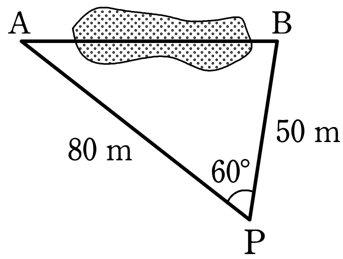
週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**解答解説**

1 右の図のように，池をはさんで 2 地点 A，B がある。地点 P から A と B を見て ∠APB を測ると 60° で，また A，P 間の距離は 80 m，B，P 間の距離は 50 m であった。A，B 間の距離を求めてください。



解答　70 m

△ABP において，余弦定理により

$$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cos 60^\circ=80^2+50^2-2\cdot 80\cdot 50\cdot\frac{1}{2}=4900$$

AB＞0 であるから　　AB＝70　　よって，A，B 間の距離は　　70 m

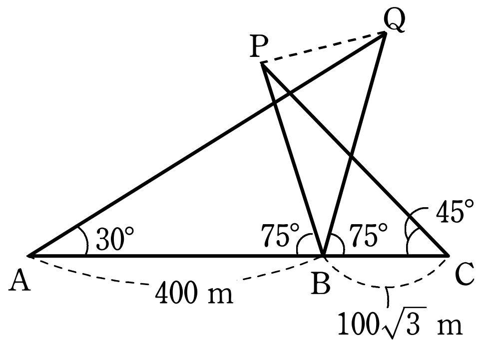
2 次のような △ABC において，指定されたものを求めてください。
$a=10$，$A=30^\circ$，$B=135^\circ$ のときの　bの値

解答　$10\sqrt{2}$

正弦定理により，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから　$\dfrac{10}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 135^\circ}$

したがって　　$b=10\cdot\sin 135^\circ\cdot\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=10\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=10\sqrt{2}$

3 2 地点 P，Q 間の距離を求めるために，1 つの直線上にある 3 地点 A，B，C をとったら，AB＝400 m，BC＝$100\sqrt{3}$ m，∠QAB＝30°，∠PBA＝∠QBC＝75°，∠PCB＝45° であった。P，Q 間の距離を求めてください。



解答　$100\sqrt{2}$ m

∠BPC＝75°－45°＝30°

△PBC に正弦定理を使うと　　$\dfrac{BP}{\sin 45^\circ}=\dfrac{100\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$

よって　　$BP=100\sqrt{3}\cdot\sin 45^\circ\cdot\dfrac{1}{\sin 30^\circ}=100\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{1}=100\sqrt{6}$

また　　∠AQB＝75°－30°＝45°

△QAB に正弦定理を使うと　　$\dfrac{BQ}{\sin 30^\circ}=\dfrac{400}{\sin 45^\circ}$

よって　　$BQ=400\cdot\sin 30^\circ\cdot\dfrac{1}{\sin 45^\circ}=400\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1}=200\sqrt{2}$

ここで　　∠PBQ＝180°－(75°＋75°)＝30°

△PBQ に余弦定理を使うと

$$PQ^2=(100\sqrt{6})^2+(200\sqrt{2})^2-2\cdot 100\sqrt{6}\cdot 200\sqrt{2}\cos 30^\circ$$

$$=100^2\cdot 6+200^2\cdot 2-200^2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=6\cdot 100^2-200^2=60000-40000=20000$$

$PQ>0$ であるから

$$PQ=\sqrt{20000}=100\sqrt{2}\ \text{(m)}$$

4 $90^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めてください。

解答　$\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$90^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta\leqq 0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

5 放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動した曲線で，2 点 $(-1,\ 6)$，$(2,\ 3)$ を通る放物線の方程式を求めてください。

解答　$y=2x^2-3x+1$

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+x-1$ を平行移動した曲線であるから，その方程式は $y=2x^2+bx+c$ と表される。

これが 2 点 $(-1,\ 6)$，$(2,\ 3)$ を通るから

$$6=2-b+c,\quad 3=8+2b+c$$

これを解くと　$b=-3$，$c=1$

よって　$y=2x^2-3x+1$

6 次の条件を満たすように，定数 c の値を定めてください。

関数 $y=-x^2+2x+c\ (0\leqq x\leqq 3)$ の最小値が -5 である。

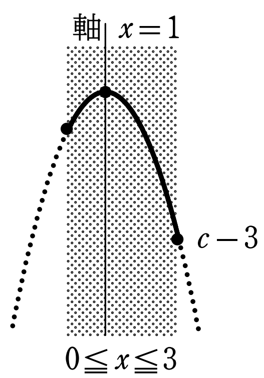
解答　$c=1$

$y=-x^2+2x+c$ を変形すると $y=-(x-1)^2+c+1$

$0\leqq x\leqq 3$ であるから，$x=3$ で最小値をとる。

$x=3$ のとき　$y=-3^2+2\cdot 3+c=c-3$

$c-3=-5$ より　$c=-2$



7 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めてください。

$$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$$

解答　$x=1$ で最小値 -4，最大値はない

$x^2-2x=t$ とおくと

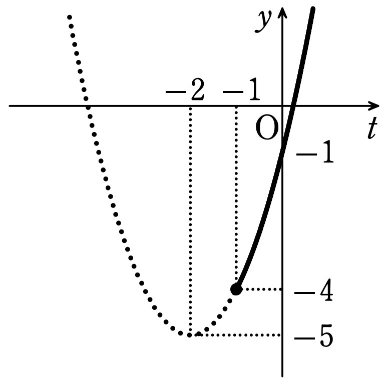
$$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

よって　$t \geqq -1$

また　$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$

$$=t^2+4t-1=(t+2)^2-5$$

$t \geqq -1$ でのグラフは［図］の実線部分のようになる。



よって，y は $t=-1$ で最小値 -4 をとる。

$t=-1$ のとき　$x^2-2x=-1$

すなわち　$x^2-2x+1=0$

左辺を因数分解して　$(x-1)^2=0$

よって　$x=1$

したがって，y は

$x=1$ で最小値 -4 をとる。最大値はない。

8 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y=4$ のとき，x^2+y^2 の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めてください。

解答　$0 \leqq x \leqq 4$；

$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16；

$x=y=2$ で最小値 8

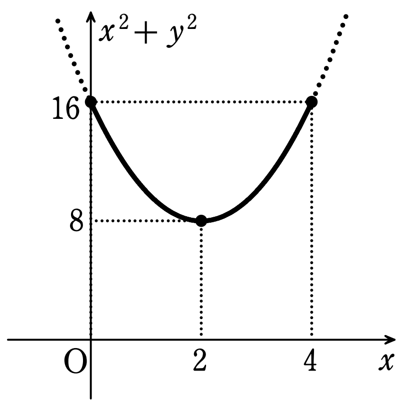
$x+y=4$ から　$y=4-x$　……①

$y \geqq 0$ から　$4-x \geqq 0$　よって　$x \leqq 4$

$x \geqq 0$ と合わせて　$0 \leqq x \leqq 4$　……②

また　$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2=2x^2-8x+16$

$$=2(x-2)^2+8$$



よって，② の範囲の x について x^2+y^2 は

$x=0$ または $x=4$ で最大値 16,

$x=2$ で最小値 8

をとる。

ここで，① から

$x=0$ のとき $y=4$，　$x=4$ のとき $y=0$，　$x=2$ のとき $y=2$

以上から，x^2+y^2 は

$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16,

$x=y=2$ で最小値 8

をとる。

9 【記述式】不等式 $k(x^2+x+1)>x+1$ がすべての実数 x について成り立つような実数 k の値の範囲を求めてください。

解答　【記述略】$k>1$

$f(x)=kx^2+(k-1)x+k-1$ とする。

[1]　$k>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線であるから，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，すべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つための条件は　$D<0$

ここで　$D=(k-1)^2-4k(k-1)=-3k^2+2k+1=-(3k+1)(k-1)$

$D<0$ から　$(3k+1)(k-1)>0$

よって　$k<-\dfrac{1}{3}$，$1<k$

$k>0$ との共通範囲をとると　$k>1$

[2]　$k=0$ のとき　$f(x)=-x-1$

このとき，すべての実数 x に対して $f(x)>0$ は成り立たない。

[3]　$k<0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは，上に凸の放物線であるから，すべての実数 x に対して $f(x)>0$ は成り立たない。

[1]～[3] から，求める k の値の範囲は　$k>1$

10 2 次方程式 $x^2+2mx+2m+3=0$ が，異なる 2 つの負の実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めてください。

解答　$m>3$

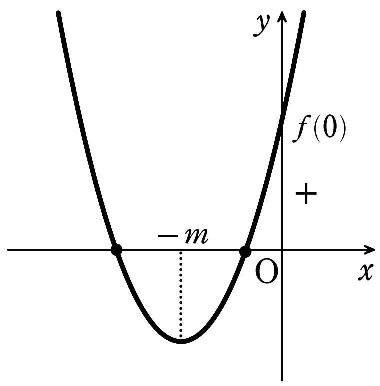
$f(x)=x^2+2mx+2m+3$ とする。

これを変形すると　$f(x)=(x+m)^2-m^2+2m+3$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-m$ である。

また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=(2m)^2-4(2m+3)=4(m^2-2m-3)$$
$$=4(m+1)(m-3)$$



$y=f(x)$ のグラフと x 軸の負の部分が，異なる 2 点で交わることと同じである。

したがって，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立てばよい。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

$D>0$ から　$(m+1)(m-3)>0$

これを解くと

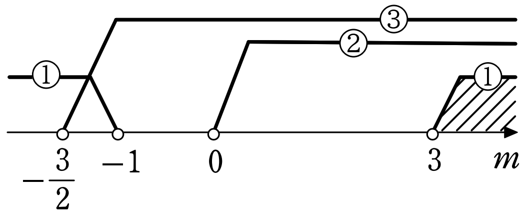
$m<-1,\ 3<m$　……①

[2]　軸 $x=-m$ について　$-m<0$

すなわち　$m>0$　……②

[3]　$f(0)>0$　すなわち　$2m+3>0$

よって　$m>-\dfrac{3}{2}$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて　$m>3$

11　2 次方程式 $x^2-ax+1=0$ の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるように，定数 a の値の範囲を定めてください。

解答　$\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{10}{3}$

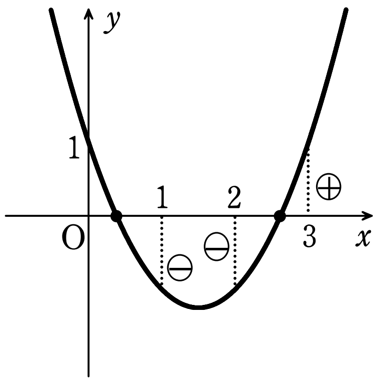
$f(x)=x^2-ax+1$ とする。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$f(0)=1>0$ である。

よって，2 次方程式 $f(x)=0$ の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるのは

$f(1)<0$ かつ $f(2)<0$ かつ $f(3)>0$

のときである。



$f(1)<0$ から　$2-a<0$

よって　$a>2$　……①

$f(2)<0$ から　$5-2a<0$

よって　$a>\dfrac{5}{2}$　……②

$f(3)>0$ から　$10-3a>0$

よって　$a<\dfrac{10}{3}$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{10}{3}$

12　次の方程式の実数解の個数が 4 個であるような，定数 k の値の範囲を求めてください。

$$|x^2-x-2|-x+k=0$$

解答　$-2<k<-1$ のとき 4 個

$|x^2-x-2|-x+k=0$ から　$-|x^2-x-2|+x=k$

よって，この方程式の実数解の個数は

$$y=-|x^2-x-2|+x \quad \cdots\cdots ①$$

のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に等しい。

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ であるから

$x^2-x-2\geqq 0$ の解は　$x\leqq -1,\ 2\leqq x$

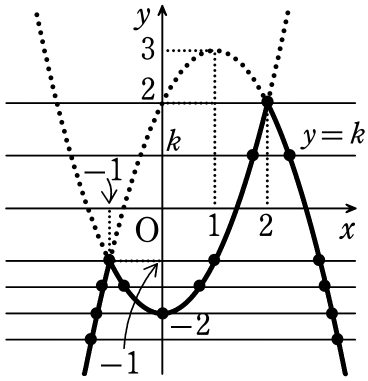
$x^2-x-2<0$ の解は　$-1<x<2$

① は　$x\leqq -1,\ 2\leqq x$ のとき　$y=-(x^2-x-2)+x=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$

$-1<x<2$ 　のとき　 $y=-\{-(x^2-x-2)\}+x=x^2-2$

したがって，① のグラフは右の図のようになる。

求める実数解の個数は，① のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数を調べて



$k>2$ のとき　0 個

$k=2$ のとき　1 個

$-1<k<2$ のとき　2 個

$k=-1$ のとき　3 個

$-2<k<-1$ のとき　4 個

$k=-2$ のとき　3 個

$k<-2$ のとき　2 個

13 **【記述式】**a は定数とする。関数 $y=-x^2+2ax-4a+1$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値を求めてください。

解答　【記述略】$a<-1$ のとき $x=-1$ で最大値 $-6a$；

$-1\leqq a\leqq 2$ のとき $x=a$ で最大値 a^2-4a+1；

$2<a$ のとき $x=2$ で最大値 -3

$y=-x^2+2ax-4a+1$ を変形すると　 $y=-(x-a)^2+a^2-4a+1$

この放物線の軸は直線 $x=a$，頂点は点 $(a,\ a^2-4a+1)$ である。

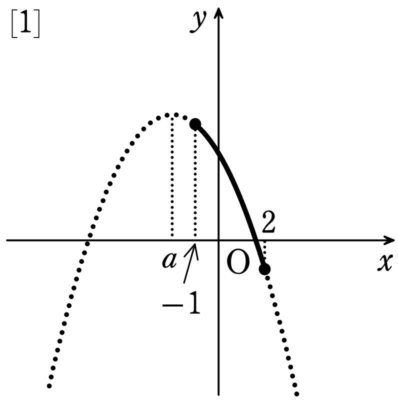
また　 $x=-1$ のとき　 $y=-6a$，

$x=2$ 　のとき　 $y=-3$

[1]　$a<-1$ のとき

$-1\leqq x\leqq 2$ でのグラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=-1$ で最大値 $-6a$ をとる。



[2]　$-1\leqq a\leqq 2$ のとき

$-1\leqq x\leqq 2$ でのグラフは [図] の実線部分のようになる。

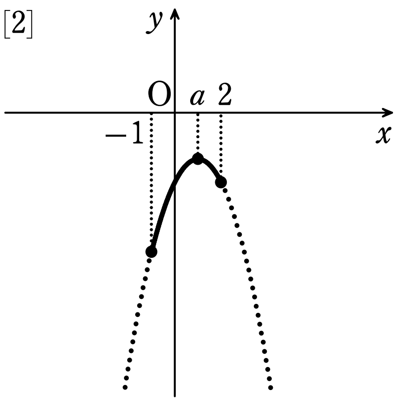
よって，$x=a$ で最大値 a^2-4a+1 をとる。

[3]　$2<a$ のとき

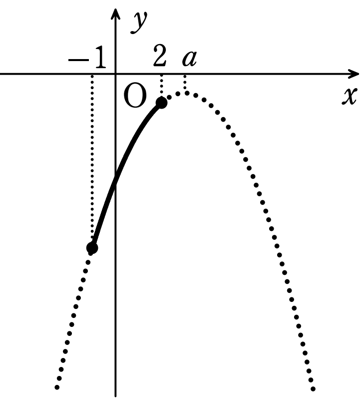
$-1\leqq x\leqq 2$ でのグラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最大値 -3 をとる。

[2]



[3]



以上から　　$a<-1$ のとき　　　$x=-1$ で最大値 $-6a$

$-1\leqq a\leqq 2$ のとき　　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1

$2<a$ のとき　　　$x=2$ で最大値 -3

14 $a★b=(a-b)^2$ と定義するとき，式 $2x★3-x★4=0$ を満たす x の値を求めてください．

解答　$x=-1,\ \dfrac{7}{3}$

$2x★3-x★4=(2x-3)^2-(x-4)^2=(x+1)(3x-7)$　よって　$(x+1)(3x-7)=0$

ゆえに　$x=-1,\ \dfrac{7}{3}$

15 方程式 $x^2(x+1)^2(x+2)^2=4\times9\times16$ を解を求めてください．

解答　$x=2,\ -4,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{23}\,i}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{23}\,i}{2}$

$\{x(x+1)(x+2)\}^2=(2\times3\times4)^2$　　これを解くと　$x(x+1)(x+2)=\pm(2\times3\times4)$

$x(x+1)(x+2)=2\times3\times4$ の 1 つの解は $x=2$ である．

よって，$x^3+3x^2+2x-24=0$ から

$(x-2)(x^2+5x+12)=0$　　ゆえに　$x=2,\ \dfrac{-5\pm\sqrt{23}\,i}{2}$

$x(x+1)(x+2)=-(2\times3\times4)$ の 1 つの解は $x=-4$ である．

よって，$x^3+3x^2+2x+24=0$ から

$(x+4)(x^2-x+6)=0$　　ゆえに　$x=-4,\ \dfrac{1\pm\sqrt{23}\,i}{2}$

以上から　$x=2,\ -4,\ \dfrac{1\pm\sqrt{23}\,i}{2},\ \dfrac{-5\pm\sqrt{23}\,i}{2}$

16 空欄にあてはまるものを下の選択欄から選んでください.

(1) A, B を 2 つの集合とする．$a \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ であることは，$a \in \mathrm{A}$ となるための $\boxed{}$

(2) $p>0$ とする．$\sqrt{p}$ が無理数であることは，p が素数(ただし 1 は素数ではない)であるための $\boxed{}$

① 必要条件であるが十分条件でない.　② 十分条件であるが必要条件でない.
③ 必要十分条件である.　④ 必要条件でも十分条件でもない.

解答 (1) ①　(2) ①

(1) $a \in \mathrm{A} \Longrightarrow a \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$　よって ①

(2) $a \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \Longrightarrow a \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$　よって ②

(3) $b<0 \Longrightarrow$ 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつ　よって ②

(4) $ad-bc \fallingdotseq 0 \Longleftrightarrow ax+by=0$ と $cx+dy=0$ とが相異なる 2 直線を表す. ③

(5) 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が相異なる 2 つの実数解をもつ $\Longrightarrow$ すべての解が実数 ②

(6) p が素数 $\Longrightarrow \sqrt{p}$ が無理数 ①

17 **【おみやげ問題・記述式＝テストの点数には影響しません】**

次の問いに答えよ。ただし，実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとする。

(1) k は整数とする。$\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

解答 (1) $2k \leqq x < 2k+2$　(2) $3 \leqq x < 4$
(3) $-4 \leqq x < -3$，$-2 \leqq x < 2$，$3 \leqq x < 4$

(1) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ のとき　$k \leqq \dfrac{x}{2} < k+1$

よって　$2k \leqq x < 2k+2$

(2) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=1$ かつ $\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ を満たす実数 x の範囲を求める。

$\left[\dfrac{x}{2}\right]=1$ のとき，$1 \leqq \dfrac{x}{2} < 2$ より　$2 \leqq x < 4$ …… ①

$\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ のとき，$1 \leqq \dfrac{x}{3} < 2$ より　$3 \leqq x < 6$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて　$3 \leqq x < 4$

(3) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=k$ (k は整数)とおく。

$\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ より　$2k \leqq x < 2k+2$　…… ③

$\left[\dfrac{x}{3}\right]=k$ より　$3k \leqq x < 3k+3$　…… ④

[1]　$k \geqq 0$ のとき

$2k \leqq 3k$ であるから，③ かつ ④ を満たす実数 x が存在するための条件は

$$3k < 2k+2$$

よって　$k < 2$

これと $k \geqq 0$ より　$0 \leqq k < 2$

k は整数であるから　$k=0,\ 1$

(i)　$k=0$ のとき

③，④ から　$0 \leqq x < 2$　かつ　$0 \leqq x < 3$

よって　$0 \leqq x < 2$

(ii)　$k=1$ のとき

③，④ から　$2 \leqq x < 4$　かつ　$3 \leqq x < 6$

よって　$3 \leqq x < 4$

[2]　$k < 0$ のとき

$2k > 3k$ であるから，③ かつ ④ を満たす実数 x が存在するための条件は

$$2k < 3k+3$$

よって　$k > -3$

これと $k < 0$ より　$-3 < k < 0$

k は整数であるから　$k=-2,\ -1$

(i)　$k=-2$ のとき

③，④ から　$-4 \leqq x < -2$　かつ　$-6 \leqq x < -3$

よって　$-4 \leqq x < -3$

(ii)　$k=-1$ のとき

③，④ から　$-2 \leqq x < 0$　かつ　$-3 \leqq x < 0$

よって　$-2 \leqq x < 0$

[1]，[2] から，求める x の範囲は　$-4 \leqq x < -3,\ -2 \leqq x < 2,\ 3 \leqq x < 4$