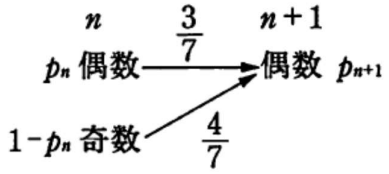
これより，$a_{n+1}-\frac{1}{2}=(1-2p)\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$

また，$a_1=p$ より，$a_n=\frac{1}{2}\{1-(1-2p)^n\}$

②C-10-7

・・・　袋の中に 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書いてある 7 個の球がある。この袋から 1 個の球を無作為に取り出し，その数を記録してもとの袋に戻す。これを n 回繰り返したとき，記録した n 個の数の和が偶数である確率 p_n を求めよ。　◉岡山県立大◉

解答　$p_n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\dfrac{1}{2}$



$p_{n+1}=\dfrac{3}{7}p_n+\dfrac{4}{7}(1-p_n)=-\dfrac{1}{7}p_n+\dfrac{4}{7}$

ここで，$p_1=\dfrac{3}{7}$ より，$p_n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\dfrac{1}{2}$

②C-10-8

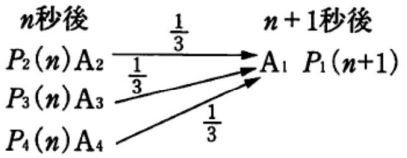
・・・　正四面体の各頂点を A_1，A_2，A_3，A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$（$n=0$，1，2，……）で表す。

$P_1(0)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(0)=\dfrac{1}{2}$，$P_3(0)=\dfrac{1}{8}$，$P_4(0)=\dfrac{1}{8}$ とするとき，

$P_1(n)$ と $P_2(n)$（$n=0$，1，2，……）を求めよ。　◉東京大◉

解答　$P_1(n)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(n)=\dfrac{1}{4}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

動点 X が（$n+1$）秒後に A_1 にいるのは，n 秒後に A_2，A_3，A_4 のいずれかにいて，その 1 秒後に A_1 に移るときである。



$P_1(n+1)=\dfrac{1}{3}P_2(n)+\dfrac{1}{3}P_3(n)+\dfrac{1}{3}P_4(n)$

$=\dfrac{1}{3}(P_2(n)+P_3(n)+P_4(n))$

$=\dfrac{1}{3}(1-P_1(n))$

（$P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)=1$ から）

これから，$P_1(n)-\dfrac{1}{4}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\left(P_1(0)-\dfrac{1}{4}\right)$

$P_1(0)=\dfrac{1}{4}$ より，$P_1(n)=\dfrac{1}{4}$

同様にして，$P_2(n)=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\left\{P_2(0)-\dfrac{1}{4}\right\}+\dfrac{1}{4}$

$P_2(0)=\dfrac{1}{2}$ より，$P_2(n)=\dfrac{1}{4}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

漸化式の練習

②C-10-9

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{2}{n+1}=1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ。　◎東京学芸大◎

解答　$\boldsymbol{S_n=\frac{n}{n+1}}$

(1) $\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{2}{n+1}=1$ から，

$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$

両辺に n を掛けて，$(n+1)na_n=n(n-1)a_{n-1}$

したがって，$(n+1)na_n=2\cdot1\cdot a_1=1$ から，

$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

よって，

$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

②C-10-10

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{2n}=2a_{2n-1}$，$a_{2n+1}=a_{2n}+2^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，a_{2n} と a_{2n+1} を求めよ。また，$\sum_{k=1}^{2n}a_k$ を求めよ。

●山口大

解答　$\boldsymbol{a_{2n}=(n+1)\cdot2^{n-1}}$，$\boldsymbol{a_{2n+1}=(n+2)\cdot2^{n-1}}$，$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n\cdot2^{n-1}}$

) $a_{2(n+1)}=2a_{2n+1}=2a_{2n}+2^n$ より，

$\frac{a_{2(n+1)}}{2^{n+1}}=\frac{a_{2n}}{2^n}+\frac{1}{2}$ から，数列 $\left\{\frac{a_{2n}}{2^n}\right\}$ は初項 $\frac{a_2}{2}=\frac{2a_1}{2}=1$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列。

よって，$\frac{a_{2n}}{2^n}=1+\frac{1}{2}(n-1)$

$a_{2n}=(n+1)\cdot2^{n-1}$

これより，$a_{2n+1}=a_{2n}+2^{n-1}=(n+2)\cdot2^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)\cdot2^{k-2}+(k+1)\cdot2^{k-1}\}$

$=3\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot2^{k-2}$

ここで，$S=\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot2^{k-2}$ とすると，

$S-2S$を計算して，

$-S=1+1+2+\cdots\cdots+2^{n-2}-(n+1)\cdot2^{n-1}$

よって，$-S=1+(2^{n-1}-1)-(n+1)\cdot2^{n-1}$

$=-n\cdot2^{n-1}$

ゆえに，$S=n\cdot2^{n-1}$

したがって，$\sum_{k=1}^{2n}a_k=3n\cdot2^{n-1}$

②C-10-11

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$(a_{n+1}-a_n)^2=a_{n+1}+a_n$，$a_{n+1}>a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たす。$b_n=a_{n+1}-a_n$ とするとき，b_n を n の式で表せ。また，a_n を求めよ。　◎大阪市立大◎

解答　$\boldsymbol{b_n=n+1}$，$\boldsymbol{a_n=\frac{n(n+1)}{2}}$

$a_1=1$ より，$(a_2-1)^2=a_2+1$ から，$a_2=3$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ より，$b_n{}^2=a_{n+1}+a_n$……①

これより，$b_{n+1}{}^2=a_{n+2}+a_{n+1}$……②

②－①より，$b_{n+1}{}^2-b_n{}^2=a_{n+2}-a_n$

よって，$(b_{n+1}+b_n)(b_{n+1}-b_n)=a_{n+2}-a_n$

また，$b_{n+1}+b_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)$

$=a_{n+2}-a_n$

ここで，$a_{n+1}>a_n$ より，$b_n>0$

よって，$b_{n+1}+b_n>0$ から $b_{n+1}-b_n=1$

また，$b_1=a_2-a_1=2$ より，b_n は初項 2，

公差 1 の等差数列から，$b_n=n+1$

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

②C-10-12

$a_1=1$，$a_2=6$，$2(2n+3)a_{n+1}=(n+1)a_{n+2}+4(n+2)a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$b_n=a_{n+1}-2a_n$ とおくとき，b_n を n の式で表せ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ。

鳥取大

解答　(1)　$\boldsymbol{b_n=(n+1)\cdot 2^n}$　(2)　$\boldsymbol{a_n=n(n+1)\cdot 2^{n-2}}$　(3)　$\boldsymbol{(n^2-n+2)\cdot 2^{n-1}-1}$

(1)　与えられた漸化式を変形して，

$(n+1)(a_{n+2}-2a_{n+1})=2(n+2)(a_{n+1}-2a_n)$

$b_n=a_{n+1}-2a_n$ より，

$(n+1)b_{n+1}=2(n+2)b_n$ より，

$\dfrac{b_{n+1}}{n+2}=2\dfrac{b_n}{n+1}$

ゆえに，数列 $\left\{\dfrac{b_n}{n+1}\right\}$ は

初項 $\dfrac{b_1}{2}=\dfrac{a_2-2a_1}{2}=2$，公比 2 の等比数列

であるから，$\dfrac{b_n}{n+1}=2\cdot 2^{n-1}$

したがって，$b_n=(n+1)\cdot 2^n$

(2)　$a_{n+1}-2a_n=(n+1)\cdot 2^n$

両辺を 2^{n+1} で割って，$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{n+1}{2}$

よって，$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とすると，

$c_{n+1}-c_n=\dfrac{n+1}{2}$ から，$n\geqq 2$ のとき，

$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{k+1}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{1}{4}n(n+1)$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$a_n=n(n+1)\cdot 2^{n-2}$

(3)　$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-2a_k)=\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}-2\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=(a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a_k-a_1)-2\sum_{k-1}^{n}a_k$

$=a_{n+1}-a_1-S_n$……①

次に，$A=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおくと(1)より，$A-2A$ を計算して，

$-A=2\cdot 2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n-(n+1)2^{n+1}$

$=4+\dfrac{2^2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n+1)2^{n+1}$

$=-n\cdot 2^{n+1}$

よって，$A=n\cdot 2^{n+1}$　これを①に代入して，

$n\cdot 2^{n+1}=a_{n+1}-a_1-S_n$ より，

$S_n=a_{n+1}-a_1-n\cdot 2^{n+1}$

$=(n+1)(n+2)\cdot 2^{n-1}-1-n\cdot 2^{n+1}$

$=(n^2-n+2)\cdot 2^{n-1}-1$

②C-10-13

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2^{2n-2}(a_n)^2$　　●防衛大●

解答　$\boldsymbol{a_n=2^{2^n-2n}}$

(1)　$b_n=\log_2 a_n$ とすると，

$b_{n+1}=2b_n+2n-2$……①

$b_{n+2}=2b_{n+1}+2(n+1)-2$

$-)\quad b_{n+1}=2b_n\ +2n\ \ \ -2$

$b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)+2$

ここで，$c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと，$c_{n+1}=2c_n+2$

$b_1=0$ より，$b_2=0$　　よって，$c_1=0$

これから，$c_n=2^n-2$

すなわち，$b_{n+1}-b_n=2^n-2$

ここに①を代入して，

$2b_n+2n-2-b_n=2^n-2$ から，$b_n=2^n-2n$

よって，$\log_2 a_n=2^n-2n$ より，$a_n=2^{2^n-2n}$

②C-10-14

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)* $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{9a_n+1}{a_n+9}$

●信州大

解答　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3\cdot5^{n-1}+4^{n-1}}{3\cdot5^{n-1}-4^{n-1}}}$

(1)　$a_n-\alpha=b_n$ とすると，

$a_n=b_n+\alpha$　　$a_{n+1}=b_{n+1}+\alpha$ から，

$b_{n+1}+\alpha=\dfrac{9(b_n+\alpha)+1}{b_n+\alpha+9}$　すなわち，

$b_{n+1}=\dfrac{9(b_n+\alpha)+1}{b_n+\alpha+9}-\alpha=\dfrac{(9-\alpha)b_n-\alpha^2+1}{b_n+\alpha+9}$

より，$-\alpha^2+1=0$ から，$\alpha\pm1$

$\alpha=1$ を代入して，$b_{n+1}=\dfrac{8b_n}{b_n+10}$

逆数をとって，$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおくと，

$c_{n+1}=\dfrac{5}{4}c_n+\dfrac{1}{8}$

$c_1=1$ から，$c_n=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{2}$

これより，$b_n=\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{2\cdot4^{n-1}}{3\cdot5^{n-1}-4^{n-1}}$

よって，$a_n=b_n+1=\dfrac{3\cdot5^{n-1}+4^{n-1}}{3\cdot5^{n-1}-4^{n-1}}$

②C-10-15

次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=-4$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot2^{n+1}$

●金沢大

解答　$\boldsymbol{a_n=2^n(2n^2-15n+11)}$

漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると，

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+4n-13$　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とすると，

$b_{n+1}=b_n+4n-13$，$b_1=-2$ より，

$n\geqq2$ のとき，

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-13)=2n^2-15n+11$

これは $n=1$ のときも成り立つ。したがって，$a_n=2^n(2n^2-15n+11)$

②C-10-16

数列 a_1，a_2，…，a_n，…の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_1=1,\ S_n=\frac{n^2}{n^2-1}S_{n-1}\ \ (n\geqq 2)$$

を満たすとき，a_n を n を用いて表せ。

●宮崎大

解答　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{2}{n(n+2)}}$

$S_n=\dfrac{n^2}{n^2-1}S_{n-1}=\dfrac{n^2}{(n+1)(n-1)}S_{n-1}$

の両辺に $\dfrac{n+1}{n}$ を掛けて，$\dfrac{n+1}{n}S_n=\dfrac{n}{n-1}S_{n-1}$

ここで，$b_n=\dfrac{n+1}{n}S_n$ とおくと，$b_n=b_{n-1}$

また，$b_1=\dfrac{2}{1}S_1=2$ から，

$b_n=b_{n-1}=b_{n-2}=\cdots\cdots=b_1=2$

よって，$b_n=2$ から，$\dfrac{n+1}{n}S_n=2$

すなわち，$S_n=\dfrac{2n}{n+1}$

ここで，$a_n=S_n-S_{n-1}\ \ (n\geqq 2)$ から，

$a_n=\dfrac{2n}{n+1}-\dfrac{2(n-1)}{n}=\dfrac{2}{n(n+1)}\ \ (n\geqq 2)$

$a_1=S_1=1$ から，$n=1$ でも成立する。

よって，$a_n=\dfrac{2}{n(n+2)}\ \ (n\geqq 1)$

②C-10-17

$$a_1=1,\ b_1=0,\ a_{n+1}=\frac{5}{4}a_n-\frac{3}{4}b_n+1,\ b_{n+1}=-\frac{3}{4}a_n+\frac{5}{4}b_n+1$$

のとき，一般項 a_n，b_n を求めよ。

●慶應義塾大●

解答　$\boldsymbol{a_n=2^{n-2}+2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$　$\boldsymbol{b_n=-2^{n-2}+2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n-\dfrac{3}{4}b_n+1\cdots\cdots①$

$b_{n+1}=-\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{5}{4}b_n+1\cdots\cdots②$

①+②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)+2$

より，$a_n+b_n=4-3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdots\cdots③$

①−②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$

より，$a_n-b_n=2^{n-1}\cdots\cdots④$

③，④を連立して求める。

②C-10-18

$x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=\dfrac{1}{7}$，$x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}x_n}{4x_{n+1}x_n-6x_{n+1}+5x_n}$ のとき x_n を n の式で表せ。

●横浜国立大●

解答　$\boldsymbol{x_n=\dfrac{1}{3^n-2^n+2}}$

$\dfrac{1}{x_{n+2}}=\dfrac{4x_{n+1}x_n-6x_{n+1}+5x_n}{x_nx_{n+1}}$

$=4-\dfrac{6}{x_n}+\dfrac{5}{x_{n+1}}$

$y_n=\dfrac{1}{x_n}$ とすると，$y_{n+2}=4-6y_n+5y_{n+1}$

$z_n=y_n+a$ とおくと，

$z_{n+2}-a=4-6(z_n-a)+5(z_{n+1}-a)$ から，

$z_{n+2}-5z_{n+1}+6z_n=2a+4$

よって，$a=-2$ とすると，

$z_{n+2}-5z_{n+1}+6z_n=0$

$z_1=1$，$z_2=5$

$z_{n+2}-3z_{n+1}=2(z_{n+1}-3z_n)$ より，

$z_{n+1}-3z_n=2^{n-1}(z_2-3z_1)=2^n\cdots\cdots①$

$z_{n+2}-2z_{n+1}=3(z_{n+1}-2z_n)$ より，

$z_{n+1}-2z_n=3^{n-1}(z_2-2z_1)=3^n\cdots\cdots②$

①，②より，$z_n=3^n-2^n$　これより，

$y_n=3^n-2^n+2$ から，$x_n=\dfrac{1}{3^n-2^n+2}$

②C-10-19

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=3\cdot\frac{a_{n+2}}{a_n}$ を満たしている。

このとき，$b_n=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$ とおいて b_n を n の式で表せ。これから a_n を求めよ。

◎関西大◎

解答　$b_n=3^{n-1}$，$a_n=\frac{2}{3^{n-1}+1}$

$b_n=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}$

$=-\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n}$……①

より，$b_{n+1}=-\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+2}a_{n+1}}$……②

①より，$a_{n+1}-a_n=-b_na_{n+1}a_n$

②より，$a_{n+2}-a_{n+1}=-b_{n+1}a_{n+2}a_{n+1}$

これらより，$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{b_{n+1}a_{n+2}a_{n+1}}{b_na_{n+1}a_n}$

$=\frac{b_{n+1}a_{n+2}}{b_na_n}$

これと条件式を比べて $\frac{b_{n+1}}{b_n}=3$

$b_{n+1}=3b_n$

また，$b_1=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=2-1=1$

よって，$b_n=3^{n-1}$

$c_n=\frac{1}{a_n}$ とすると，$b_n=c_{n+1}-c_n$ より

$n\geqq 2$ のとき，

$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=\frac{3^{n-1}+1}{2}$

$n=1$ でも成立する。

よって，$a_n=\frac{1}{c_n}=\frac{2}{3^{n-1}+1}$

②C-10-20

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。すべての項 a_n が同符号であり，$S_n=2a_n^2+\frac{1}{2}a_n-\frac{3}{2}$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

●早稲田大

解答　$a_n=\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}$

$S_{n+1}=2a_{n+1}^2+\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{3}{2}$

$S_n=2a_n^2+\frac{1}{2}a_n-\frac{3}{2}$

辺々を引くと，$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ から，

$a_{n+1}=2(a_{n+1}^2-a_n^2)+\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}^2-a_n^2-\frac{1}{4}(a_{n+1}+a_n)=0$ より

$(a_{n+1}+a_n)\left(a_{n+1}-a_n-\frac{1}{4}\right)=0$

ここで，a_n はすべて同符号より，

$a_{n+1}+a_n\neq 0$

ゆえに，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{4}$ より $\{a_n\}$ は公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列……①

$a_1=S_1=2a_1^2+\frac{1}{2}a_1-\frac{3}{2}$ から

$4a_1^2-a_1-3=0$ より，$(4a_1+3)(a_1-1)=0$

(i)　$a_1=-\frac{3}{4}$ のとき，①から $a_n=\frac{1}{4}(n-4)$

これは $1\leqq n\leqq 3$ のとき負，$n\geqq 5$ のとき正となるためすべての項 a_n が同符号という条件に反する。

(ii)　$a_1=1$ のとき，$a_n=\frac{1}{4}(n+3)$

このとき，すべての項は正となり適する。

数学的帰納法の練習

②C-10-21

数学的帰納法により次の等式を証明せよ。

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

●熊本女子大

解 答

［I］ $n=1$ のとき，左辺$=\frac{3}{4}$，右辺$=\frac{3}{4}$ で成り立つ。

［II］ $n=k$ のとき成り立つとすると

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

両辺に $\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$ を掛けると，

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}=\frac{k+3}{2(k+2)}$$

より，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，すべての自然数に対して，等式は成り立つ。

②C-10-22

数学的帰納法により次の等式を証明せよ。

$$S_k=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

$$T_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}$$

とする。このとき $S_{2n}=T_n$ を証明せよ。ただし n は正の整数とする。

●早稲田大

解 答

［I］ $n=1$ のとき，$S_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$T_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ より，成り立つ。

［II］ $n=k$ のとき $S_{2k}=T_k$ が成り立つとすると，

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k+k}$$

両辺に $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$ を加えると，

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{k+(k+1)}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k+k}+\frac{1}{(k+1)+k}+\frac{1}{(k+1)+(k+1)}$$

より，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，$S_{2n}=T_n$ が成り立つ。

②C-10-23

n を自然数とするとき，次の不等式を数学的帰納法により証明せよ。

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{3}{2}-\frac{1}{4n}$$

◉金沢大◉

解答

［I］ $n=1$ のとき，左辺$=1$，

右辺$=\frac{5}{4}$ より，成り立つ。

［II］ $n=k$ のとき成り立つとすると，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}<\frac{3}{2}-\frac{1}{4k}$$

両辺に $\frac{1}{(2k+1)^2}$ を加えて，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{3}{2}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{(2k+1)^2}$$

ここで，

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{4(k+1)}-\left\{\frac{3}{2}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{(2k+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4k(k+1)(2k+3)^2}>0 \text{ から}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+3)^2}<\frac{3}{2}-\frac{1}{4(k+1)}$$

より，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，不等式は成り立つ。

②C-10-24

任意の自然数 n について，$a_n>0$ とし，次の関係が成り立つとする。

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots\cdots+a_n{}^3$$

(1)　a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2)　a_n を求めよ。

◉山口大◉

解答　**(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$　(2)　$a_n=n$**

(1)　$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2$

$=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots\cdots+a_n{}^3\cdots\cdots①$

①に $n=1$ を代入して，$a_1{}^2=a_1{}^3$ より，

$a_n>0$ から，$a_1=1$

①に $n=2$ と $a_1=1$ を代入して，

$(1+a_2)^2=1^3+a_2{}^3$ より，$a_2=2$，

①に $n=3$ と $a_1=1$，$a_2=2$ を代入して，

$(1+2+a_3)^2=1^3+2^3+a_3{}^3$ より，$a_3=3$

(2)　(1)から $a_n=n$ と推測される。これを数学的帰納法で証明する。

［I］ $n=1$ のとき，$a_1=1$ より，成り立つ。

［II］ $n\leqq k$ のとき成り立つとすると，

$a_1=1$，$a_2=2$，$\cdots\cdots a_k=k$，

①において，$n=k+1$ とおくと，

$(1+2+\cdots\cdots+k+a_{k+1})^2$

$=1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+a_{k+1}{}^3$ より，

$$\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2+2a_{k+1}\cdot\frac{1}{2}k(k+1)+a_{k+1}{}^2$$

$$=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+a_{k+1}{}^3$$

$a_{k+1}(a_{k+1}+k)(a_{k+1}-k-1)=0$ から，

$a_{k+1}=k+1$ より，①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により $a_n=n\,(n\geqq 1)$

②C-10-25

実数 x，y について，$x+y$，xy がともに偶数とする。このとき，自然数 n に対して x^n+y^n も偶数となることを示せ。

◉岐阜大◉

解答

$x+y=2p$，$xy=2q$（p，q は整数）とする。

［Ⅰ］　$n=1$ のとき $x+y=2p$ は偶数，

$n=2$ のとき

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4p^2-4q$ は偶数

［Ⅱ］　$n=k$，$k+1$　$(k\geqq 1)$ のとき x^n+y^n が偶数とすると，

$x^k+y^k=2s$，$x^{k+1}+y^{k+1}=2t$　（s，t は整数）　とおける。

$$x^{k+2}+y^{k+2}$$
$$=(x+y)(x^{k+1}+y^{k+1})-xy(x^k+y^k)$$
$$=2p\cdot 2t-2q\cdot 2s=4(pt-qs)$$

これより，$n=k+2$ のときも偶数である。

よって，数学的帰納法により，x^n+y^n は偶数である。

②C-10-26

a，b を正の数，n を自然数とする。$(a+b)^n\leqq 2^{n-1}(a^n+b^n)$ であることを数学的帰納法によって証明せよ。　　◉東京女子大◉

解答

［Ⅰ］　$n=1$ のとき，左辺$=a+b$，

右辺$=a+b$ より，成り立つ。

［Ⅱ］　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$(a+b)^k\leqq 2^{k-1}(a^k+b^k)$

両辺に $(a+b)$ を掛けて，

$(a+b)^{k+1}\leqq 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$

ここで，

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})-2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$$
$$=2^{k-1}(a^{k+1}+b^{k+1}-a^kb-ab^k)$$
$$=2^{k-1}(a-b)(a^k-b^k)$$
$$=2^{k-1}(a-b)^2(a^{k-1}+a^{k-2}b+\cdots+b^{k-1})\geqq 0$$

から，$(a+b)^{k+1}\leqq 2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$

$\leqq 2^k(a^{k+1}+b^{k+1})$

より，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，

$(a+b)^n\leqq 2^{n-1}(a^n+b^n)$ が成り立つ。

②C-10-27

$P_1(x)=2x-3$ とし，2 以上の整数 n に対して多項式 $P_n(x)$ を

$P_n(x)=P_{n-1}(x)\{1+4xP_{n-1}(x)\}$ と順に定義するとき，

(1)　$P_n(x)$ の次数を求めよ。

(2)　$P_n(x)$ の x の係数を求めよ。　　◉中央大◉

解答　**(1)　2^n-1　　(2)　$36n-34$**

(1)　$P_n(x)$ の次数を c_n とおくと，

$c_1=1$ である。

$P_n(x)=P_{n-1}(x)\{1+4xP_{n-1}(x)\}$ の両辺の次数を比較して，$c_n=2c_{n-1}+1$　　よって，

$c_n+1=2(c_{n-1}+1)$ から，$c_n=2^n-1$

(2)　$P_n(x)=f_n(x)+a_nx+b_n$ とおく。ただし，$f_n(x)$ は 2 次以上の項からなる多項式とする。

$$P_n(x)$$
$$=\{f_{n-1}(x)+a_{n-1}x+b_{n-1}\}$$
$$\times\{4xf_{n-1}(x)+4a_{n-1}x^2+4b_{n-1}x+1\}$$

これを展開して，$P_n(x)$ の定数項は b_{n-1}，x の係数は $a_{n-1}+4b^2{}_{n-1}$　　よって，

$b_n=b_{n-1}\cdots\cdots①$，$a_n=a_{n-1}+4b_{n-1}{}^2\cdots\cdots②$

①と $b_1=-3$ より，$b_n=-3$

これを②に代入して，$a_n=a_{n-1}+36$

よって $\{a_n\}$ は初項 2，公差 36 の等差数列より，$a_n=2+(n-1)\cdot 36=36n-34$

②C-10-28

正の整数 n に対して，$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ が成り立つように整数 x_n，y_n を定めるとき，

(1)　$x_n^2-2y_n^2=(-1)^n$ を証明せよ。

(2)　任意の n に対して，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値であることを示せ。

◎一橋大◎

解答

(1)　$(1+\sqrt{2})^{n+1}=(1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})$

$=(x_n+y_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$=(x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2}$

これより

$x_{n+1}=x_n+2y_n$，$y_{n+1}=x_n+y_n$……①

$x_1=1$，$y_1=1$　　このとき，

$(x_{n+1})^2-2(y_{n+1})^2=(x_n+2y_n)^2-2(x_n+y_n)^2$

$=-x_n^2+2y_n^2=-(x_n^2-2y_n^2)$

ここで，$a_n=x_n^2-2y_n^2$ とおくと，

$a_{n+1}=-a_n$

また，$a_1=x_1-2y_1=-1$ より，$a_n=(-1)^n$

よって，$x_n^2-2y_n^2=(-1)^n$

(2)　$\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|<\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|$ を示す。

(1)より，$|x_n^2-2y_n^2|=1$ から，

$|(x_n+\sqrt{2}y_n)(x_n-\sqrt{2}y_n)|=1$ より，

$$|(x_n-\sqrt{2}y_n)|=\frac{1}{x_n+\sqrt{2}y_n}$$

$$=\frac{1}{(1+\sqrt{2})^n}=(\sqrt{2}-1)^n$$

両辺を y_n で割ると，

$\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n}{y_n}$　　これより，

$\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^{n+1}}{y_{n+1}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}-1)}{x_n+y_n}$　(①より)

$=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n}{y_n}\cdot\dfrac{y_n(\sqrt{2}-1)}{x_n+y_n}$……(＊)

ここで，$0<\dfrac{y_n}{x_n+y_n}<1$，$0<\sqrt{2}-1<1$ から，$0<\dfrac{y_n(\sqrt{2}-1)}{x_n+y_n}<1$

よって，(＊) から，

$\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|<\dfrac{(\sqrt{2}-1)^n}{y_n}=\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|$

これより，題意は示された。

②C-10-29

n を自然数とする。2^n-1 を 3 で割ると，n が奇数のときは 1 余り，n が偶数のときは割り切れることを示せ。

◎東京女子大◎

解答

(i)　n が奇数のときに関して，

［I］　$n=1$ のとき，$2^1-1=1$ となり，3 で割ると 1 余る。

$n=2k-1$ のとき，3 で割ると 1 余るとすると，$2^{2k-1}-1=3p+1$

これより，$2^{2k-1}=3p+2$ より

$2^{2k+1}-1=4\cdot 2^{2k-1}-1$

$=4(3p+2)-1=3(4p+2)+1$

これより，$n=2k+1$ のときも 3 で割ると 1 余る。

よって，数学的帰納法により，n が奇数のとき，2^n-1 を 3 で割った余りは 1 である。

(ii)　n が偶数のときに関して，

［I］　$n=2$ のとき，2^2-1 は 3 で割り切れる。

［II］　$n=2k$ のとき，$2^{2k}-1$ は 3 で割り切れるとすると，$2^{2k}-1=3q$

これより，$2^{2k}=3q+1$

$2^{2k+2}-1=4\cdot 2^{2k}-1$

$=4(3q+1)-1=3(4q+1)$

これより，$n=2(k+1)$ のときも 3 で割り切れる。

よって，数学的帰納法により，n が偶数のとき，2^n-1 は 3 で割り切れる。

(i)，(ii)より題意は示された。

②C-10-30

n を自然数とするとき，次の不等式を数学的帰納法により証明せよ。

$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r^3}\leqq 2-\frac{1}{n^2}$　　◉東北学院大◉

解 答

(1) ［I］ $n=1$ のとき，左辺$=1$，右辺$=1$ より，成り立つ。

［II］ $n=k$ のとき，$\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r^3}\leqq 2-\frac{1}{k^2}$ が成り立つとすると，両辺に $\frac{1}{(k+1)^3}$ を加えて，

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^3}+\frac{1}{(k+1)^3}\leqq 2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^3}$$

ここで，

$$\left\{2-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\left\{2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^3}\right\}$$
$$=\frac{(k+1)^3-k^2(k+1)-k^2}{k^2(k+1)^3}$$
$$=\frac{k^2+3k+1}{k^2(k+1)^3}>0$$

よって，

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{(k+1)^3}\leqq 2-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^3}\leqq 2-\frac{1}{(k+1)^2}$$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，不等式は成り立つ。

②C-10-31

数列 $\{a_n\}$ が，$0\leqq a_1\leqq 3$，$a_{n+1}=|-2a_n+3|$ により定められているとき，任意の n に対して $0\leqq a_n\leqq 3$ となることを示せ。　　◉甲南大◉

解 答

［I］ $n=1$ のとき $0\leqq a_1\leqq 3$ より成り立つ。

［II］ $n=k$ のとき $0\leqq a_k\leqq 3$ が成り立つとすると，$-3\leqq -2a_k+3\leqq 3$ から

$0\leqq|-2a_k+3|\leqq 3$ より，$0\leqq a_{k+1}\leqq 3$

ゆえに，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，$0\leqq a_n\leqq 3$ が成り立つ。

②C-10-32

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1) 数列 a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+b_n\\ b_{n+1}=a_n\end{cases}$ を満たすことを示せ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。　　◉東京大◉

解 答

(1) 仮定から，

$x^{n+1}=(x^2-x-1)P(x)+a_nx+b_n$

このとき，

$x^{n+2}=(x^2-x-1)xP(x)+a_nx^2+b_nx$

$=(x^2-x-1)xP(x)+a_n(x^2-x-1)$

$+a_n(x+1)+b_nx$

$=(x^2-x-1)\{xP(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n$

ゆえに，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$

(2) $x^2=(x^2-x-1)+x+1$ より $a_1=1, b_1=1$

これと(1)より a_n，b_n はともに正の整数であることを証明する。

［I］ $n=1$ のとき，$a_1=b_1=1$ より，a_1，b_1 は正の整数。

［II］ $n=k$ のとき，a_k，b_k が正の整数とすると，

(1)から，$a_{k+1}=a_k+b_k$，$b_{k+1}=a_k$ より，

a_{k+1}，b_{k+1} はともに正の整数である。

よって，数学的帰納法により，a_n，b_n はともに正の整数である。

次に，a_n，b_n は互いに素つまり最大公約数が 1 であることを証明する。

$n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n の最大公約数を g とすると，$a_{n-1}=b_n$ より，a_{n-1} は g で割り切れる。

また，$b_{n-1}=a_n-a_{n-1}$ も g で割り切れるから，a_{n-1} と b_{n-1} はともに g で割り切れる。

これを繰り返すと，a_1，b_1 はいずれも g で割り切れる。一方 $a_1=b_1=1$ より，$g=1$

よって，a_n と b_n は互いに素である。

②C-10-33

n を自然数とするとき，次の等式，不等式を数学的帰納法により証明せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^n\tan\frac{x}{2^n}}-\frac{1}{\tan x}\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$　　◉学習院大◉

(2) $\sin\frac{x}{2^n}>\frac{1}{2^n}\sin x\quad(0<x\leqq\pi)$　　◉福井工業大◉

解答

(1) ［I］ $n=1$ のとき，左辺$=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$

右辺$=\dfrac{1}{2\tan\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{\tan x}$

$=\dfrac{1}{2\tan\frac{x}{2}}-\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$

より，$n=1$ のとき成り立つ。

［II］ $n=m$ のとき成り立つとすると，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=\frac{1}{2^m\tan\frac{x}{2^m}}-\frac{1}{\tan x}\cdots\cdots①$

$n=m+1$ のとき，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2^{m+1}}\tan\frac{x}{2^{m+1}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2^m\tan\frac{x}{2^m}}-\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{2^{m+1}}\tan\frac{x}{2^{m+1}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2^m\tan\left(2\cdot\frac{x}{2^{m+1}}\right)}+\frac{1}{2^{m+1}}\tan\frac{x}{2^{m+1}}-\frac{1}{\tan x}$

$\displaystyle=\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1-\tan^2\frac{x}{2^{m+1}}}{2\tan\frac{x}{2^{m+1}}}+\frac{1}{2^{m+1}}\tan\frac{x}{2^{m+1}}-\frac{1}{\tan x}$

$\displaystyle=\frac{1}{2^{m+1}\tan\frac{x}{2^{m+1}}}-\frac{1}{\tan x}$

これより，$n=m+1$ のときも①は成り立つ。

［I］，［II］より，数学的帰納法により，等式は成り立つ。

(2) ［I］ $n=1$ のとき，

$\displaystyle\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x=\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\displaystyle=\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)>0\ \left(0<\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{2}\text{より}\right)$

よって，$\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x>0$,

$\sin\frac{x}{2}>\frac{1}{2}\sin x$

すなわち，$n=1$ のとき成り立つ。

［II］ $n=k$ のとき成り立つとすると，

$\sin\frac{x}{2^k}>\frac{1}{2^k}\sin x$

ここで，$0<\theta<2\pi$ のとき，

$\displaystyle\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta=\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$\displaystyle=\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)>0$ から，

$\sin\frac{\theta}{2}>\frac{1}{2}\sin\theta$　よって，$\theta=\frac{x}{2^k}$ とすると，$0<x<\pi$ から，

$\displaystyle\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^k}\right)>\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^k}$ より，

$\displaystyle\sin\frac{x}{2^{k+1}}=\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^k}\right)>\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^k}$

$\displaystyle>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^k}\sin x=\frac{1}{2^{k+1}}\sin x$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

［I］，［II］より，数学的帰納法により，不等式は成り立つ。