BASIC問題

1 次の 2 次方程式を解け。

(1) $6x^2-5x-6=0$　(2) $2x^2-6x+3=0$

2 次の不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 4x+1<3x-1 \\ 2x-1\geqq 5x+6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+3>x+2 \\ 3x>4x+2 \end{cases}$

(3) $2(x-3)+5<5x-6\leqq\dfrac{3x+4}{3}$

3 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-1|=2$　(2) $|x+4|<5$　(3) $|2x-3|\geqq 4$

4 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{27}}-\dfrac{1}{\sqrt{12}}$

5 実数 x，y が $x+y=3$，$xy=-2$ を満たすとき，x^2+y^2，x^3+y^3，x^5+y^5 の値を求めよ

6 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$　(2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$　(3) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$

STANDARD問題

7 a を定数とするとき，次の不等式を解け。

(1) $ax\leqq 1$　(2) $ax+6>3x+2a$

8 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3-a^2c-ab^2+b^2c$　(2) $2x^2+3xy-2y^2+x+7y-3$

9 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x-3|=2x$　(2) $|x-3|<2x$　(3) $|x|+|x-2|=6$

10 $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母を有理化せよ。

11 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^4+\dfrac{1}{x^4}$，$x^6+\dfrac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

実戦問題篇

12 a を定数とするとき，次の方程式を解け。

(1) $ax^2+(a^2-1)x-a=0$　(2) $a^2x+1=a(x+1)$

13 ＊　$2^{18}-1$ を素数の積で表したとき，そこに現れる素数の中で最大なものを求めよ。

14 ＊　相異なる実数 α，β が $\begin{cases} \alpha^2+\sqrt{3}\beta=\sqrt{6} \\ \beta^2+\sqrt{3}\alpha=\sqrt{6} \end{cases}$ を満たすとき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

15 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数の部分を a，小数の部分を b とする。

(1)　a と b を求めよ。

(2)　$a+2b+b^2+1$ の値を求めよ。

16 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x+2|-|x-1|>x$　　(2)　$||x-1|-2|-3=0$

17 x の連立不等式 $\begin{cases} 7x-5>13-2x \\ x+a \geqq 3x+5 \end{cases}$ を満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

BASIC問題

1 次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1)　$y=2x^2+8x+9$

(2)　$y=x^2-2x$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(3)　$y=-3x^2-2x+4$ $(-1<x<2)$

2 次の不等式を解け。

(1)　$5<x^2+4x\leqq 21$　　(2)　$2x+3<x^2<5$

3 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフを y 軸方向に 2 だけ平行移動したあと，y 軸に関して対称移動させ，更に x 軸方向に -3 だけ平行移動したところ，$y=x^2$ のグラフと一致した．a，b の値を求めよ．

4 グラフが 3 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 9)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

STANDARD問題

5 2 次不等式 $4x^2+ax+b<0$ の解が $1<x<\dfrac{5}{4}$ であるとき，2 次不等式 $bx^2+ax+4\geqq 0$ の解を求めよ。

6 a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

7 次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　2 次不等式 $x^2-(m-1)x+3>0$ の解がすべての実数となる。

(2)　2 次不等式 $-x^2+2mx+m\geqq 0$ が解をもつ。

8 2 次方程式 $x^2-(a+2)x+a(2a+1)=0$ の異なる 2 つの実数解を α，β とするとき，$1<\alpha<\dfrac{3}{2}<\beta$ を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9 2 次方程式 $x^2-2mx+9=0$ が $2<x<4$ の範囲で異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

10 2 次方程式 $x^2+2ax+2a^2+2ab+4=0$ は，定数 a がどのような実数値であっても実数解をもたないという．実定数 b はどんな範囲にあるか求めよ．

11 $f(x)=-x^2+ax+a-2$，$g(x)=x^2-(a-2)x+3$ について，次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1)　どんな x の値に対しても $f(x)<g(x)$ が成り立つ。

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても，$f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つ。

実戦問題

12　x についての次の 2 つの不等式

$$2x^2-3x-5>0$$

$$x^2-(a+2)x+2a<0$$

を同時に満たす整数 x がただ 1 つ存在するとき，定数 a の値の範囲とそのときの整数 x の値を求めよ。

13　2 次不等式 $x^2-2ax+a+2>0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で常に成り立つとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

14　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ のとき，x の関数 $y=\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x の値を求めよ.

BASIC問題篇

1　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

(2)　$\tan\theta = -3$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$

2　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次のような θ を求めよ。

(1)　$2\sin\theta - 1 = 0$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

(3)　$3\tan\theta = \sqrt{3}$　　(4)　$(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

3　△ABC において，$a = \sqrt{6}$，$A = 60°$，$C = 45°$ のとき，c と外接円の半径 R を求めよ。

4　△ABC において，次のものを求めよ。

(1)　$c = 4$，$a = 6$，$B = 60°$ のとき　b

(2)　$a = 3$，$b = \sqrt{2}$，$c = \sqrt{17}$ のとき　C

5　△ABC において，AB $= 2$，BC $= \sqrt{7}$，CA $= 3$ とする。△ABC の外接円の半径 R と，内接円の半径 r を求めよ。

STANDARD問題篇

6　θ が $0° < \theta < 90°$ かつ $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき，$\cos\theta + \sin\theta$，$\cos^3\theta + \sin^3\theta$ の値を求めよ。

7　円に内接する四角形 ABCD において，AB $= 2$，BC $= 2$，CD $= 3$，DA $= 4$ とする。
次の値を求めよ。

(1)　AC の長さ　　(2)　四角形 ABCD の面積

(3)　2 つの対角線 AC と BD の交点を E とすると BE：ED の比

8　$a = 5$，$b = 6$，$c = 4$ の △ABC がある。頂角 A の二等分線と辺 BC の交点を D，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AD，AM の長さを求めよ。

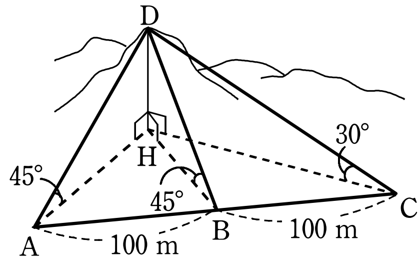
9　△ABC が次の条件を満たすとすれば，どんな三角形か。

(1)　$\sin A = \sin B$

(2)　$\sin A \cos A = \sin B \cos B$

実戦問題篇

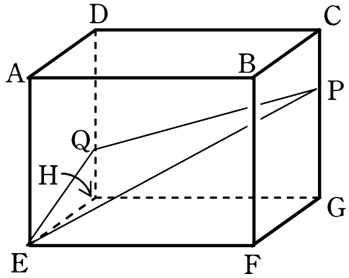
10 右の図のように１つの直線上に並ぶ水平面上の３点 A，B，C から山頂 D の仰角を測ると，それぞれ 45°，45°，30° であったという。AB＝100 m，BC＝100 m であるとき，山の高さを求めよ。



11 AB＝4，AE＝AD＝3 である直方体 ABCD－EFGH において，辺 CG と辺 HD を 1：2 に内分する点をそれぞれ P と Q とする。このとき，

EP＝$\boxed{\text{ア}}$ で，cos∠EQP＝$\boxed{\text{イ}}$ である。

さらに，△EPQ の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ で，三角錐 AEPQ の体積は $\boxed{\text{エ}}$ である。また，点 A から △EPQ に下ろした垂線の長さは $\boxed{\text{オ}}$ である。



12 △ABC において，頂角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする．次の関係式が成立するとき，△ABC はどのような形の三角形か．

$$a\sin A(\sin B-\sin C)=b\sin^2 B-(b+c)\sin B\sin C-c\cos^2 C+c$$

13 四角形 ABCD において，3 辺の長さをそれぞれ AB＝5，BC＝8，CD＝4，対角線 AC の長さを AC=7 とする。

このとき，$\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の $\boxed{\text{オ}}$ には下の ⓪～② から，$\boxed{\text{カ}}$ には ③，④ から当てはまるものを一つずつ選べ。

CD $\boxed{\text{オ}}$ AB・sin∠ABC であるから，$\boxed{\text{カ}}$ である。

⓪ ＜　　① ＝　　② ＞

③ 辺 AD と辺 BC が平行　　④ 辺 AB と辺 CD が平行

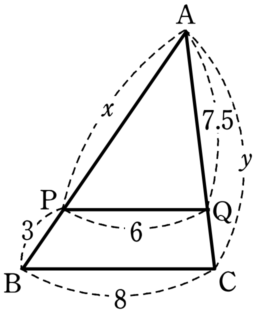
したがって，BD＝$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

BASIC＋STANDARD問題

1　3 辺の長さが a，$a-1$，$50-a$ の三角形がある。このとき，a の値の範囲を求めよ。
また，この三角形が直角三角形となるとき，a の値を求めよ。

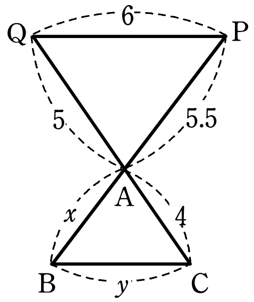
2　次の図において，x，y の値を求めよ。

(1)



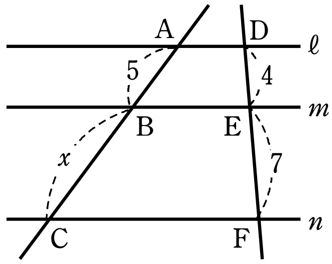
PQ∥BC

(2)



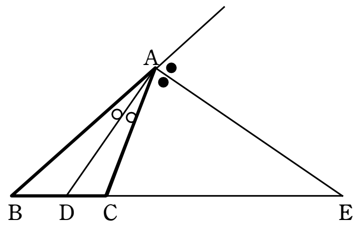
PQ∥BC

(3)



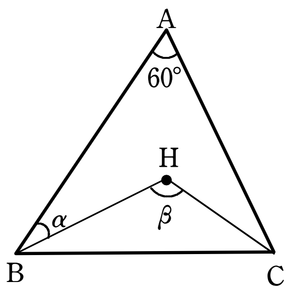
$\ell \parallel m \parallel n$

3　下の図で，AB＝6，BC＝3，CA＝4 であり，AD は ∠BAC の二等分線，AE は ∠BAC の外角の二等分線である。
BD の長さと BE の長さをそれぞれ求めよ。

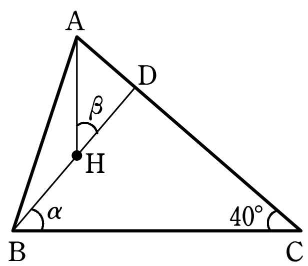


4　下の図において，点 H は △ABC の垂心である。角 α，β を求めよ。

(1)

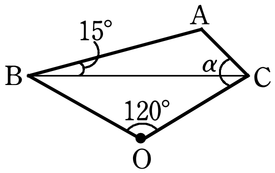


(2)

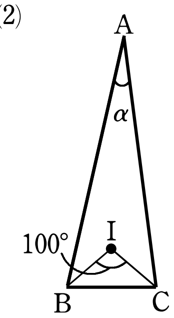


5　右の図で，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である。α を求めよ。

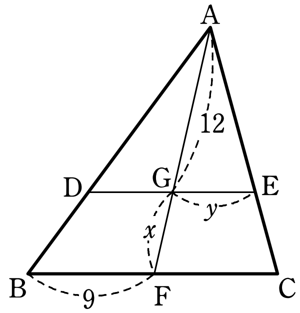
(1)



(2)



6　右の図において，点 G は △ABC の重心であり，DE∥BC である。このとき，x，y の値を求めよ。

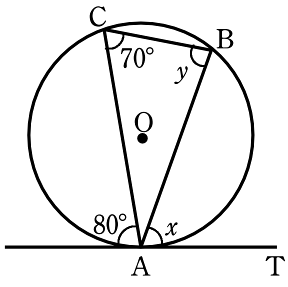


7　△ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 R，Q があり，AR：RB＝5：1，AQ：QC＝2：3 である。線分 BQ と CR の交点を O，直線 AO と辺 BC の交点を P とするとき，次の比を求めよ。

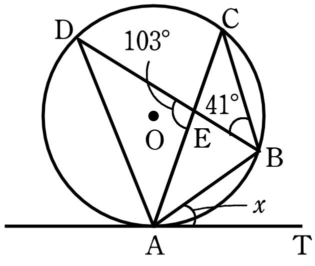
(1)　BP：PC　　(2)　AO：OP　　(3)　△ABC：△OBC

8　次の図において，直線 AT は点 A で円 O に接している。x と y を求めよ。

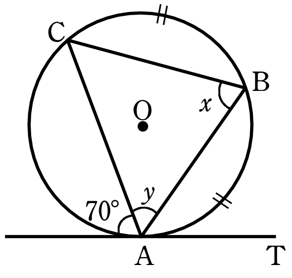
(1)



(2)

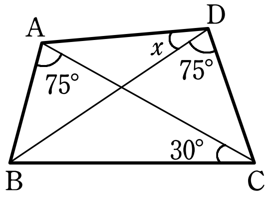


(3)

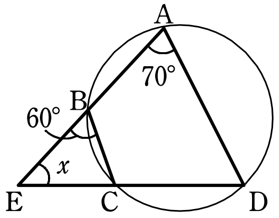


9　次の図において，角 x の大きさを求めよ。

(1)

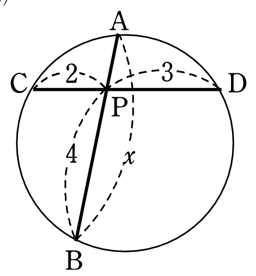


(2)

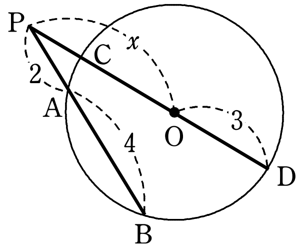


10　下の図において，x の値を求めよ。O は円の中心とする。

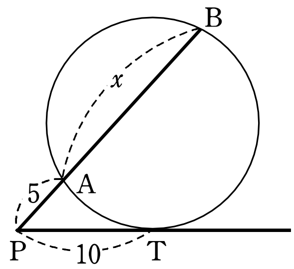
(1)



(2)

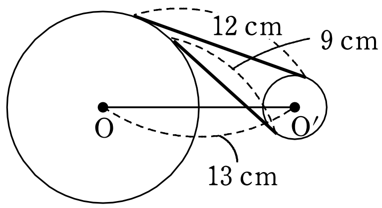


(3)



PT は円の接線

11　右の図のように，中心間の距離が 13 cm，共通外接線の長さが 12 cm，共通内接線の長さが 9 cm である 2 つの円 O，O′ がある。
この 2 つの円の半径を，それぞれ求めよ。



12　3 辺の長さが a，b，c の直角三角形の外接円の半径が $\dfrac{3}{2}$，内接円の半径が $\dfrac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，$a \geqq b \geqq c$ とする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　b と c の値を求めよ。

実戦問題

13 AB＝2，BC＝x，AC＝$4-x$ であるような △ABC がある。

(1) x の値の範囲を求めよ。

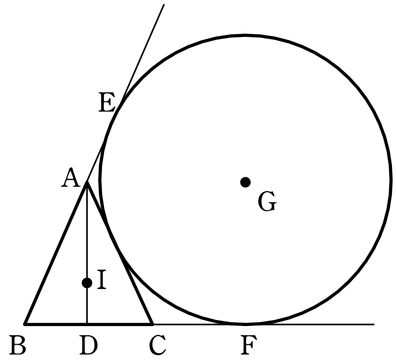
(2) △ABC が鋭角三角形であるような x の値の範囲を求めよ。

14 鋭角三角形 ABC において，AB＝8 とする。辺 AC を 1：2 に内分する点を D とし，辺 BC を 3：2 に内分する点を E とする。このとき，2 点 D，E を通る直線 ℓ と 2 点 A，B を通る直線の交点を P とすると，AP＝ア$\boxed{}$ である。また，直線 ℓ と三角形 ABC の外接円との 2 つの交点のうち P に近い方の交点を Q とし，他の交点を R とする。このとき，PQ＝3 ならば，QR＝イ$\boxed{}$ である。

15 AB＝AC である二等辺三角形 ABC の内接円の中心を I とし，内接円と辺 BC の接点を D とする。辺 BA の延長と点 E で，辺 BC の延長と点 F で接し，辺 AC と接する ∠B 内の円の中心を G とする。

(1) AD＝GF となることを証明せよ。

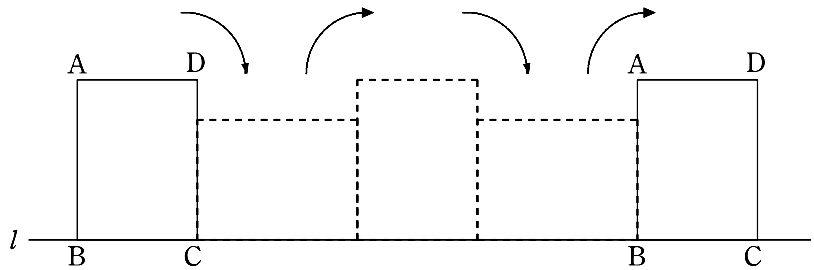
(2) AB＝7，BD＝3 のとき，IG の長さを求めよ。



16 C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a，a，$2a$ の円とする．いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ．

17 （出典･2009常総学院高）

図のように，AB＝4 cm，BC＝3 cm，CA＝5 cm である長方形 ABCD を直線 l に沿って，滑ることなくちょうど 1 回転するまで転がす。



頂点 B が動いた跡の線の長さは ア$\boxed{}$ π cm であり，頂点 B が動いた跡の線と直線 l とで囲まれた部分の面積は イ$\boxed{}$ cm^2 である。ただし，π は円周率とする。

BASIC＋Standard問題

1 32351 と 23009 の最大公約数を求めよ。

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $28x+95y=3$　　(2) $103x-75y=7$

3 (1) 方程式 $xy-2x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2) 方程式 $3xy+3x+y=5$ を満たす 2 つの整数 x，y の組をすべて求めよ。

4 n は自然数とする。$n^2-28n+160$ が素数となるような n をすべて求めよ。

5 (1) 1960 の正の約数の個数を求めよ。

(2) 1960 の正の約数の総和を求めよ。

6 n を正の整数とする。$N=1890n$ とすると，$\sqrt{N}$ が整数になるような最小の n の値を求めよ。

7 $5x^2+2xy+y^2-4x+4y+7=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ.

8 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1) $xyz=x+y+z$　$(x<y<z)$

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　$(x\leqq y\leqq z)$

実践問題

9 $\dfrac{40}{21}$，$\dfrac{16}{39}$ のいずれに掛けても積が自然数となる分数のうち，最も小さいものを求めよ。

10 方程式 $48x+539y=77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.

11 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

12 自然数 N を 5 進法で表すと 3 桁の数 $abc_{(5)}$ になり，7 進法で表すと 3 桁の数 $cab_{(7)}$ になるという。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

13 100! を素因数分解すると，$2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^{16}\cdot11^9\cdot13^7\cdots\cdots$ となる。a，b，c の値を求めよ。

14 素数 p，q，r に対して $2p^3qr+19p^2q^2r-10pq^3r=111111$ が成り立つとき，p，q，r の値を求めよ。

1 解答 173

2 解答 k は整数とする。

(1) $x=95k+51$，$y=-28k-15$　(2) $x=75k-56$，$y=103k-77$

3 解答 $(x,\ y)=(-4,\ -7)$，$(-2,\ -1)$，$(4,\ 1)$，$(-6,\ 11)$，$(-8,\ 5)$，$(-14,\ 3)$

解答 $(x,\ y)=(-1,\ -4)$，$(0,\ 5)$

4 解答 $n=7$，21

5 解答 (1) 24　(2) 5130

6 解答 210

7 解答 $(x,\ y)=(1,\ -2)$，$(1,\ -4)$

8 解答 (1) $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$　(2) $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

9 解答 $\dfrac{273}{8}$

10 解答 $x=-77+539t$, $y=7-48t$ (t は整数)

11 解答 $(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 6,\ 3)$，$(3,\ 2,\ 6)$，$(3,\ 6,\ 2)$，$(6,\ 2,\ 3)$，$(6,\ 3,\ 2)$，$(2,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 2,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 2)$，$(3,\ 3,\ 3)$

12 解答 $a=2$，$b=3$，$c=1$；$N=66$

13 解答 $a=97$，$b=48$，$c=24$

14 解答 (ア) 7　(イ) 3　(ウ) 13

数学①　第６回試練　場合の数

BASIC問題

$\boxed{1}$ 100 から 200 までの整数のうち，次の整数の個数を求めよ。

(1)　5 かつ 8 の倍数　　(2)　5 または 8 の倍数

(3)　5 で割り切れるが 8 で割り切れない整数

(4)　5 と 8 の少なくとも一方で割り切れない整数

$\boxed{2}$ SHOJI の 5 文字をすべて使用して作成した文字列をアルファベット順の辞書式に並べるとき，JISHO は何番目の文字列であるか。

$\boxed{3}$ 0，1，2，3，4，5，6 の 7 個の数字から異なる 4 個の数字を取り出して 4 桁の整数を作るとき，次のような数は何個あるか。

(1)　4 桁の整数　　(2)　偶数　　(3)　3200 以上

$\boxed{4}$ 正十角形について，次の数を求めよ。

(1)　対角線の本数

(2)　正十角形の頂点のうちの 3 個を頂点とする三角形の個数

(3)　(2) の三角形のうち，正十角形と 1 辺だけを共有する三角形の個数

$\boxed{5}$ 正四角錐の 5 つの面を，赤青黄緑紫の 5 色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。

$\boxed{6}$ $x+y+z=12$ と次の条件を満たす x，y，z の組は，全部で何個あるか。

(1)　x，y，z は負でない整数　　(2)　x，y，z は自然数

Standard問題

$\boxed{7}$ ATLANTA の 7 文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1)　並べ方は，全部で何通りあるか。

(2)　A が両端にくる並び方は，全部で何通りあるか。

(3)　T が隣り合わない並び方は，全部で何通りあるか。

$\boxed{8}$ YOKOHAMA の 8 文字を横 1 列に並べて順列を作る。次のような順列は何通りあるか。

(1)　AA と OO という並びをともに含む順列

(2)　Y，K，H，M がこの順に並ぶ順列

$\boxed{9}$ NAGOYAJO の 8 個の文字をすべて並べるとき，次の問いに答えよ。

(1) AA と OO という並びをともに含む順列は何通りあるか。

(2) 同じ文字が隣り合わない順列は何通りあるか。

$\boxed{10}$ 正五角柱の 7 つの面を，赤，青，黄，緑，黒，紫の 6 色で塗り分ける。ただし，隣り合う面は異なる色を塗る。また，6 色はすべて使う。なお，回転して同じになるものは同じ塗り方とみなす。このとき次の問に答えよ。

(1) 2 つの五角形の面を同じ色で塗るような，正五角柱の塗り方は何通りあるか。

(2) 正五角柱の塗り方の総数は何通りあるか。

$\boxed{11}$ 赤玉 6 個，青玉 5 個，黄玉 1 個がある。これらの玉にひもを通して輪をつくる方法は何通りあるか。

12 12 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) 5 人，4 人，3 人の 3 つの組に分ける。

(2) A，B，C，D の 4 つの組に，3 人ずつ分ける。

(3) 3 人ずつの 4 つの組に分ける。

(4) 8 人，2 人，2 人の 3 つの組に分ける。

13 次の条件を満たす整数の組 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ の個数を求めよ。

(1) $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq a_5 \leqq 4$

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leqq 4$，$a_1 \geqq 1$，$a_i \geqq 0$ $(i=2,\ 3,\ 4,\ 5)$

実戦問題

14 1 から 10 までの自然数の各数字を 1 つずつ記入した 10 枚のカードがある。これらを A，B，C の 3 つの箱に分けて入れる。

(1) 空の箱があってもよいものとすると，分け方は何通りあるか。

(2) 空の箱があってはならないとすると，分け方は何通りあるか。

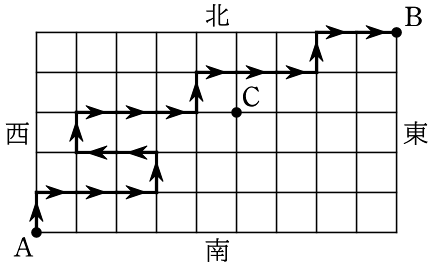
15 正八面体について考える。ただし，回転させて一致するものは同じものとする。

(1) 頂点に 1，2，…… と順に番号を付けるとき，番号の付け方は何通りあるか。

(2) 2 つの面を赤に，残りの 6 つの面を白に塗るとき，塗り方は何通りあるか。

(3) 3 つの面を赤に，残りの 5 つの面を白に塗るとき，塗り方は何通りあるか。

16 右の図のように東西に 6 本，南北に 10 本の道がある。東西の道と南北の道の出会う地点を交差点とよび，隣どうしの交差点を結ぶ道を区間ということにする。A 地点から B 地点に進むとき，次の問いに答えよ。ただし，どの交差点においても，東西および北のいずれかに進むことはできるが，南に進むことはできないとする。また，後戻りもできないとする。図の中の太線は道順の例を示したものである。



(1) A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ。

(2) C 地点を通って，A 地点から B 地点へ行く道順の総数を求めよ。

(3) A 地点から B 地点まで 16 区間で行く道順の総数を求めよ。

BASIC問題

1 男子 3 人と女子 2 人がくじ引きで順番を決めて横 1 列に並ぶとき，次の場合の確率を求めよ。

(1) 女子 2 人が隣り合う。 (2) 男女が交互に並ぶ。

2 赤玉と白玉が合わせて 10 個入った袋がある。この袋の中から玉を 3 個同時に取り出すとき，赤玉が出ない確率が $\frac{7}{10}$ であるという。袋の中に白玉は何個入っているか。

3 10 本のくじの中に，当たりくじが 3 本入っている。このくじを 3 本同時に引くとき，次の確率を求めよ。

(1) 3 本ともはずれる確率 (2) 少なくとも 1 本は当たる確率

4 3 個のさいころを投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 出た目の最小値が 3 以上である確率

(2) 出た目の最小値が 3 である確率

5 A，B 2 社が同じ製品を製造している。A 社は全製品の 60 %，B 社は全製品の 40 % を生産している。また，A 社の製品中には 3 %，B 社の製品中には 6 % の不良品が混じっているという。全製品の中から 1 個を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) それが不良品である確率

(2) 不良品であったときに，それが A 社の製品である確率

Standard問題

6 サイコロを続けて4回投げ，1回目，2回目，3回目，4回目に出た目をそれぞれ a，b，c，d とする。次の問に答えよ。

(1) $a<b<c<d$ となる確率を求めよ。

(2) $a \leqq b \leqq c \leqq d$ となる確率を求めよ。

7 箱に 2 個の赤い玉と $(n-2)$ 個の白い玉が入っている $(n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots)$。

(1) 箱から 3 個の玉を同時に取り出すとき，2 個が白，1 個が赤となる確率 $P(n)$ を求めよ。

(2) (1) の $P(n)$ が最大になる n を求めよ。

8 硬貨を何回か投げ，先に表が 2 回出ると A の勝ちとし，先に裏が 4 回出ると B の勝ちとするゲームを考える。次の確率を求めよ。

(1) 5 回目に B が勝つ確率 (2) A，B それぞれの勝つ確率

9 次の確率を求めよ．

(1) 2人でジャンケンをするとき，2回続けてアイコになる確率

(2) 3人で1回ジャンケンをして，1人の勝者が決まる確率

(3) 5人で1回ジャンケンをして，3人の勝者が決まる確率

(4) 5人で1回ジャンケンをして，複数の敗者がでて，複数の勝者が残り，次にその勝者のみで2回目のジャンケンをして，1人の勝者が決まる確率

実戦問題

10 4つのさいころを同時に振るとき，次の確率を求めよ。

(1) 4つとも同じ目が出る確率

(2) 3つのさいころに同じ目が出て，他の1つにはその目と異なる目が出る確率

(3) 2つの異なる目がそれぞれ2つずつ出る確率

(4) 2つのさいころに同じ目が出て，他の2つにはその目と異なりかつ互いに異なる目が出る確率

(5) 連続した4つの自然数の目が出る確率

11 数直線上を点Pが1ステップごとに，$+1$ または -1 だけそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。数直線上の値が3の点をAとして，PがAにたどり着くと停止する。

(1) Pが原点Oから出発して，ちょうど5ステップでAにたどり着く確率を求めよ。

(2) Pが原点Oから出発して，ちょうど6ステップで値が2の点Bにたどり着く確率を求めよ。

(3) Pが原点Oから出発して，8ステップ以上移動する確率を求めよ。

12 正四面体ABCDを考える。点Pは時刻0では頂点Aに位置し，1秒ごとにある頂点から他の3頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする。このとき，時刻0から時刻 n までの間に，4頂点A，B，C，Dのすべてに点Pが現れる確率を求めよ。ただし，n は1以上の整数とする。

数学①　第８回試練　データの分析

1　次のデータの第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数を求めよ。

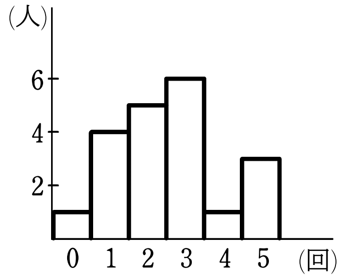
(1)　12，35，47，59，68，73，74，79，87，97

(2)　2，7，10，14，22，33，48，71，84，91，96，98

2　右のヒストグラムは，ある高校の生徒 20 人について，ある 5 日間に校内の売店を利用した回数を調べた結果である。

(1)　利用回数の最頻値，中央値を求めよ。

(2)　利用回数の平均値を求めよ。



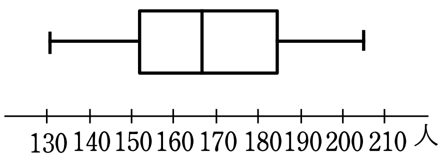
3　次のデータは，ある 10 人の生徒の数学のテストの得点である。ただし，a の値は 0 以上の整数である。

60　74　66　62　82　38　45　41　67　a　(点)

(1)　a の値がわからないとき，このデータの中央値として何通りの値があり得るか。

(2)　このデータの平均値が 60.0 点のとき，このデータの中央値を求めよ。

4　右の図は，ある店の 30 日間にわたる来客数のデータの箱ひげ図である。
この箱ひげ図から読み取れることとして正しいものを，次の ① ～ ③ から 1 つ選べ。



①　来客数 150 人以上 180 人未満のところには，半分以上の日が分布している。

②　来客数が 160 人以上の日が 15 日以上あった。

③　少なくとも 2 日は，来客数が 200 人以上である。

5　次のデータは，あるパズルに挑戦した 10 人について，完成させるまでにかかった時間 x (分) をまとめたものである。ただし，x のデータの平均値を $\overline{x}$ で表し，20 分を超えた人はいなかったものとする。次の問いに答えよ。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
x	13	a	7	3	11	18	7	b	16	3
$(x-\overline{x})^2$	4	c	16	64	0	d	16	1	25	64

(1)　a，b，c，d の値を求めよ。

(2)　x のデータの分散と標準偏差を求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。

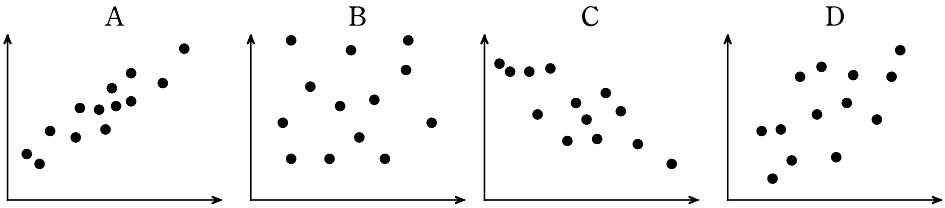
6 下の A ～ D の散布図と対応する相関係数 r の値の組について適当なものを，次の ① ～ ④ の中から選べ。

① A：$r=0.8$　B：$r=0.6$　C：$r=-0.6$　D：$r=0.9$

② A：$r=0.9$　B：$r=0.1$　C：$r=-0.8$　D：$r=0.6$

③ A：$r=0.8$　B：$r=-0.1$　C：$r=0.7$　D：$r=0.7$

④ A：$r=-0.9$　B：$r=-0.1$　C：$r=0.8$　D：$r=0.8$



7 下の表は，10 人の生徒に 30 点満点の 2 種類のテスト A，B を行った得点の結果である。テスト A，B の得点をそれぞれ x，y とするとき，x と y の相関係数 r を求めよ。ただし，小数第 3 位を四捨五入せよ。

生徒番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	29	25	22	28	18	23	26	30	30	29
y	23	23	18	26	17	20	21	20	26	26

8 30 個の値からなるデータがあり，そのうちの 20 個の値の平均値は 7，分散は 5，残り 10 個の値の平均値は 4，分散は 8 である。

(1) このデータ全体の平均値を求めよ。　(2) このデータ全体の分散を求めよ。

9 n 個の値の組として与えられている 2 つの変量 X，Y に対し，新たな変量 X'，Y' を $X'=aX+b$，$Y'=cY+d$ (a，b，c，d は定数で，$a \neq 0$，$c \neq 0$) によって定義する。

次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ⑦ のうちからそれぞれ 1 つずつ選べ。

(1) X' の分散は，X の分散の $\boxed{\text{ア}}$ 倍になる。

(2) X' と Y' の共分散は，X と Y の共分散の $\boxed{\text{イ}}$ 倍である。

(3) X' と Y' の相関係数は，X と Y の相関係数の $\boxed{\text{ウ}}$ 倍である。

⓪ a　① a^2　② ac　③ $\dfrac{ac}{|ac|}$　④ b　⑤ b^2　⑥ bd　⑦ $|bd|$

BASIC問題

$\boxed{1}$ あるクラス101人の中でバナナが好きな人が43人，イチゴが好きな人が39人，バナナとイチゴ両方が好きな人が32人いた。バナナとイチゴがいずれも好きでない人は何人か。

$\boxed{2}$ 命題「$x>2$ ならば，$x^2>4$ である」について，その逆，対偶を下の命題A，B，C，Dから選ぶと，逆は $^{ア}\boxed{}$，対偶は $^{イ}\boxed{}$ である。

A　$x\leqq 2$ ならば，$x^2\leqq 4$ である。　　B　$x^2\leqq 4$ ならば，$x\leqq 2$ である。

C　$x^2<4$ ならば，$x<2$ である。　　D　$x^2>4$ ならば，$x>2$ である。

また，命題A，B，C，Dのうち，真であるものは $^{ウ}\boxed{}$ で，他は偽である。

$\boxed{3}$ 2つの集合 $\mathrm{A}=\{2,\ 4,\ 3a^3-2a^2-a-9\}$，$\mathrm{B}=\{-4,\ a,\ a^2-2a+5,\ a^2+a+7\}$ の共通部分 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ が $\{2,\ 5\}$ であるとき，a の値を求めよ．ただし，a は実数とする．

$\boxed{4}$ x，y は実数とする．次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の(a)～(d)の中から選べ．

(1)　$x>y$ は，$x^2>y^2$ であるための $\boxed{}$.

(2)　$x^2>y^2$ は，$x^4>y^4$ であるための $\boxed{}$.

(3)　$x+y>2$ は，$x>1$ または $y>1$ であるための $\boxed{}$.

(4)　$x<1$ または $y<1$ は，$x^2+y^2<1$ であるための $\boxed{}$.

(a)　必要条件であるが，十分条件でない
(b)　十分条件であるが，必要条件でない
(c)　必要十分条件である
(d)　必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{5}$ 次の命題の否定を作れ。次に，その真偽を判定せよ。

(1)「すべての実数 x，y について $x^2+y^2>0$」

(2)「ある実数 x について $x^2-x+1>0$」

STANDARD問題

6 50人の受験者にA，B，Cの3問よりなる試験を行った結果，Aの正解者は31人，Bの正解者は26人，Cの正解者は25人，A，Bの正解者は16人，A，Cの正解者は12人，B，Cの正解者は15人，A，B，Cの正解者は5人であった。A，B，C3問とも間違えた者は $^{ア}\boxed{}$ 人で，Aのみの正解者は $^{イ}\boxed{}$ 人，A，Bが正解でCを間違えた者は $^{ウ}\boxed{}$ 人である。

7 $a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{2}{b}\right)\left(b+\dfrac{8}{a}\right)$ の最小値と，最小値をとるときの ab の値を求めよ。

実戦問題

8 a，b，c がすべて1より小さい正の数のとき，3つの不等式

$$a(1-b)>\frac{1}{4},\quad b(1-c)>\frac{1}{4},\quad c(1-a)>\frac{1}{4}$$

が同時には成り立たないことを示せ。

9 $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，x，y，z のうち少なくとも1つは1に等しいことを示せ。

10 関数 $f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)x+(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ を考える。ただし，n は正の整数で，a_1，a_2，……，a_n は実数である。

(1) すべての n に対し，常に $f(x)\geqq 0$ であることを示せ。

(2) $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2\leqq n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ であることを示せ。

(3) $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ であれば，a_1，a_2，……，a_n はすべて等しいことを示せ。

BASIC問題

1 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$k{}_n\mathrm{C}_k = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

2 次の式の展開式において，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1) $\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^5$　$[x]$　　(2) $\left(2x^2+\dfrac{3}{x}\right)^6$　$[x^3]$

3 $(a+b+c)^8$ の展開式における $a^3b^3c^2$ の項の係数を求めよ。

4 異なる n 個のものから r 個取る組合せの総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ とする。次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$

(2) ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_{n-1}+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$

STANDARD問題

5 $(x^2-x+2)^4$ の展開式において，次の項の係数を求めよ。

(1) x^7 の係数　　(2) x^5 の係数

6 n は自然数とする。次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

(2) ${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

7 二項定理を用いて，11^{25} の一の位の数と十の位の数をそれぞれ求めよ。

8 二項定理を用いて，13^{13} を 144 で割ったときの余りを求めよ。

9 $(x+2)^{20}$ を展開したときの x^r の係数を $f(r)$ とする。

(1) $0 \leqq r \leqq 19$ のとき，等式 $f(r+1)-f(r)=\dfrac{20!\cdot 2^{19-r}}{(20-r)!(r+1)!}g(r)$ を満たす $g(r)$ を求めよ。

(2) (1) を利用して $f(r)$ を最大にする r の値を求めよ。

実戦問題

10 n を 3 以上の自然数とする。

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1){}_n\mathrm{C}_k = n(n-1){}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1){}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

BASIC問題

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1)　$2\cos\theta \leqq -\sqrt{2}$　　(2)　$-\sqrt{2}\sin\theta + 1 \geqq 0$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta - 1 < 0$

3　α，β，γ は鋭角で，$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 5$，$\tan\gamma = 8$ であるとき，次の値を求めよ。

(1)　$\tan(\alpha+\beta+\gamma)$　　(2)　$\alpha+\beta+\gamma$

4　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

5　次の式の値を求めよ。

(1)　$\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{12}$　　(2)　$\sin\dfrac{5}{12}\pi - \cos\dfrac{5}{12}\pi$

6　$2\sin 4\theta\cos 2\theta$ を和の形，$\cos 5\theta + \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

Standard問題

7　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における 関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

また，最大値を与える x に対する $\tan x$ の値を求めよ。

8　関数 $y = \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 1$ の最大値，最小値を求めよ。

9　次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

10　$\theta = 18^\circ$ のとき，$\sin 2\theta = \cos 3\theta$ であることを示せ。また，これを利用して，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

11　次の値を求めよ。

(1)　$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$　　(2)　$\sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ$

実戦問題

12 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) > 1$　　(4) $\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq -\dfrac{1}{2}$

13 a を定数とする。x についての方程式 $\cos^2 x + 2a\sin x - a - 1 = 0$ の $0 \leqq x < 2\pi$ における異なる実数解の個数が2個となるための a の条件を求めよ。

14 地上にいる人が，高さ 200 m の高層ビルの屋上に立っている高さ 50 m の鉄塔を見る。鉄塔の上端を A，この人を B，鉄塔の下端を C とするとき，∠ABC が最大となるのはこの人がビルから何 m 離れたときか。ただし，この人の身長は無視することとし，また，ビルや鉄塔の水平方向の大きさも無視する。

15 以下の問いに答えよ。必要ならば，等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を利用してよい。

(1) $2\cos 80°$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(2) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80°)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α，β を求めよ。ただし $0° < \alpha < \beta < 180°$ とする。

16 次の関係式が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

BASIC問題

$\boxed{1}$ (1) $\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(2) $\dfrac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}$ を簡単にせよ。

$\boxed{2}$ 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$　　　(2) 2^{30}，3^{20}，10^{10}

$\boxed{3}$ $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ のとき，$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{2}\log_3 49+\log_3\frac{12}{7}-\log_3\frac{4}{9}$$

$\boxed{5}$ (1) $\log_5 2=a$ とおくとき，$\log_{25}64$ を a で表せ。

(2) $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_6 84$ を a，b で表せ。

$\boxed{6}$ 70 % の花粉を除去できるフィルターがある．99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには，このフィルターは最低何枚必要か．ただし $\log_{10}3=0.4771$ とする．

$\boxed{7}$

Standard問題篇

$\boxed{8}$ $5^x=7^y=35^4$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^x-24\cdot 2^{-x}=5$　　　(2) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+3}>\dfrac{2}{81}$

$\boxed{10}$ 次の不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$　　　(2) $2\log_3(x-4)-\log_3(x+6)\leqq 2$

(3) $2-\log_{\frac{1}{3}}x>(\log_3 x)^2$

$\boxed{11}$ ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となる。
$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，n の値を求めよ。また，2^n の末尾の数字を求めよ。

$\boxed{12}$ 0.15^{70} を小数で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) 小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(2) (1)において，その初めて現れる 0 でない数字を答えよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

実戦問題篇

13 連立方程式 $\begin{cases} 8\cdot 3^x - 3^y = -27 \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 \end{cases}$ を解け。

14 関数 $y=8(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})-10$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。また，y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

15 不等式 $\log_x(2x-y+1)>2$ が表す領域を図示せよ。ただし，$x>0$ かつ $x\neq 1$ とする。

BASIC問題

1　2 点 A (-3)，B(5) について，次のものを求めよ。

(1)　2 点 A，B 間の距離

(2)　線分 AB を 3：1 に内分，外分する点の座標

(3)　線分 AB の中点

2　次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(6,\ -1)$ を通り，直線 $2x-y+4=0$ に平行な直線，垂直な直線

(2)　点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $5x+2y-3=0$ に平行な直線，垂直な直線

(3)　点 $(1,\ -1)$ を通り，2 点 $(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$ を通る直線に平行な直線，垂直な直線

3　(1)　2 点 $(3,\ 4)$，$(5,\ -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(2)　3 点 $(3,\ 1)$，$(6,\ -8)$，$(-2,\ -4)$ を通る円の方程式を求めよ。

4　k を定数とする。点 $(2,\ 1)$ から直線 $kx+y+1=0$ へ下ろした垂線の長さが $\sqrt{3}$ となるように，k の値を定めよ。

STANDARD問題

5　直線 $3x-4y-1=0$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して点 A $(2,\ 5)$ と対称な点を B，点 A から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H とするとき，次のものを求めよ。

(1)　点 B の座標　　(2)　点 H の座標

6　3 直線 $x+3y-2=0$ …… ①，$x+y=0$ …… ②，$ax-2y+4=0$ …… ③ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

7　点 $(-1,\ 2)$ を通り，x 軸，y 軸に接するような円の方程式を求めよ。

8　円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ と直線 $ax+y+a=0$ が異なる 2 点 A，B で交わる。

(1)　$a=-1$ のとき，弦 AB の長さを求めよ。

(2)　弦 AB の長さが最大となるとき，定数 a の値を求めよ。

9　2 つの円 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ …… ①，$x^2+y^2-2x-2y=0$ …… ② について，次の問いに答えよ。

(1)　2 つの円 ①，② は異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　2 つの円 ①，② の 2 つの交点と点 $(4,\ 0)$ を通る円の方程式を求めよ。

実戦問題

10 座標平面上に2点A$(-2,\ 3)$，B$(0,\ 1)$と放物線 $y=x^2-8x+15$ がある。点Pが放物線上の $1 \leqq x \leqq 7$ の範囲を動くとき，△PABの面積が最小となるときの点Pの座標を求めよ。

11 点P$(7,\ 1)$から円 $x^2+y^2=25$ に引いた2本の接線の接点をA，Bとするとき，直線ABの方程式を求めよ。

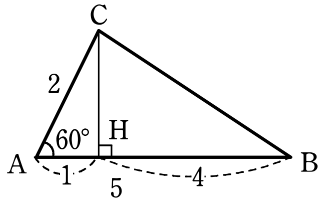
12 円 $x^2+y^2=4$　……①と円 $(x-5)^2+y^2=1$　……②の共通接線の方程式を求めよ。

BASIC問題

1 △ABCにおいて，辺BCを2：1に内分する点をD，外分する点をEとし，△ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{AE}$　(3) $\overrightarrow{AG}$　(4) $\overrightarrow{BD}$　(5) $\overrightarrow{GD}$

2 右の図は，AB＝5，AC＝2，∠BAC＝60° の △ABC の頂点Cから，底辺ABに垂線CHを下ろしたものである。次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CH}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$　(4) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

3 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，$\vec{x}=(p,\ q)$ とする。$\vec{x}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行で，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直であるとき，p，q の値を求めよ。

4 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3\sqrt{2}$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=3$ のとき，次のものを求めよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ

5 $\vec{a}=(9,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ -2)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。ただし，tは実数とする。

6 平行四辺形ABCDの辺ABを3：2に内分する点をE，辺ADを2：1に内分する点をF，線分BFと線分CEの交点をKとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{AK}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

STANDARD問題

7 三角形ABCの内心をIとし，辺BC，CA，ABの長さを，それぞれ a，b，c とする。$\overrightarrow{AI}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ となる実数 r，s を，a，b，c を用いて表せ。

8 三角形ABCの3辺の長さをAB＝4，BC＝3，CA＝2とする。この三角形の外心をOとおく。$\overrightarrow{CO}$を $\overrightarrow{CA}$と $\overrightarrow{CB}$ で表せ。

9 △ABCと点Pがあり，$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) △PAB，△PBC，△PCAの面積の比を求めよ。

(2) 直線AP上に点Qをとり，△QABと△QBCの面積比が3：1になるようにする。このとき，$\overrightarrow{QA}$，$\overrightarrow{QB}$，$\overrightarrow{QC}$ が満たす関係式を求めよ。

10 △OABにおいて，OA＝3，OB＝4，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=8$ とする。$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で，s，t が $3s+t\leqq 3$，$s+t\geqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たしながら動くとき，点Pが描く図形の面積を求めよ。

11 A$(-1,\ 5)$，B$(2,\ 4)$，$\vec{d}=(1,\ -2)$ とする。次の直線の媒介変数表示を，媒介変数を t として求めよ。また，t を消去した式で表せ。

(1)　A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線　　(2)　2 点 A，B を通る直線

12 次のような直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(1)　点 A$(5,\ 3)$ を通り，$\vec{n}=(1,\ -2)$ に垂直な直線

(2)　O は原点とする。点 A$(3,\ -1)$ を通り，OA に垂直な直線

13 平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P に対し，次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=4$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

実戦問題

14 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1：1 に内分する点を E，辺 BC を 2：1 に内分する点を F，辺 CD を 3：1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ。

15 △ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に引いた垂線の足をそれぞれ P，Q，R とする．$0<t<1$ の範囲で関係式 $(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-t(t+1)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2)　$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ．

16 平面上において同一直線上にない異なる 3 点 A, B, C があるとき，次の各問いに対して，それぞれの式を満たす点 P の集合を求めよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}\leqq\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

BASIC問題

1 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-4}\frac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12}$ を求めよ。

(2) $f(x)=x^4-2x^3+1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ を求めよ。

2 関数 $y=x^3+3x^2$ のグラフについて，傾きが 9 であるような接線の方程式を求めよ。

3 関数 $y=x^3+2$ のグラフに点 C(0，4) から引いた接線の方程式を求めよ。

4 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-3x^4+16x^3-18x^2$

(2) $y=x^4-6x^2-8x+10$

5 曲線 $y=3x^3-7x$ と直線 $y=2x-a$ の共有点の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

STANDARD問題

6 次の関数を，変数 t で微分せよ。ただし，t 以外の文字 V_0，β，h，v_0，g は定数である。

(1) $V=V_0(1+\beta t)$　　(2) $s=h+v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

7 曲線 $y=x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ $[t\fallingdotseq 0]$ における接線が x 軸，y 軸およびこの曲線と再び交わる点を，それぞれ Q，R，S とする。

(1) S の x 座標を t で表せ。　　(2) QR：RS を求めよ。

8 関数 $f(x)=x^3+ax^2+12x+3$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

9 2 つの曲線 $y=x^3+ax^2$ と $y=x^2+bx+c$ が点 (2，4) において，共通の接線をもつとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

10 2 つの放物線 C_1：$y=x^2+1$，C_2：$y=-2x^2+4x-3$ の共通接線の方程式を求めよ。

11 $x^2+2y^2=4$ のとき，$x(x+4y^2)$ の最大値，最小値を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-3x$ を C とする。曲線 C に点 A $(-2,\ k)$ から異なる 3 本の接線が引けるような定数 k の値の範囲を求めよ。

13 k を定数とする。3 次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ が異なる 3 つの実数解 α，β，γ (ただし $\alpha<\beta<\gamma$) をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) α，β，γ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $\alpha\gamma$ が最小となるときの k の値と，そのときの $\alpha\gamma$ の最小値を求めよ。

実戦問題

14 関数 $f(x)=x^3-3x^2+3ax+b$ (a，b は定数) について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が 32 となるとき，a の値を求めよ。

(3)　(2) で求めた a の値に対し，$f(x)$ の区間 $-4 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 5 であるとする。このとき，b の値とこの区間での $f(x)$ の最小値 m を求めよ。

15 a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

16 a は定数とする。関数 $f(x)=-x^3+3ax$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

BASIC問題

$\boxed{1}$ (1) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+5)dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-x)dx+\int_{-1}^{0}(2x-1)dx$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 等式 $f(x)=1+2\displaystyle\int_{0}^{1}(xt+1)f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 等式 $\displaystyle\int_{a}^{x}f(u)\,du=5x^2-ax-7a-2$ を満たす関数 $f(x)$ と正の定数 a の値を求めよ．

$\boxed{4}$ 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2+3x-4|\,dx$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 曲線 $y=(x+1)(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

STANDARD問題

$\boxed{6}$ xy 平面において，連立不等式 $y\geqq|x^2-1|$，$y\leqq-x^2+2x+3$ の表す領域を Dの面積を求めよ。

$\boxed{7}$ 2つの放物線 $y=-x^2+2x+3$ と $y=-x^2+6x-3$ に共通して接する直線の方程式を求めよ．また，この直線と2つの放物線とで囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{8}$ a，b，c を定数とする。2つの曲線 $y=x^3+ax+b$ と $y=ax^2+bx+c$ が共有点 $\mathrm{P}(2,\ 19)$ をもち，点Pにおいて共通の接線をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b，c の値を求めよ。

(2) 2つの曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{9}$ 放物線 $y=2+x-x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，点 $(2,\ 0)$ を通る直線 g で2等分するとき，g の傾きを求めよ。

実戦問題

10 次の関係式を満たす定数 a および関数 $g(x)$ を求めよ。

$$\int_a^x \{g(t)+tg(a)\}dt = x^2-2x-3$$

11 放物線 L：$y=x^2$ と点 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ を中心とする円 C が異なる 2 点で接している。ただし，L と C が点 P で接しているとは，L と C が点 P を共有し，さらに L と C が点 P において共通の接線をもつことを意味する。

(1)　2 つの接点の座標を求めよ。

(2)　円 C の方程式を求めよ。

(3)　2 つの接点を両端とする円 C の短い方の弧と L とで囲まれる図形の面積を求めよ。

12 曲線 $y=x^3-4x^2+4x$ と直線 $y=mx$ とで囲まれてできる 2 つの図形の面積を等しくするように，定数 m $(0<m<4)$ の値を定めよ。

13 関数 $f(x)$ は $\begin{cases} x \leqq 0 \text{ では } f(x)=x(x+1) \\ x \geqq 0 \text{ では } f(x)=x(1-x) \end{cases}$ で与えられるとする．

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフを描け．

(2)　積分 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ を求め，曲線 $y=F(x)$ をグラフに示せ．

BASIC問題

1 第 5 項が 10，第 10 項が 25 である等差数列 $\{a_n\}$ の，第 20 項から第 29 項までの和 S を求めよ。

2 ある等比数列の初項から第 n 項までの和が 54，初項から第 $2n$ 項までの和が 63 であるとき，この等比数列の初項から第 $3n$ 項までの和を求めよ.

3 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1\cdot3,\ 3\cdot5,\ 5\cdot7,\ \cdots\cdots,\ (2n-1)(2n+1)$

4 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\dfrac{1}{1\cdot5},\ \dfrac{1}{5\cdot9},\ \dfrac{1}{9\cdot13},\ \cdots\cdots$

5 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2+5n+1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

6 3 つの数 -5，a，b がこの順に等差数列をなし，a，b，45 がこの順に等比数列をなす。このとき，a，b の値を求めよ。

STANDARD問題

7 初項 70 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 10 項から第 20 項までの和が 0 であるとする。このとき，初項から第何項までの和が最大となるか。また，その最大値を求めよ。

8 数列 1，11，111，1111，…… の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

9 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1)　$1,\ 1+3,\ 1+3+9,\ 1+3+9+27,\ \cdots\cdots$

(2)　$1^2,\ 1^2+2^2,\ 1^2+2^2+3^2,\ 1^2+2^2+3^2+4^2,\ \cdots\cdots$

10 次の和 S を求めよ。

(1)　$S=1+4x+7x^2+10x^3+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$

(2)　$S=2^{n-1}+2\cdot2^{n-2}+3\cdot2^{n-3}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot2+n$

実戦問題

11 p は素数，m，n は正の整数で $m<n$ とする。m と n の間にあって，p を分母とする既約分数の総和を求めよ。

12 2 以上の整数 n に対し，

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$ を求めよ。

13 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{76}\frac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}}$ を求めよ。

BASIC問題

1 $a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-2$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

2 $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n+2n$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$一般項を求めよ。

4 $a_1=10$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n-2a_n$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

STANDARD問題

6 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=16{a_n}^5$$

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$

(2) $a_1=3$，$a_2=8$，$a_{n+2}-8a_{n+1}+16a_n=0$

8 $a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+3b_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

9 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

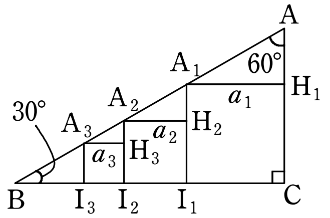
10 漸化式 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-4}{a_n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を，$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ のおき換えを利用して求めよ。

実戦問題

11 $a_1=\dfrac{2}{3}$，$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

12 ＊　$a_1=1$，$a_{n+1}=1+a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

13 $A=60°$，$B=30°$，AC$=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように，1 辺の長さが a_1，a_2，a_3，$\cdots$ の正方形が並んでいる。

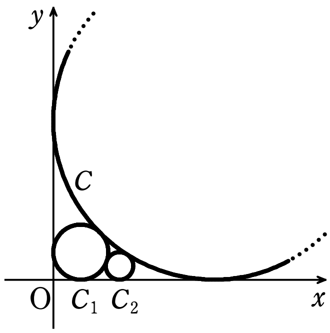


(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　右の図の $\triangle \mathrm{A_1A_2H_2}$ と $\triangle$ABC が相似であることに着目して，一般に a_n，a_{n+1} の間に成り立つ関係式を導け。

(3)　a_n の値を n を用いて表せ。

14 右図のように，xy 平面上の点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。x 軸，y 軸の正の部分，円 C と接する円で C より小さいものを C_1 とする。更に，x 軸の正の部分，円 C，円 C_1 と接する円を C_2 とする。以下，順に x 軸の正の部分，円 C，円 C_n と接する円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とする。ただし，円 C_{n+1} は円 C_n の右側にあるとする。



(1)　a_1，b_1 をそれぞれ求めよ。

(2)　a_n，a_{n+1} の関係式を求めよ。

(3)　$c_n=\dfrac{1}{1-a_n}$ とおくことにより，数列 $\{a_n\}$ の一般項を n の式で表せ。

BASIC問題

$\boxed{1}$ 1辺の長さが1の正四面体OABCを考える．
OA，OBの中点をそれぞれP，QとしOCを $m:n$ に内分する点をRとする．また，△PQRの重心をGとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，m，n を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の長さ $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ を求めよ.

$\boxed{2}$ $\vec{a}=(3,\ 0,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ -1)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

$\boxed{3}$ 原点Oから，2点A$(5,\ -2,\ -3)$，B$(8,\ 0,\ -4)$ を通る直線に垂線OHを下ろす。このとき，点Hの座標と線分OHの長さを求めよ。

$\boxed{4}$ 点A$(3,\ 1,\ 2)$，B$(1,\ 2,\ 1)$ と xy 平面上に動点Pがある。

(1) AP＋PBの最小値を求めよ。

(2) AP＋PBが最小となるときの点Pの座標を求めよ。

$\boxed{5}$ 四面体ABCDがある．点Pが $10\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たしているとき

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ.

(2) 四面体ABCDと四面体PBCDの体積の比を求めよ.

$\boxed{6}$ 平行六面体OADB−CEGFにおいて，辺DGのGを越える延長上にGM＝2DGとなる点Mをとり，直線OMと平面ABCの交点をNとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 線分比ON：OMを求めよ。

$\boxed{7}$ 3点A$(3,\ 6,\ 0)$，B$(1,\ 4,\ 0)$，C$(0,\ 5,\ 4)$ がある。

(1) △ABCの面積を求めよ。

(2) 点P$(3,\ 4,\ 5)$ から平面ABCに垂線PHを下ろす。このとき，線分PHの長さを求めよ。

(3) 四面体PABCの体積を求めよ。

実戦問題

$\boxed{8}$ xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に $x^2+y^2=25$ により定まる円 C があり，平面 $z=4$ の上に $x=1$ により定まる y 軸に平行な直線 ℓ がある。C 上の点 P で，ℓ 上の点との距離の最小値が 5 であるような P の座標をすべて求めよ。

$\boxed{9}$ 点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り $\overrightarrow{d_1}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線 ℓ_1 と，点 $(-1,\ 1,\ -2)$ を通り $\overrightarrow{d_2}=(0,\ -2,\ 1)$ に平行な直線 ℓ_2 がある。 ℓ_1，ℓ_2 上にそれぞれ点 P，Q をとるとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{10}$ 四面体 OABC において，OA＝OB＝OC＝1 とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　CH の長さを求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{11}$ すべての辺の長さが 1 の四角錐がある。この四角錐の頂点を O，底面を正方形 ABCD とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ をそれぞれ求めよ。

(3)　点 P，O，B，C が正四面体の頂点となるようなすべての点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

BASIC問題

1 2点A(2, 5), B(3, 1)からの距離の比が1：2である点Pの軌跡を求めよ。

2 連立不等式 $\begin{cases}(x-3)^2+y^2>25\\4x-3y>12\end{cases}$ の表す領域を図示せよ。

3 x, yが3つの不等式 $x-3y \geqq -6$, $x+2y \geqq 4$, $3x+y \leqq 12$ を同時に満たすとき，$2x+y$の最大値，最小値を求めよ。

STANDARD問題

4 放物線 $y=3x^2+12ax+4a^2-6a$ について，次の問いに答えよ。

(1) 頂点Pの座標を(x, y)とするとき，x, yをそれぞれaで表せ。

(2) aがすべての実数値をとって変化するとき，点Pの軌跡を求めよ。

5 2点A(3, 0), B(0, −3)と放物線 $y=x^2$ 上の動点Qとでできる△ABQの重心Gの軌跡を求めよ。

6 mの値が変化するとき，次の2直線の交点Pの軌跡を求めよ。

$$mx-y+5m=0,\quad x+my-5=0$$

7 放物線 $y=(x-3)^2$ と直線 $y=mx$ が異なる2点A，Bで交わっている。mの値が変化するとき，線分ABの中点Pの軌跡を求めよ。

8 2直線 $x-2y-2=0$, $4x-2y+1=0$ のなす角の二等分線の方程式を求めよ。ただし，2直線のなす角の二等分線は，2直線から等距離にある点の軌跡であるものとする。

9 方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの異なる解が $-1<x<2$ の範囲にある。a, bの満たす関係式を求めよ。また，点(a, b)の存在する範囲を図示せよ。

実戦問題

10 点 $(x,\ y)$ が，不等式 $(x-3)^2+(y-1)^2 \leqq 1$ の表す領域上を動くとき，次の式の最大値，最小値を求めよ。

(1) $\dfrac{y}{x}$

(2) x^2+y^2

11 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ が $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ を満たして動くとき，点 $\mathrm{Q}(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)$ の動く範囲を図示せよ．

12 a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 $y=2ax-a^2+1$ ……① が通りうる点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。

13 次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} x^2+y^2-1 \leqq 0 \\ x+2y-2 \leqq 0 \end{cases}$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最小値を a を用いて表せ。

(3) a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が D を動くとき，$ax+y$ の最大値を a を用いて表せ。

STANDARD問題

1 数列 1，2，3，……，n において，異なる 2 つの項の積の和 を求めよ。($n \geqq 2$)

2 年始めに 10 万円ずつ毎年積み立てることにした．年利率 8 % の複利計算の場合，元利合計が 240 万円を初めて超えるのは何年後か．$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として計算せよ．

3 分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列において，$\dfrac{7}{15}$ は第何項か。また，第 99 項を求めよ。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \cdots\cdots$$

4 放物線 $y=-x^2+8x$ と直線 $y=x$ で囲まれる領域内 (境界を含む) にある格子点の個数を求めよ。

5 $a_n=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ とする。

(1)　$n=1$，2，3，4 に対して，a_n を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

6 袋の中に 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書いてある 7 個の球がある。この袋から 1 個の球を無作為に取り出し，その数を記録してもとの袋に戻す。これを n 回繰り返したとき，記録した n 個の数の和が偶数である確率を p_n とする。ただし，$n=1$ のとき，p_1 は取り出した 1 個の球に書かれている数が偶数である確率とみなす。

(1)　p_{n+1} を p_n で表せ。　　(2)　p_n を求めよ。

実戦問題

7 数列 1，2，3，……，n において，互いに隣り合わない 2 つの項の積の和を求めよ。($n \geqq 3$)

8 次のような分数の列がある。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

(1)　$\dfrac{5}{9}$ は第何項か。　　(2)　第 800 項を求めよ。

9 自然数を右の図のように並べる。

(1)　n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(2)　n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(3)　1000 は左から何番目，上から何段目にあるか。

1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

10 (1)　$3x+2y \leqq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

11 3 文字 a，b，c を横に n 個書き並べたものを長さ n の単語と呼ぶことにする。ただし，$n=1$，2，3，…… とする。例えば，$abba$，$baca$，$caab$ はどれも長さ 4 の異なる単語である。

(1)　長さ 1，2 および 3 の単語を，それぞれ列挙せよ。

(2)　長さ n の単語のうち，a を奇数個含むものの数を x_n で，残りのものの数を y_n で表す。このとき，x_n，y_n を求めよ。

実戦問題（記述式）

12 x の関数 $f_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の式で定める.

$$\begin{cases} f_0(x)=1,\ f_1(x)=x \\ f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\ (n \geqq 2) \end{cases}$$

このとき，$f_n(2\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表されることを示せ．ただし，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ とする．

13 整数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の式によって定義する.

$$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\ \ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　数学的帰納法を用いて $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ であることを示せ.

(2)　a_n，b_n を順次計算して，$a_n+b_n\sqrt{2}>1000$ となる最小の n を求めよ.

(3)　$b_n\sqrt{2}$ の小数部分が 0.001 以下となる最小の n とそのときの b_n の値を求めよ.

14 $a_1=1$，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots\cdots+a_na_1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを証明せよ。

BASIC問題

1 (1) $\dfrac{2i}{3+i}-\dfrac{2-i}{1-3i}$ を計算せよ。

(2) 等式 $(1+3i)(a-bi)=-2i$ を満たす実数 a，b の値を求めよ。

2 方程式 $2x^3-9x^2+6x-1=0$ の解を $x_1, x_2, x_3\ (x_1<x_2<x_3)$ とするとき， x_1, x_2, x_3 を求めよ。

3 方程式 $x^3=1$ の虚数解の１つを ω とするとき，$(1+\omega^2)^3(2+\omega)+(1+\omega)^3(2+\omega^2)$ の値を求めよ。

4 多項式 $P(x)$ を $x-1$，$x-2$ で割った余りがそれぞれ５，７である。$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りを求めよ。

STANDARD問題

5 $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ を簡単にせよ。

6 方程式 $x^3-2x^2+ax+b=0$ が $2+i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。また，他の解を求めよ。

7 複素数 x が $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$ を満たすとする。もとの方程式の解を複素数の範囲ですべて求めよ。

8 整式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ を $x(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ.

9 整式 $f(x)$ を $x+5$ で割ると余りが -11，$(x+2)^2$ で割ると余りが $x+3$ となる。このとき，$f(x)$ を $(x+5)(x+2)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

実戦問題

10 x の２次方程式 $x^2-(k-2)x+2k=0$ の解が次のようであるとき，定数 k の値を求めよ。

(1) ２つの解の差が１

(2) ２つの実数解の絶対値の和が $2\sqrt{2}$

11 $x^2-x+1=0$ の１つの解を ω とするとき，$\omega^{12}+6\omega^{10}+15\omega^8+20\omega^6+15\omega^4+6\omega^2+1$ の値を求めよ.

12 x についての多項式 $P(x)$ を x^2+x+1 で割った余りが $x+1$，x^2-x+1 で割った余りが $x-1$ のとき，$P(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ で割った余りを求めよ。

13 $f(x)=x^2-\dfrac{4}{5}$ とおく。

(1) ２次方程式 $f(x)=x$ の２つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき，$f(f(\alpha))$，$f(f(\beta))$ の値を求めよ。

(2) 方程式 $f(f(x))=x$ を解け。

14 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ のとき，x^4-10x^2，$x^{10}-10x^8+x^6+x^4+2x^2$ の値を求めよ。

BASIC問題

1 A $(3-4i)$，B $(-2+3i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 2：3 に内分する点 C　　(2) 線分 AB の中点 M

(3) 線分 AB を 5：4 に外分する点 D

2 α，β は複素数で $|\alpha-\beta|=|1-\alpha\overline{\beta}|$ のとき，$|\beta|$ の値を求めよ。ただし，$|\alpha|\fallingdotseq 1$ とする。

3 2 つの複素数 $\alpha=-2-2\sqrt{3}\,i$，$\beta=-1+i$ について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

4 $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ を計算せよ。

5 $\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする。複素数平面上で，点 α を点 β を中心として時計回りに $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

STANDARD問題

6 方程式 $z^4=-8+8\sqrt{3}\,i$ を解け。

7 複素数平面上の 3 点 A$(1+3i)$，B$(-2+5i)$，C$(2-2i)$ を頂点とする △ABC について，∠BAC の大きさを求めよ。

8 $\alpha=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^9+\alpha^8+\cdots\cdots+\alpha+1$　　(2) $\alpha^9\alpha^8\cdots\cdots\alpha$

9 複素数平面上の点 z が条件 $2|z-i|=|z+2i|$ を満たすとき，点 z の全体は円を描く．その円の中心 α と半径 r を求めよ．

10 異なる 3 つの複素数 α，β，γ の間に等式 $\gamma+\sqrt{3}\,i\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)\beta$ が成り立つ。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式で表せ。

(2) 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を頂点とする △ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。

11 点 O を原点とする複素数平面上で，2 つの複素数 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$，$\beta=\alpha^3$ を表す点をそれぞれ A，B とする。

(1) ∠AOB を求めよ。

(2) 3 つの線分の比 OA：OB：AB を求めよ。

(3) 3 点 O，A，B を通る円の方程式を複素数 z を用いて表せ。

12 2つの複素数 w，z が $w=\dfrac{2z-i}{z+i}$ を満たす。複素数平面上で，点 z が原点を中心とする半径2の円上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 w はどのような図形を描くか。　(2)　w の絶対値 $|w|$ の最大値を求めよ。

実戦問題

13 α，β は複素数とする。$|\alpha|=|\beta|=2$，$\alpha+\beta+2=0$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\alpha\beta$　(2)　$\alpha^2+\beta^2$

14 $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta$，$z^6+\dfrac{1}{z^6}=1$ のとき，θ の値を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

15 z は $|z-\sqrt{3}-i|\leqq 1$ を満たす複素数で，$w=itz$（t は実数）とする。
t が $0<t\leqq 1$ を満たす値をとって変わるとき

(1)　点 w の存在範囲を図示せよ。

(2)　w の偏角 θ のとりうる値の範囲を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

BASIC問題

1 次の関数のグラフをかけ。また，(2) はその値域を求めよ。

(1) $y=\dfrac{3x+1}{2x-4}$　　(2) $y=\dfrac{x-2}{2x+1}$ $(-1 \leqq x < 0)$

2 次の関数のグラフをかけ。また，その値域を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x+4}-1$　　(2) $y=-\sqrt{1-2x}+2$

3 関数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+a}$ について，$f^{-1}(x)=f(x)$ が成り立つように，定数 a の値を定めよ。

4 $f(x)=2x-1$，$g(x)=ax+b$ について，$(g \circ f)(x)=8x-3$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ。

5 関数 $f(x)=ax+b$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，$f^{-1}(1)=2$，$f^{-1}(5)=4$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

STANDARD問題

6 関数 $y=\log_4 x$ ……① のグラフを $^{ア}\boxed{}$ 軸方向に $^{イ}\boxed{}$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=\log_4 16x$ である。また，関数 ① のグラフを x 軸方向に $^{ウ}\boxed{}$，y 軸方向に $^{エ}\boxed{}$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=\log_4 \dfrac{x+2}{64}$ である。

関数 $y=2^x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称な位置に移動したグラフの方程式は $y=$ $^{オ}\boxed{}$ ……② である。② のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したグラフが 2 点 $(0,\ -1)$，$(4,\ 0)$ を通るとき，$a=$ $^{カ}\boxed{}$，$b=$ $^{キ}\boxed{}$ である。

7 $y=\dfrac{1}{8}\cdot 2^x$ は，$y=2^x$ を x 軸の正の方向に $^{ア}\boxed{}$ だけ平行移動したグラフであり，更に，$x=2$ を軸に線対称に移すと，$y=$ $^{イ}\boxed{}$ となる.

8 関数 $y=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ の周期は，$\boxed{ア}\pi$ である。

また，この関数のグラフは，$y=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$，$y$ 軸方向に $\boxed{エ}$ だけ平行移動したものである。

9 関数 $y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ の逆関数を求めよ。

10 ＊　関数 $f(x)=\dfrac{2x+a}{x+1}$，$g(x)=\dfrac{3x+b}{x+c}$ を考える。

合成関数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ が $(f\circ g)(x)=\dfrac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

11 不等式 $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}}\geqq x^2$ を解け.

12 不等式 $\sqrt{4x-x^2}>3-x$ を解け。

実戦問題

13 関数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}$ の周期のうち，正で最小のものを求めよ。

14 関数 $f(x)=\log_2(x+3)$ に対し，その逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。また，$g(x)=\sqrt{x+1}$ のとき，不等式 $g^{-1}(x)\geqq g(x)$ を満たす x の範囲を求めよ。

BASIC問題

1 次の循環小数の積を１つの既約分数で表せ．　$0.\dot{1}\dot{2}\times 0.\dot{2}\dot{7}$

2 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$

3 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}$

4 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}$ の和を求めよ。

STANDARD問題

5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$ を求めよ。

6 関数 $\displaystyle y=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ のグラフをかけ。

7 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。　$(3-x)+x(3-x)+x^2(3-x)+\cdots\cdots$

8 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\left(\frac{3}{2}-5\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{3}{16}-\frac{5}{27}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\displaystyle\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{7}{16}+\cdots\cdots$

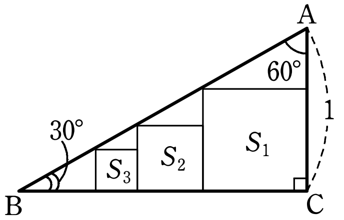
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

実戦問題

9 数列 $\displaystyle\left\{\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$ の極限を求めよ。

10 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ の和を求めよ。

11 $A=60°$，$B=30°$，AC$=1$ である直角三角形 ABC 内に，右の図のように正方形 S_1，S_2，S_3，…… が限りなく並んでいるとき，これらの正方形の面積の総和を求めよ。



12 $\angle \mathrm{A}=2\theta$ の二等辺三角形 ABC の内接円 O_1 の半径を r とする。等辺 AB，AC と円 O_1 に接する円を O_2 とし，AB，AC と円 O_2 に接する円を O_3 とし，このように，次々に円 O_1，O_2，O_3，O_4，…… が並んでいる。このとき，すべての円の面積の和 S を求めよ。

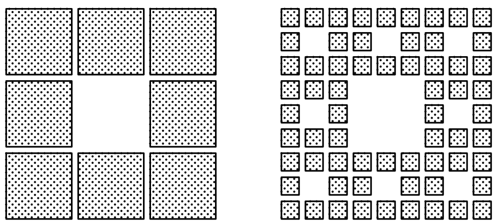
13 二項定理を用いて，数列 $\left\{\dfrac{3^n}{n}\right\}$ の極限を求めよ。

14 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) $|a_{n+1}-3| \leqq \dfrac{2}{3}|a_n-3|$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

15 図のように正方形を 9 等分して，中央の正方形を取り除いた図形を S_1 とする．残された 8 個の正方形を 9 等分し，それぞれの中央の正方形を取り除いた図形を S_2 とする．このような操作を n 回繰り返して構成される図形を S_n とする．



各々の図形における最小の正方形をセルと呼び，S_n のセルの総数を a_n とし，さらに S_n における隣接したセルが共有する辺の総数を b_n とする．例えば，$a_1=8$，$b_1=8$ である．次の問いに答えよ．

(1) a_n を求めよ．

(2) b_2 および b_3 を求めよ．

(3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4) b_n を求めよ．

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ．

BASIC問題

$\boxed{1}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

$\boxed{3}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}+x)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2-x}}$

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

$\boxed{5}$ $x\leqq0$ のとき　$f(x)=1$，　$0<x<\pi$ のとき　$f(x)=\dfrac{ax^2}{1-\cos x}$，　$x\geqq\pi$ のとき　$f(x)=b$

である関数 $f(x)$ が，すべての区間で連続になるように，定数 a，b の値を定めよ。

STANDARD問題

$\boxed{6}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

$\boxed{7}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

$\boxed{8}$ 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-3-0}\frac{x+3}{|2x+6|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{|x^2-4|}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-2}{x^2-x}$

$\boxed{9}$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{ax\sin x+b}{\cos x-1}=1$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{10}$ 次の極限を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

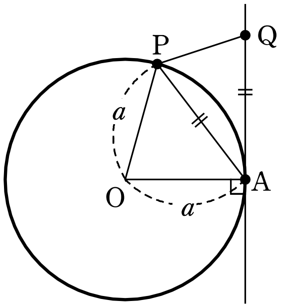
(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{|x|}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}([2x]-[x])$

11 次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

実戦問題

12 半径 a の円 O の周上に動点 P と定点 A がある。A における接線上に AQ＝AP であるような点 Q をOA に関して P と同じ側にとる。P が A に限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\overset{\frown}{\mathrm{AP}}^{2}}$ の極限値を求めよ。



13 次の極限値を計算して，n の単項式で表せ。

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots\cdots+\sin(2n-1)x}{x-\pi}$$

14 次の 2 つの条件をともに満たす多項式で表された関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$$

15 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a\cos^2 x+(3b+2)\sin x-2a+b+1}{\sin^3 x+a\cos^2 x-a}=c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ.

BASIC問題

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，次の極限値を a，$f(a)$，$f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x\cos 2x$　　(2) $y=\sin 3x\cos x$

$\boxed{3}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{3+\sin x}$　　(2) $y=\dfrac{x^2}{\cos x}$

$\boxed{4}$ 次の関数を微分せよ。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

(1) $y=\tan 3x$　　(2) $y=\sin x^3$　　(3) $y=\cos^3 x$

(4) $y=\log(\sin x)$　　(5) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$　　(6) $y=e^{-2x}\cos 2x$

(7) $y=a^{-x^2}$

$\boxed{5}$ 媒介変数で表された次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=\dfrac{e^{3t}}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$　　(2) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$

$\boxed{6}$ 関数 $y=x^{2x}\ (x>0)$ を微分せよ。

$\boxed{7}$ 次の x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x，y で表せ。

(1) $x^2-xy-y^2=1$　　(2) $x^3-xy^2+y^3=1$

STANDARD問題

8　関数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1 & (x\leqq 2\text{ のとき})\\ x^2+ax+b & (2<x\text{ のとき})\end{cases}$ が $x=2$ で微分可能となるような定数 a，b の値を求めよ。

9　＊　関数 $y=\dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+4}+4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\right\}$ を微分せよ。

10　＊　曲線 $2x^2-2xy+y^2=5$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

11　$f(x)=\cos x$ $(\pi<x<2\pi)$ の逆関数を $g(x)$ とする。このとき，$g(x)$ の導関数を求めよ。

12　関数 $x=3\cos t$，$y=2\sin t$ について，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ。

13　2曲線 $y=ax^3$ と $y=3\log x$ が共有点をもち，その点における2曲線の接線が一致しているとき，定数 a の値を求めよ。また，その共有点における接線の方程式を求めよ。

14　2つの曲線 $y=e^x$，$y=-e^{-x}$ に共通な接線の方程式を求めよ。

実戦問題

15　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$ を求めよ。

16　関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。$f(1)=2$，$f'(1)=2$，$f''(1)=3$ のとき，

(1)　$g'(2)$ の値を求めよ。　(2)　$g''(2)$ の値を求めよ。

17　a，b は定数で $a\fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+bx+a-b}{x^{2n}+(1-a)x^n+a}$ が $x>0$ で微分可能である条件を求めよ。

BASIC+STANDARD問題

1 次の関数の増減，グラフの凹凸を調べてグラフの概形をかけ。

$$y=3x^4-16x^3+18x^2+8$$

2 関数 $f(x)=x-2\sqrt{x}$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

3 $0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，関数 $y=x-\sqrt{2}\sin x$ の増減，グラフの凹凸を調べてグラフの概形をかけ。

4 関数 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ のグラフをかけ。

5 関数 $y=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ のグラフの概形をかけ。

6 次の関数のグラフの概形をかけ。 $y=x-1+\sqrt{1-x^2}$

7 関数 $y=x\sqrt{8-x^2}$ のグラフの概形をかけ。

8 関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ のグラフの概形を描け．

9 関数 $f(x)=(x-1)^2e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$ を用いよ。

実戦問題

10 関数 $f(x)=\log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^2}-\log x$ $(0<x<1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上を動く点を P とする。点 Q は，曲線 $y=f(x)$ の P における接線上にあり，P との距離が 1 で，その x 座標が P の x 座標より小さいものとする。Q の軌跡を求めよ。

BASIC＋STANDARD問題

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{6}{t^4}dt$　(2) $\displaystyle\int \frac{2-y}{y^2}dy$　(3) $\displaystyle\int \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (2x+3)^3 dx$　(2) $\displaystyle\int (2-5x)^4 dx$　(3) $\displaystyle\int \left(\cos 2x+\sin\frac{x}{3}\right)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx$　(5) $\displaystyle\int e^{-3x}dx$　(6) $\displaystyle\int e^{\frac{x}{2}}dx$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (1-\tan x)\cos x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x+\cos x)^2 dx$

5 不定積分$\displaystyle\int \sin 3x\cos x\,dx$を求めよ。

6 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{6}{x(x+3)}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx$

7 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$　(2) $\displaystyle\int (x+1)(2x^2+4x-1)^2 dx$　(3) $\displaystyle\int \cos^3 x\sin x\,dx$

8 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$　(2) $\displaystyle\int (x+1)e^x dx$

(3) $\displaystyle\int \log(2x+1)\,dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\log x\,dx$

9 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$　(2) $\displaystyle\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx$

10 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

11 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{9+x^2}$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

12 ＊　定積分 $\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ．

実戦問題

13 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\int x^2 \sin x\,dx$

14 次の定積分を求めよ。

$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$

15 不定積分 $\int \frac{x+3}{x(x-1)^2}dx$ を求めよ。

16 $t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換して，$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ を 求めよ。

17 $x \geqq 0$ で定義された関数 $y=e^x+e^{-x}$ の逆関数を $y=f(x)$ とするとき，$\int_2^4 f(x)\,dx$ を求めよ。

BASIC問題

1 関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+2}$ が $x=1$ で極大値 1 をとるように，定数 a，b の値を定めよ。
また，このとき，関数 $f(x)$ の極小値を求めよ。

2 関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2-1}$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

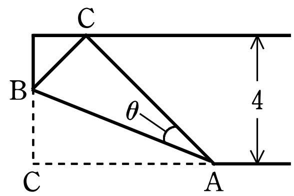
STANDARD問題

3 次の極限値を求めよ。ただし，定理を用いた場合はその名称を明記すること。

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$$

4 点 $(a,\ 0)$ から，関数 $f(x)=(1-x)e^x$ のグラフに引いた接線の本数を求めよ。

5 右の図のように幅 4 のテープを端点 C が辺上にくるように折るとき，△ABC の面積が最小になるような θ とそのときの面積を求めよ。



6 $a>0$，$b>0$ とする。定点 A $(a,\ b)$ を通り，傾き m $(m<0)$ の直線が，x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ P，Q とする。原点を O とするとき，△OPQ の面積 S の最小値を求めよ。

実戦問題

7 a を定数とし，$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+a}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の変曲点の個数を a の値によって調べよ。

(2) $a=-1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ の漸近線の方程式を求めよ。

8 (1) x を正の数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2) $\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。

9 一直線をなす海岸の地点 A から海岸線に垂直に 9 km 離れた沖の舟に人がいる。この人が，A から海岸に沿って 15 km 離れた地点 B に最短時間で到着するためには，AB 間の A から何 km 離れた地点に上陸すればよいか。ただし，舟の速さを 4 km/時，人の歩く速さを 5 km/時 とする。

制限時間なし

BASIC問題

$\boxed{1}$ 2つの曲線 $y=x^2$ と $y=2\log x+a$ が接するとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 a の値を求めよ。

(2) これらの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ xy 平面上の曲線 C：$y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。C 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ として，x 軸上に点 $\mathrm{Q}(x,\ 0)$ をとり，線分 PQ を1辺とする正方形 L を xy 平面に垂直に立てる。ただし，P と Q が一致するときは，L は1点であるとする。点 P が曲線 C 上を動くとき，L が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の曲線または直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1) $y=x^2-2$，$y=2x^2-3$　　(2) $y=\sqrt[3]{x}$，$y=x$　$(x\geqq 0)$

$\boxed{4}$ 曲線 $y=\log(x+1)$ と y 軸および直線 $y=2$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

STANDARD問題

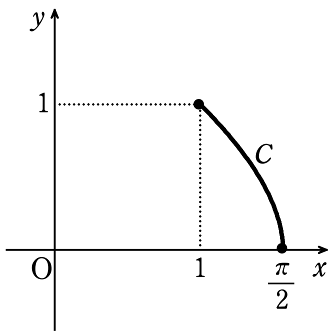
$\boxed{5}$ 曲線 C は媒介変数 θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて

$$x=\cos\theta+\theta\sin\theta,\quad y=\cos\theta$$

と表されており，右の図のような形をしている。

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ を用いて表せ。

(2) 曲線 C と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。



$\boxed{6}$ 放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=3x$ とで囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

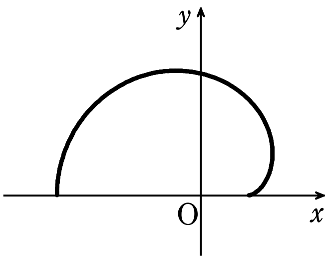
$\boxed{7}$ 曲線 $y=2\sin x$ $\left(\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi\right)$ と直線 $y=1$ で囲まれた部分が，$y=1$ の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{8}$ (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$ を求めよ。

(2) 不等式 $x^2+y^2+\log(1+z^2)\leqq\log 2$ の定める立体の体積を求めよ。

実戦問題

9 媒介変数 t によって，$x=2\cos t-\cos 2t$，
$y=2\sin t-\sin 2t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と表される右図の曲線と，
x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



10 底面の半径 1，高さ 1 の直円柱を，底面の直径を含み底面と $30°$ の角をなす平面で切断するとき，底面とこの平面で挟まれた部分の体積を求めよ。

11 空間における点 $\mathrm{A}(4,\ -2,\ -3)$，点 $\mathrm{B}(-1,\ 3,\ 2)$ を通る直線 ℓ を，z 軸の周りに 1 回転してできる曲面を S とする。

(1) 平面 $z=t$ と直線 ℓ の交点 P の x 座標，y 座標を t で表せ。

(2) 平面 $z=2$，平面 $z=-3$，曲面 S で囲まれた立体の体積 V を求めよ。

BASIC問題

1 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x+\int_0^1 f(t)e^t dt$$

2 次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

$$\int_\pi^x f(t)dt=a\sin^2 x+\frac{a}{2}x^2-1$$

3 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}$$

4 原点から出発して数直線上を動く点Ｐの t 秒後の座標が t^3-5t^2+4t で表される。

(1)　Ｐが原点に戻ったときの速度をすべて求めよ。

(2)　Ｐが運動の向きを初めて変えるのは何秒後か。

STANDARD問題

5 座標平面上を運動する点Ｐの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，$x=-6t^2+10$，$y=2t^3-5$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までにＰが通過する道のり s を求めよ。

6 自然数 n について，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とする。

(1)　I_1，I_2 を求めよ。

(2)　I_{n+2} を n と I_n を用いて表せ。

(3)　I_6 を求めよ。

実戦問題

7 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の $a\leqq x\leqq a+1$ の部分の長さを $L(a)$ とするとき，$L(a)$ の最小値を求めよ。

8 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=10$ で囲まれる部分を，y 軸の周りに１回転させてできる容器に毎秒 v の水を入れる。

(1)　水の深さが h のときの，水の体積を求めよ。

(2)　水の深さが h のときの，水面の上昇速度を求めよ。

9 中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を，xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点Ｐが原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1)　円が角 t だけ回転したとき，点Ｐの座標を求めよ。

(2)　(1) において，t が 0 から 2π まで動いて円が１回転したときの点Ｐの描く曲線を C とする。曲線 C の長さを求めよ。

数学③　第１１回試練二次曲線

公式確認問題（省略可）

1 次の楕円の焦点の座標，長軸と短軸の長さ，焦点からの距離の和を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　　(2) $4x^2+y^2=4$

2 次の双曲線の焦点と頂点の座標，漸近線の方程式，焦点からの距離の差を求め，曲線をかけ。

(1) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$　　(2) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$

3 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1) $y^2=-8x$　　(2) $x^2=2y$

4 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$　$(-2\sqrt{5},\ 1)$　　(2) $y^2=4x$　$(1,\ -2)$

BASIC問題

5 次の方程式は放物線，楕円，双曲線のいずれを表すか。また，その焦点の座標を求めよ。

(1) $x-y^2+4y-3=0$　　(2) $4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$

(3) $2x^2-9y^2+32x+36y+74=0$

6 双曲線 $4x^2-y^2-16x+2y-1=0$ の漸近線の方程式を求めよ。

7 次の曲線の方程式を求めよ。

(1) 焦点が A$(2,\ 2)$，準線が $x=-2$ である放物線

(2) 焦点 A$(8,\ -1)$，B$(0,\ -1)$ からの距離の和が 10 である楕円

(3) 焦点 A$(6,\ 1)$，B$(-4,\ 1)$ からの距離の差が 8 である双曲線

STANDARD問題

8 曲線 $x^2-4y^2=4$ に，点$(-2,\ 3)$から引いた接線の方程式を求めよ。

9 直線 $y=2x+k$ が楕円 $x^2+4y^2=4$ と異なる 2 点 P，Q で交わるとする。

(1) 定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1) の範囲で k を動かしたとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

10 楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点を F(4，0)，F′(−4，0) とし，第 1 象限にある楕円上の点を P とする。また，O を原点として OP＝a とおく。

(1) PF＋PF′ の値を求めよ。

(2) $\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF'}^2$ および積 PF・PF′ を a を用いて表せ。

(3) $\angle \mathrm{F'PF}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，a の値を求めよ。

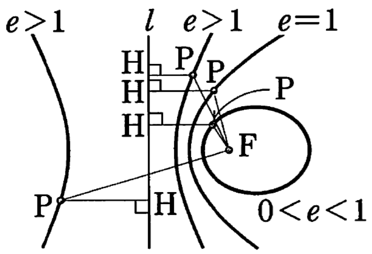
11 楕円 $x^2+4y^2=4$ 上の点 P と直線 $x+2y=3$ 上の点 Q について，2 点 P，Q 間の距離の最小値を求めよ。

実戦問題

12 楕円 $4x^2+y^2=4$ の外部にある点 P$(a,\ b)$ からこの楕円に引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

13 座標平面上に，原点 O を中心とする半径 $2a$ の円 C と，定点 F$(-2b,\ 0)$ $(0<b<a)$ をとる。C 上の点を Q とし，線分 FQ の垂直二等分線と線分 OQ との交点を P とする。点 Q が C 上を動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。

14 双曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ の 2 つの焦点のうち $x>0$ である点を F，F に対する準線の方程式を $x=k$ $(k>0)$ とする。k の値と，曲線の離心率 e の値を求めよ。ただし，**離心率**に関しては次の解説を参考にしてよい。



PF：PH＝e：1

一般に，点 P から定点 F への距離 PF と，定直線 l への距離の比の値 $e=\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ が一定であるとき，e の値をこの曲線の**離心率**といい，直線 l を焦点 F に対する**準線**という。

(1) $0<e<1$ のとき，F を焦点の 1 つとする楕円

(2) $e=1$ のとき，Fを焦点，を準線とする放物線

(3) $e>1$ のとき，Fを焦点の 1 つとする双曲線

となることが知られている。

確認問題（省略可）

1 (1) 次の極座標の点 A，B の直交座標を求めよ。A$\left(4,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$，B$\left(3,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) 次の直交座標の点 C，D の極座標 $(r,\ \theta)$ $[0 \leqq \theta < 2\pi]$ を求めよ。

$$\mathrm{C}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{D}\,(-2,\ -2\sqrt{3})$$

2 次の曲線を極方程式で表せ。

(1) $x^2+y^2+2x=0$　　(2) $x^2-y^2=2$

3 次の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ。

(1) $r\cos\theta=1$　　(2) $r=2\sin\theta$

(3) $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=2$　　(4) $r^2\sin 2\theta=2$

BASIC問題

4 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{6t}{1+t^2} \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\cos 2\theta \end{cases}$

5 x，y が $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を満たす実数のとき，$x^2+6\sqrt{2}\,xy-6y^2$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

6 ＊ 放物線 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ と楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の共通接線の方程式を求めよ.

実戦問題

7 O を極とする極座標に関して，3 点 A$\left(6,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，B$\left(4,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$，C$\left(2,\ -\dfrac{3}{4}\pi\right)$が与えられているとき，次のものを求めよ。

(1) 線分 AB の長さ　　(2) △OAB の面積　　(3) △ABC の面積

8 ＊ $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ のとき，極方程式 $r=2(\cos\theta+\sin\theta)$ の表す曲線を図示し，その長さを求めよ。

9 点 $(0,\ 1)$ を通る傾き t の直線 ℓ が，2 直線 $y=2x-1$，$y=-2x-1$ と交わる点を，それぞれ A，B とし，線分 AB の中点を P とする。

(1) P の座標を媒介変数 t で表せ。

(2) t の値が変化するとき，P はどのような曲線を描くか。