

## 第 24 章 複素数平面

### A 24 - 1

I 次の複素数の絶対値，共役複素数を求めよ。

(1)  $-4 + 3i$

(2)  $-7i$

II 次の複素数を  $a + bi$  の形で表し，その絶対値を求めよ。

(3)  $(3 - i)(1 - 2i)$

(4)  $\frac{3 + 4i}{4 + 3i}$

**解答** (1) 5 (2) 7 (3)  $5\sqrt{2}$  (4) 1

(1)  $|-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

(2)  $|-7i| = \sqrt{0^2 + (-7)^2} = 7$

(3)  $(3 - i)(1 - 2i) = 3 - 6i - i + 2i^2 = 1 - 7i$

よって  $|(3 - i)(1 - 2i)| = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = 5\sqrt{2}$

(4)  $\frac{3 + 4i}{4 + 3i} = \frac{(3 + 4i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{12 - 9i + 16i - 12i^2}{4^2 - 9i^2} = \frac{24}{25} + \frac{7}{25}i$

よって  $\left| \frac{3 + 4i}{4 + 3i} \right| = \sqrt{\left(\frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{625}}{25} = \frac{25}{25} = 1$

**参考**  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  が成り立つ。

(3)  $|(3 - i)(1 - 2i)| = |3 - i| |1 - 2i| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{2}$

(4)  $\left| \frac{3 + 4i}{4 + 3i} \right| = \frac{|3 + 4i|}{|4 + 3i|} = \frac{5}{5} = 1$

### A 24 - 2

複素数  $\alpha, \beta$  において  $|\alpha| = 1$  とする。

このとき， $|1 - \overline{\alpha}\beta|^2 - |\overline{\alpha} - \overline{\beta}|^2$  の値を求めよ。

**解答** (1) 0 (2) 略

(1)  $|\alpha|^2 = 1$  であるから

$|1 - \overline{\alpha}\beta|^2 - |\overline{\alpha} - \overline{\beta}|^2$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \overline{\alpha}\beta)(\overline{1 - \alpha\beta}) - (\overline{\alpha} - \overline{\beta})(\overline{\alpha - \beta}) \\
&= (1 - \overline{\alpha}\beta)(1 - \alpha\overline{\beta}) - (\overline{\alpha} - \overline{\beta})(\alpha - \beta) \\
&= 1 - \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta + |\alpha|^2|\beta|^2 - (|\alpha|^2 - \overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} + |\beta|^2) \\
&= 1 + |\beta|^2 - 1 - |\beta|^2 = 0
\end{aligned}$$

(2)  $z + \frac{1}{z}$  が実数のとき  $\overline{z + \frac{1}{z}} = z + \frac{1}{z}$

すなわち  $\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z}$  が成り立つ。

ゆえに  $(\overline{z} - z)\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0$

よって  $\overline{z} = z$  または  $1 - \frac{1}{|z|^2} = 0$

したがって、 $z$  は実数であるか  $|z| = 1$  である。

### A 24 - 3

$A(-1+4i)$ ,  $B(5-2i)$  とする。次の点を表す複素数を求めよ。

- (1) 線分 AB を 1 : 2 に内分する点 C
- (2) 線分 AB の中点 M
- (3) 線分 AB を 3 : 2 に外分する点 D

**解答** (1)  $1+2i$  (2)  $2+i$  (3)  $17-14i$

(1) 点 C を表す複素数は  $\frac{2(-1+4i) + 1(5-2i)}{1+2} = \frac{3+6i}{3} = 1+2i$

(2) 点 M を表す複素数は  $\frac{(-1+4i) + (5-2i)}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

(3) 点 D を表す複素数は  $\frac{-2(-1+4i) + 3(5-2i)}{3-2} = 17-14i$

### A 24 - 4

次の複素数を極形式で表せ。偏角  $\theta$  の範囲は、 $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。

- (1)  $1 + \sqrt{3}i$  (2)  $1 + i$  (3)  $-1$  (4)  $i$
- (5)  $-\sqrt{3} + i$  (6)  $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$  (7)  $-2\sqrt{3} - 2i$  (8)  $-\sqrt{5}i$

**解答** (1)  $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$  (2)  $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$$(3) \cos \pi + i \sin \pi \quad (4) \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \quad (5) 2 \left( \cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right)$$

$$(6) 2 \left( \cos \frac{7}{4} \pi + i \sin \frac{7}{4} \pi \right) \quad (7) 4 \left( \cos \frac{7}{6} \pi + i \sin \frac{7}{6} \pi \right)$$

$$(8) \sqrt{5} \left( \cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi \right)$$

各複素数の絶対値を  $r$ , 偏角を  $\theta$  とする。

$$(1) r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{よって } 1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(2) r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{よって } 1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(3) r = 1$$

$$\cos \theta = -1, \sin \theta = 0 \text{ より } \theta = \pi$$

$$\text{よって } -1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$(4) r = 1$$

$$\cos \theta = 0, \sin \theta = 1 \text{ より } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{よって } i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$(5) r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ より } \theta = \frac{5}{6} \pi$$

$$\text{よって } -\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right)$$

$$(6) r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ より } \theta = \frac{7}{4} \pi$$

$$\text{よって } \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2 \left( \cos \frac{7}{4} \pi + i \sin \frac{7}{4} \pi \right)$$

$$(7) \quad r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \theta = \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{よって} \quad -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos \frac{7}{6}\pi + i\sin \frac{7}{6}\pi\right)$$

$$(8) \quad r = \sqrt{5}$$

$$\cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1 \quad \text{より} \quad \theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{よって} \quad -\sqrt{5}i = \sqrt{5}\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i\sin \frac{3}{2}\pi\right)$$

### A 24 - 5

複素数  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  について,  $z_1 z_2$ ,  $\frac{z_1}{z_2}$  を, それぞれ極形式で表せ。

偏角  $\theta$  の範囲は  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。

**解答**  $z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5}{12}\pi + i\sin \frac{5}{12}\pi\right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{13}{12}\pi + i\sin \frac{13}{12}\pi\right)$

$z_1, z_2$  をそれぞれ極形式で表すと

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i\sin \frac{7}{4}\pi\right)$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2}{3}\pi + i\sin \frac{2}{3}\pi$$

よって

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} \cdot 1 \left\{ \cos\left(\frac{7}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \right\}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{29}{12}\pi + i\sin \frac{29}{12}\pi\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{5}{12}\pi + i\sin \frac{5}{12}\pi\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \left\{ \cos\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \right\}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos \frac{13}{12}\pi + i\sin \frac{13}{12}\pi\right)$$

### A 24 - 6

次の複素数の値を求めよ。

$$(1) \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6$$

$$(2) \left\{ 2 \left( \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right) \right\}^5$$

**解答** (1) 1 (2)  $32i$

$$(1) \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$(2) \left\{ 2 \left( \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \right) \right\}^5 = 2^5 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32i$$

## A 24 - 7

複素数平面上で、次の方程式を満たす点  $z$  全体はどのような図形を表すか。

$$(1) |z - 1 - i| = \sqrt{2}$$

$$(2) |z - 2i| = |z - 4|$$

**解答** (1) 点  $1+i$  を中心とする半径  $\sqrt{2}$  の円

(2) 2点  $2i$ ,  $4$  を結ぶ線分の垂直二等分線

(1)  $|z - (1+i)| = \sqrt{2}$  より、点  $z$  と定点  $1+i$  の距離が一定値  $\sqrt{2}$  に等しいから、方程式を満たす点  $z$  全体は点  $1+i$  を中心とする半径  $\sqrt{2}$  の円を表す。

(2)  $B(2i)$ ,  $C(4)$ ,  $P(z)$  とすると、点  $P$  は 2 定点  $B$ ,  $C$  から等距離にある。よって、方程式を満たす点  $z$  全体は 2 点  $2i$ ,  $4$  を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。

## B 24 - 1

$a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  は実数とする。

複素数  $\alpha$  が、方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  の解であるとき、 $\overline{\alpha}$  も同じ方程式の解であることを証明せよ。

**解答** 略

$\alpha$  は方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  の解であるから

$$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$$

両辺の共役複素数は等しくなるから

$$\overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \overline{0}$$

$$\text{よって } \overline{a} \overline{\alpha^3} + \overline{b} \overline{\alpha^2} + \overline{c} \overline{\alpha} + \overline{d} = \overline{0}$$

$$a(\overline{\alpha})^3 + b(\overline{\alpha})^2 + c\overline{\alpha} + d = 0$$

したがって、 $\overline{\alpha}$  は方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  の解である。

## B 24 - 2

次の複素数の値を求めよ。

(1)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^4$

(2)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8$

(3)  $(1-i)^5$

(4)  $(1+\sqrt{3}i)^{-3}$

**解答** (1)  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  (2) 1 (3)  $-4+4i$  (4)  $-\frac{1}{8}$

(1)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  を極形式で表すと、 $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$  となるから

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^4 &= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4 \\ &= \cos\frac{4}{6}\pi + i\sin\frac{4}{6}\pi \\ &= \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

(2)  $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$  を極形式で表すと、 $\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi$  となるから

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8 &= \left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)^8 \\ &= \cos 6\pi + i\sin 6\pi \\ &= \cos 0 + i\sin 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

(3)  $1-i$  を極形式で表すと、 $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$  となるから

$$\begin{aligned}(1-i)^5 &= (\sqrt{2})^5 \left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)^5 \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos\frac{35}{4}\pi + i\sin\frac{35}{4}\pi\right) \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\
 &= -4 + 4i
 \end{aligned}$$

(4)  $1 + \sqrt{3}i$  を極形式で表すと,  $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right)$  となるから

$$\begin{aligned}
 (1 + \sqrt{3}i)^{-3} &= 2^{-3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right)^{-3} \\
 &= \frac{1}{8}\{\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\} \\
 &= \frac{1}{8}(-1 + 0i) \\
 &= -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

### B 24 - 3

方程式  $z^4 = -2(1 + \sqrt{3}i)$  を解け。

**解答**  $z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2}, \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{2}, \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}i}{2}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2}$

$z$  の極形式を  $z = r(\cos \theta + i\sin \theta)$  …… ① とすると

$$z^4 = r^4(\cos \theta + i\sin \theta)^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

$-2(1 + \sqrt{3}i)$  を極形式で表すと  $4\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i\sin \frac{4}{3}\pi\right)$

よって  $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 4\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i\sin \frac{4}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 4, \quad 4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r$  は正の実数であるから  $r = \sqrt{2}$  …… ②

また  $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で考えると,  $k = 0, 1, 2, 3$  であるから

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \dots\dots ③$$

②, ③ を ① に代入すると, 求める解は

$$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2}$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right) = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{2}$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi \right) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}i}{2}$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{11}{6} \pi + i \sin \frac{11}{6} \pi \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i}{2}$$

**B 24 - 4**

次の方程式を満たす点  $z$  全体は、どのような図形か。

(1)  $z + \bar{z} = 2$

(2)  $z - \bar{z} = 2i$

(3)  $|z + 2| = 2|z - 1|$

(4)  $2|z - i| = |z + 2i|$

**解答** (1) 点 1 を通り実軸に垂直な直線 (2) 点  $i$  を通り虚軸に垂直な直線

(3) 中心が点 2, 半径が 2 の円 (4) 中心が点  $2i$ , 半径が 2 の円

(1)  $z = x + yi$  ( $x, y$  は実数) とおくと  $\bar{z} = x - yi$

$z + \bar{z} = 2$  から  $(x + yi) + (x - yi) = 2$

よって  $x = 1$

したがって、点  $z$  は点 1 を通り実軸に垂直な直線である。

**別解**  $z + \bar{z} = 2$  から  $\frac{z + \bar{z}}{2} = 1$

また、2 点  $z, \bar{z}$  は実軸に関して対称である。

よって、2 点  $z, \bar{z}$  を結ぶ線分の中点が常に 1 であるから、点  $z$  は点 1 を通り実軸に垂直な直線である。

(2)  $z = x + yi$  ( $x, y$  は実数) とおくと  $\bar{z} = x - yi$

$z - \bar{z} = 2i$  から  $(x + yi) - (x - yi) = 2i$

よって  $y = 1$

したがって、点  $z$  は点  $i$  を通り虚軸に垂直な直線である。

**別解**  $z - \bar{z} = 2i$  から  $\frac{z + (-\bar{z})}{2} = i$

また、2 点  $z, -\bar{z}$  は虚軸に関して対称である。

よって、2 点  $z, -\bar{z}$  を結ぶ線分の中点が常に  $i$  であるから、点  $z$  は点  $i$  を通り虚軸に垂直な直線である。

(3) 方程式の両辺を 2 乗すると  $|z + 2|^2 = 4|z - 1|^2$

よって  $(z + 2)(\overline{z + 2}) = 4(z - 1)(\overline{z - 1})$

$$\text{すなわち } (z+2)(\overline{z}+2)=4(z-1)(\overline{z}-1)$$

$$\text{両辺を展開して整理すると } z\overline{z}-2z-2\overline{z}=0$$

$$\text{よって } (z-2)(\overline{z}-2)=4$$

$$\text{すなわち } (z-2)(\overline{z-2})=4$$

$$\text{したがって } |z-2|^2=4$$

$$\text{よって } |z-2|=2$$

したがって、点  $z$  は中心が点  $2$ 、半径が  $2$  の円である。

$$(4) \text{ 方程式の両辺を } 2 \text{ 乗すると } 4|z-i|^2=|z+2i|^2$$

$$\text{よって } 4(z-i)(\overline{z-i})=(z+2i)(\overline{z+2i})$$

$$\text{すなわち } 4(z-i)(\overline{z}+i)=(z+2i)(\overline{z}-2i)$$

$$\text{両辺を展開して整理すると } z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}=0$$

$$\text{よって } (z-2i)(\overline{z}+2i)=4$$

$$\text{すなわち } (z-2i)(\overline{z-2i})=4$$

$$\text{したがって } |z-2i|^2=4$$

$$\text{よって } |z-2i|=2$$

したがって、点  $z$  は中心が点  $2i$ 、半径が  $2$  の円である。

### B 24 - 5

点  $z$  が原点  $O$  を中心とする半径  $6$  の円の周上を動くとき、点  $z$  と点  $2i$  を結ぶ線分の中点  $w$  は、どのような図形を描くか。

**解答** 点  $i$  を中心とする半径  $3$  の円

点  $z$  は、原点  $O$  を中心とする半径  $6$  の円の周上にあるから  $|z|=6$

$$w=\frac{z+2i}{2}=\frac{z}{2}+i$$

$$\text{すなわち } z=2(w-i)$$

$$\text{よって } |2(w-i)|=6$$

$$\text{ゆえに } |w-i|=3$$

したがって、点  $w$  は点  $i$  を中心とする半径  $3$  の円を描く。

### B 24 - 6

(1)  $z=2-6i$  とする。点  $z$  を、原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

$$(\text{ア}) \quad \frac{\pi}{6}$$

$$(\text{イ}) \quad -\frac{\pi}{2}$$

(2) 点  $(1-i)z$  は、点  $z$  をどのように移動した点であるか。

**解答** (1) (ア)  $3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i$  (イ)  $-6-2i$

(2) 原点を中心として  $-\frac{\pi}{4}$  だけ回転し、原点からの距離を  $\sqrt{2}$  倍した点

(1) 求める点を表す複素数は

$$\begin{aligned} \text{(ア)} \quad \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) z &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2-6i) = \sqrt{3} - 3\sqrt{3}i + i + 3 \\ &= 3 + \sqrt{3} + (1-3\sqrt{3})i \end{aligned}$$

$$\text{(イ)} \quad \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} z = -i(2-6i) = -6-2i$$

$$(2) \quad (1-i)z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z = \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}z$$

よって、点  $(1-i)z$  は、点  $z$  を原点を中心として  $-\frac{\pi}{4}$  だけ回転し、原点からの距離を  $\sqrt{2}$  倍した点である。

## B 24 - 7

$\alpha = 3+4i$ ,  $\beta = -1+2i$  とする。

(1) 点  $\beta$  を中心に、点  $\alpha$  を  $\frac{\pi}{6}$  だけ回転した点を表す複素数  $\gamma$  を求めよ。

(2) 点  $\alpha$  を中心に、点  $\beta$  を  $-\frac{\pi}{4}$  だけ回転した点を表す複素数  $\delta$  を求めよ。

**解答** (1)  $(-2+2\sqrt{3})+(4+\sqrt{3})i$  (2)  $(3-3\sqrt{2})+(4+\sqrt{2})i$

(1) 点  $\beta$  を原点  $O$  に移すような平行移動で、点  $\alpha$ ,  $\gamma$  がそれぞれ点  $\alpha'$ ,  $\gamma'$  に移るとする

$$\alpha' = \alpha - \beta = (3+4i) - (-1+2i) = 4+2i$$

$$\gamma' = \gamma - \beta$$

点  $\gamma'$  は、点  $\alpha'$  を原点  $O$  を中心として  $\frac{\pi}{6}$  だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned} \gamma' &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \alpha' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(4+2i) \\ &= (2\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+2)i \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \gamma = \gamma' + \beta = (2\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+2)i + (-1+2i)$$

$$= (-2+2\sqrt{3}) + (4+\sqrt{3})i$$

(2) 点  $\alpha$  を原点  $O$  に移すような平行移動で、点  $\beta$ ,  $\gamma$  がそれぞれ点  $\beta''$ ,  $\gamma''$  に移るとする

$$\begin{aligned}\text{と } \beta'' &= \beta - \alpha = (-1 + 2i) - (3 + 4i) = -4 - 2i \\ r'' &= r - \alpha\end{aligned}$$

点  $r''$  は、点  $\beta''$  を原点  $O$  を中心として  $-\frac{\pi}{4}$  だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned}r'' &= \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} \beta'' = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) (-4 - 2i) \\ &= -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{したがって } r &= r'' + \alpha = -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i + (3 + 4i) \\ &= (3 - 3\sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2})i\end{aligned}$$

### B 24 - 8

次の点を表す複素数を求めよ。

- (1) 複素数  $2 - 4i$  を表す点を  $A$  とするとき、 $\triangle OAB$  が正三角形となるような点  $B$
- (2) 複素数  $-2 - i$  を表す点を  $A$  とするとき、 $\triangle OAB$  が  $OA = OB$  の直角二等辺三角形となるような点  $B$

**解答** (1)  $(1 + 2\sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3})i$ ,  $(1 - 2\sqrt{3}) + (-2 - \sqrt{3})i$   
 (2)  $1 - 2i$ ,  $-1 + 2i$

- (1) 点  $B$  は、点  $A$  を原点  $O$  を中心として  $\frac{\pi}{3}$  または  $-\frac{\pi}{3}$  だけ回転した点である。

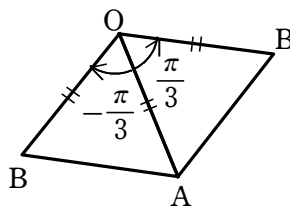
よって

$$\begin{aligned}\left( \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \right) (2 - 4i) &= \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2 - 4i) \\ &= (1 + 2\sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3})i\end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}\left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} (2 - 4i) &= \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (2 - 4i) \\ &= (1 - 2\sqrt{3}) + (-2 - \sqrt{3})i\end{aligned}$$

したがって、点  $B$  を表す複素数は  $(1 + 2\sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3})i$ ,  $(1 - 2\sqrt{3}) + (-2 - \sqrt{3})i$



(2) 点 B は、点 A を原点 O を中心として  $\frac{\pi}{2}$  または  $-\frac{\pi}{2}$  だけ回転した点である。

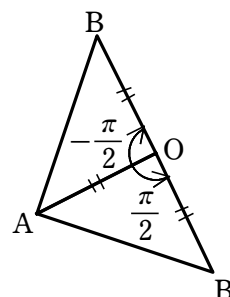
よって

$$\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)(-2-i) = i(-2-i) = 1-2i$$

または

$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}(-2-i) = -i(-2-i) = -1+2i$$

したがって、点 B を表す複素数は  $1-2i$ ,  $-1+2i$



### B 24 - 9

複素数平面上の異なる 3 点 O (0), A ( $\alpha$ ), B ( $\beta$ ) について、次の等式が成り立つとき、 $\triangle OAB$  はどのような三角形か。

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

(2)  $\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$

**解答** (1)  $\angle O = \frac{\pi}{2}$  の直角二等辺三角形 (2)  $\angle B = \frac{\pi}{2}$  の直角二等辺三角形

(1) 点 B と原点 O は異なるから  $\beta \neq 0$

等式の両辺を  $\beta^2$  で割ると  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 1 = 0$

よって  $\frac{\alpha}{\beta} = \pm i = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$

すなわち  $\alpha = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)\beta$

または

$$\alpha = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\beta$$

したがって、点 A は点 B を、原点 O を中心として  $\frac{\pi}{2}$  または  $-\frac{\pi}{2}$  だけ回転した点である。

よって、 $\triangle OAB$  は  $\angle O = \frac{\pi}{2}$  の直角二等辺三角形である。

(2) 点 B と原点 O は異なるから  $\beta \neq 0$

等式の両辺を  $\beta^2$  で割ると  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 2 = 0$

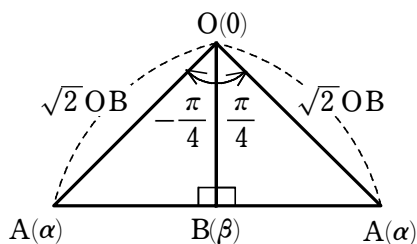
$$\text{よって} \quad \frac{\alpha}{\beta} = 1 \pm i = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$\text{すなわち} \quad \alpha = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \beta$$

または

$$\alpha = \sqrt{2} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} \beta$$

$$\text{したがって} \quad \angle AOB = \frac{\pi}{4}, \quad OA = \sqrt{2} OB$$



よって、 $\triangle OAB$  は  $\angle B = \frac{\pi}{2}$  の直角二等辺三角形である。

## B 24 - 10

複素数平面上の異なる 3 点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  の間に次の関係があるとき、 $\triangle ABC$  はどのような三角形か。

$$(1) \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \sqrt{3}i$$

$$(2) \quad \alpha + i\beta = (1 + i)\gamma$$

**解答** (1)  $\angle A = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle B = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle C = \frac{\pi}{6}$  の直角三角形

(2)  $\angle C = \frac{\pi}{2}$  の直角二等辺三角形

$$(1) \quad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \sqrt{3}i \text{ から, 2 直線 } AB, AC \text{ は垂直に交わり} \quad \angle A = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{また, } \left| \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \right| = \sqrt{3} \text{ であるから} \quad |\gamma - \alpha| = \sqrt{3} |\beta - \alpha|$$

$$\text{よって, } AC = \sqrt{3} AB \text{ であるから} \quad AC : AB = \sqrt{3} : 1$$

したがって、 $\triangle ABC$  は  $\angle A = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle B = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle C = \frac{\pi}{6}$  の直角三角形である。

$$(2) \quad \alpha + i\beta = (1 + i)\gamma \text{ から} \quad \alpha - \gamma = -i(\beta - \gamma)$$

$$\beta \neq \gamma \text{ であるから} \quad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = -i$$

$$\text{よって, 2 直線 } CB, CA \text{ は垂直に交わり} \quad \angle C = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{また, } \left| \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \right| = 1 \text{ であるから} \quad |\alpha - \gamma| = |\beta - \gamma|$$

$$\text{よって} \quad CA = CB$$

したがって、 $\triangle ABC$  は  $\angle C = \frac{\pi}{2}$  の直角二等辺三角形である。

### C 24 - 1

複素数  $z$  を  $z = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$  とする。

- (1)  $z^2$  を計算せよ。
- (2)  $\arg(z)$  を求めよ。

**解答** (1)  $4\sqrt{3} + 4i$  (2)  $15^\circ + 360^\circ \times n$  ( $n$  は整数)

$$\begin{aligned} (1) \quad z^2 &= \{(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i\}^2 \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 + 2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)i - (\sqrt{3} - 1)^2 \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) + 4i - (4 - 2\sqrt{3}) \\ &= 4\sqrt{3} + 4i \end{aligned}$$

$$(2) \quad (1) \text{ から } z^2 = 8(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

よって  $\arg(z^2) = 30^\circ + 360^\circ \times m$  ( $m$  は整数)

$$\text{ゆえに } \arg(z) = \frac{1}{2} \arg(z^2) = \frac{1}{2}(30^\circ + 360^\circ \times m) = 15^\circ + 180^\circ \times m$$

また、 $\sqrt{3} + 1 > 0$  かつ  $\sqrt{3} - 1 > 0$  であるから  $0^\circ + 360^\circ \times k < \arg(z) < 90^\circ$  ( $k$  は整数)

したがって  $\arg(z) = 15^\circ + 360^\circ \times n$  ( $n$  は整数)

### C 24 - 2

$\theta = \frac{360^\circ}{7}$ ,  $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ ,  $\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$  のとき

- (1)  $\overline{\alpha} = \alpha^6$  を示せ。
- (2)  $\beta + \overline{\beta}$ ,  $\beta \overline{\beta}$  を求めよ。
- (3)  $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$  を求めよ。

**解答** (1) 略 (2)  $\beta + \overline{\beta} = -1$ ,  $\beta \overline{\beta} = 2$  (3)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \quad \overline{\alpha} &= \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(360^\circ - \theta) + i \sin(360^\circ - \theta) \\ &= \cos 6\theta + i \sin 6\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^6 = \alpha^6 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \alpha \text{ は } 1 \text{ の } 7 \text{ 乗根であるから } \alpha^7 = 1$$

$\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)$  で、 $\alpha \neq 1$  であるから

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

また、(1) と同様に考えると、 $\overline{\alpha^2} = \alpha^5$ ,  $\overline{\alpha^4} = \alpha^3$  が導かれる。

$$\text{ゆえに } \overline{\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\alpha^2} + \overline{\alpha^4} = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3$$

$$\text{したがって } \beta + \overline{\beta} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 = -1$$

次に、 $\alpha^7 = 1$  に注意すると

$$\begin{aligned}\beta \overline{\beta} &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3) \\ &= \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^7 \\ &= 3 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 \\ &= 3 - 1 = 2\end{aligned}$$

(3)  $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$  は、 $\beta$  の虚部を表す.

$$\text{また、(2) より、} \beta \text{ は } x^2 - (\beta + \overline{\beta})x + \beta \overline{\beta} = 0$$

すなわち、 $x^2 + x + 2 = 0$  の解である.

$$\text{これを解いて } x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2} \quad \sin 2\theta > 0 \text{ であり}$$

$$\sin 4\theta + \sin \theta = 2 \sin \frac{5}{2}\theta \cos \frac{3}{2}\theta > 0 \quad \left(0^\circ < \frac{5}{2}\theta < 180^\circ, 0^\circ < \frac{3}{2}\theta < 90^\circ \text{ より}\right)$$

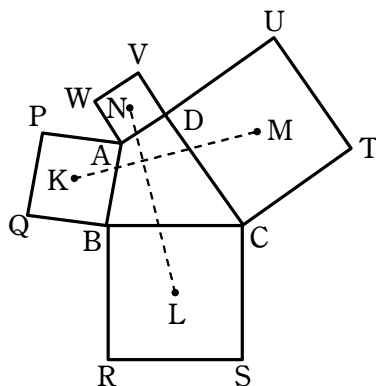
$$\text{であるから } \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta > 0$$

$$\text{したがって } \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

### C 24 - 3

図のように、複素数平面上に四角形 ABCD があり、4 点 A, B, C, D を表す複素数をそれぞれ  $z_1, z_2, z_3, z_4$  とする. 各辺を 1 辺とする 4 つの正方形 BAPQ, CBRS, DCTU, ADVW を四角形 ABCD の外側に作り、正方形 BAPQ, CBRS, DCTU, ADVW の中心をそれぞれ K, L, M, N とおく.

- (1) 点 K を表す複素数  $w_1$  を  $z_1$  と  $z_2$  で表せ.
- (2)  $KM = LN$ ,  $KM \perp LN$  を証明せよ.
- (3) 線分 KM と線分 LN の中点が一致するのは四角形 ABCD がどのような図形のときか.



**解答** (1)  $w_1 = \frac{1+i}{2}z_1 + \frac{1-i}{2}z_2$  (2) 略 (3) 平行四辺形

(1) 点 A( $z_1$ ) は、点 K( $w_1$ ) を中心として点 B( $z_2$ ) を  $90^\circ$  だけ回転した点である.

$$\text{したがって } z_1 = (z_2 - w_1)(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) + w_1$$

$$\text{よって } (1-i)w_1 = z_1 - iz_2$$

ゆえに  $w_1 = \frac{1}{1-i}z_1 - \frac{i}{1-i}z_2 = \frac{1+i}{2}z_1 + \frac{1-i}{2}z_2$

(2) 3 点 L, M, N を表す複素数をそれぞれ  $w_2, w_3, w_4$  とすると, (1) と同様にして

$$w_2 = \frac{1+i}{2}z_2 + \frac{1-i}{2}z_3$$

$$w_3 = \frac{1+i}{2}z_3 + \frac{1-i}{2}z_4$$

$$w_4 = \frac{1+i}{2}z_4 + \frac{1-i}{2}z_1$$

したがって  $w_3 - w_1 = \frac{1+i}{2}(z_3 - z_1) + \frac{1-i}{2}(z_4 - z_2)$

$$w_4 - w_2 = -\frac{1-i}{2}(z_3 - z_1) + \frac{1+i}{2}(z_4 - z_2)$$

よって  $\frac{w_4 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{-(1-i)(z_3 - z_1) + (1+i)(z_4 - z_2)}{(1+i)(z_3 - z_1) + (1-i)(z_4 - z_2)} = i$  (純虚数)

ゆえに  $\text{KM} \perp \text{LN}$

また,  $w_4 - w_2 = i(w_3 - w_1)$  から  $|w_4 - w_2| = |i| |w_3 - w_1|$

すなわち  $|w_4 - w_2| = |w_3 - w_1|$

よって  $\text{KM} = \text{LN}$

(3) 線分 KM と線分 LN の中点を表す複素数は, それぞれ  $\frac{w_1 + w_3}{2}, \frac{w_2 + w_4}{2}$

これらが一致するから  $w_1 + w_3 = w_2 + w_4$

ゆえに

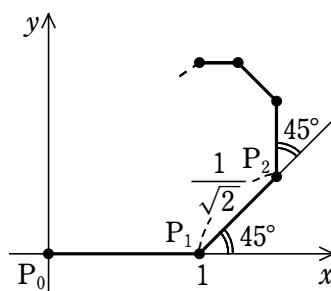
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + i(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - i(z_1 - z_2 + z_3 - z_4)$$

よって  $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$  から  $\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2}$

よって, 対角線 AC と BD がおのおのの中点で交わるから, 四角形 ABCD は平行四辺形である.

**C 24 - 4**

右図のように複素数平面の原点を  $P_0$  とし,  $P_0$  から実軸の正の方向に 1 進んだ点を  $P_1$  とする. 次に  $P_1$  を中心として  $45^\circ$  回転して向きを変え,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  進んだ点を  $P_2$  とする. 以下同様に  $P_n$  に到達した後,  $45^\circ$  回転してから前回進んだ距離の  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  倍進んで到達する点を  $P_{n+1}$  とする. このとき, 点  $P_{10}$  が表す複素数を求めよ.



**解答**  $\frac{33+31i}{32}$

点  $P_n$  が表す複素数を  $z_n$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \alpha$  とする.

$$z_{n+2} - z_{n+1} = (z_{n+1} - z_n)\alpha \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad z_0=0, \quad z_1=1$$

$$\text{よって } z_n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \quad \text{したがって } z_{10} = \frac{1 - \alpha^{10}}{1 - \alpha}$$

ここで

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \frac{1+i}{2},$$

$$\alpha^{10} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{10} \{ \cos(45^\circ \times 10) + i \sin(45^\circ \times 10) \} = \frac{i}{32}$$

$$\text{よって } z_{10} = \frac{1 - \frac{i}{32}}{1 - \frac{1+i}{2}} = \frac{32-i}{32} \cdot \frac{2}{1-i} = \frac{32-i}{32} (1+i) = \frac{33+31i}{32}$$

**C 24 - 5**

単位円上の異なる 3 点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  と, この円上にない点  $H(z)$  について, 等式  $z = \alpha + \beta + \gamma$  が成り立つとき,  $H$  は  $\triangle ABC$  の垂心であることを証明せよ.

**解答** 略

3 点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  は単位円上にあるから

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha \bar{\alpha} = \beta \bar{\beta} = \gamma \bar{\gamma} = 1$$

ゆえに  $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \overline{\beta} = \frac{1}{\beta}, \overline{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$

A, B, C, H はすべて異なる点であるから,  $\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha} \neq 0$  で

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-\beta}{z-\alpha} + \overline{\left(\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}\right)} &= \frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\overline{\gamma-\beta}}{\overline{\beta+\gamma}} = \frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\beta}+\overline{\gamma}} \\ &= \frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\beta-\gamma}{\gamma+\beta} = 0 \end{aligned}$$

よって,  $\frac{\gamma-\beta}{z-\alpha}$  は純虚数である。ゆえに  $AH \perp BC$

同様にして  $BH \perp CA$

したがって, H は  $\triangle ABC$  の垂心である。

## 第 25 章 二次曲線と極座標 (1)

### A 25 - 1

次の軌跡を求めよ。

- (1) 2 点  $(1, -3)$ ,  $(1, -1)$  からの距離の和が 4 である点の軌跡
- (2) 2 点  $(-7, 2)$ ,  $(1, 2)$  からの距離の差が 6 である点の軌跡
- (3) 点  $\left(2, \frac{3}{2}\right)$  と直線  $y = \frac{1}{2}$  からの距離が等しい点の軌跡
- (4) 点  $(-4, 3)$  と直線  $x = 2$  からの距離が等しい点の軌跡

**解答** (1) 楕円  $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$  (2) 双曲線  $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$

(3) 放物線  $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$  (4) 放物線  $(y-3)^2 = -12(x+1)$

- (1) A  $(1, -3)$ , B  $(1, -1)$  とすると, 求める軌跡は A, B を焦点とする楕円である。

線分 AB の中点は M  $(1, -2)$

M を原点に移すような平行移動によって, A, B は, それぞれ 2 点  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  に移る。

この 2 点を焦点とする楕円の方程式は  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > a > 0$ ) …… ① とおけて

$$\sqrt{b^2 - a^2} = 1$$

両辺を 2 乗して  $b^2 - a^2 = 1$

距離の和が 4 であるから  $2b = 4$  よって  $b = 2, a^2 = 3$

ゆえに, ① は  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

求める軌跡は, この楕円を  $x$  軸方向に 1,  $y$  軸方向に  $-2$  だけ平行移動したものであるから

楕円  $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

- (2) A  $(-7, 2)$ , B  $(1, 2)$  とすると, 求める軌跡は A, B を焦点とする双曲線である。

線分 AB の中点は M  $(-3, 2)$

M を原点に移すような平行移動によって, A, B は, それぞれ 2 点  $(-4, 0)$ ,  $(4, 0)$  に移る。

この 2 点を焦点とする双曲線の方程式は  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) …… ① とおけて

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 4$$

両辺を 2 乗して  $a^2 + b^2 = 16$

距離の差が 6 であるから  $2a = 6$  よって  $a = 3, b^2 = 7$

ゆえに、① は  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

求める軌跡は、この双曲線を  $x$  軸方向に  $-3$ ,  $y$  軸方向に  $2$  だけ平行移動したものであるから

$$\text{双曲線 } \frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$$

(3) 求める軌跡は  $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$  を焦点, 直線  $y = \frac{1}{2}$  を準線とする放物線である。

$A$  から直線  $y = \frac{1}{2}$  に下ろした垂線を  $AH$  とすると, 線分  $AH$  の中点は  $M(2, 1)$

$M$  を原点に移すような平行移動によって,  $A$  は 点  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 直線  $y = \frac{1}{2}$  は直線

$y = -\frac{1}{2}$  に移る。

これらを焦点, 準線とする放物線は  $x^2 = 2y$

求める軌跡は、この放物線を  $x$  軸方向に  $2$ ,  $y$  軸方向に  $1$  だけ平行移動したものであるから

$$\text{放物線 } (x-2)^2 = 2(y-1)$$

$$\text{すなわち } \text{放物線 } y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$$

(4) 求める軌跡は  $A(-4, 3)$  を焦点, 直線  $x = 2$  を 準線とする放物線である。

$A$  から直線  $x = 2$  に下ろした垂線を  $AH$  とすると, 線分  $AH$  の中点は  $M(-1, 3)$

$M$  を原点に移すような平行移動によって,  $A$  は点  $(-3, 0)$ , 直線  $x = 2$  は直線  $x = 3$  に移る。

これらを焦点, 準線とする放物線は  $y^2 = -12x$

求める軌跡は、この放物線を  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $3$  だけ平行移動したものであるから

$$\text{放物線 } (y-3)^2 = -12(x+1)$$

## A 25 - 2

次の曲線の概形をかき, 放物線なら頂点の座標, 楕円なら中心の座標, 双曲線なら漸近線の方程式を求めよ。また, 焦点の座標も求めよ。

(1)  $y^2 = 4x + 8$

(2)  $y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

(3)  $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$

(4)  $9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y + 16 = 0$

(5)  $x^2 - y^2 + 4x + 6y - 6 = 0$

(6)  $4y^2 - 9x^2 - 18x - 24y - 9 = 0$

**解答** (1) [図], 頂点  $(-2, 0)$ , 焦点  $(-1, 0)$

(2) [図], 頂点  $(2, 1)$ , 焦点  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

(3) [図], 中心  $(2, -1)$ , 焦点  $(2 \pm \sqrt{3}, -1)$

(4) [図], 中心  $(-2, 2)$ , 焦点  $(-2, 2 \pm \sqrt{5})$

(5) [図], 漸近線  $x - y + 5 = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ , 焦点  $(-2 \pm \sqrt{2}, 3)$

(6) [図], 漸近線  $3x - 2y + 9 = 0$ ,  $3x + 2y - 3 = 0$ , 焦点  $(-1, 3 \pm \sqrt{13})$

(1)  $y^2 = 4x + 8$  を変形すると  $y^2 = 4(x + 2)$  …… ①

曲線 ① は, 放物線  $y^2 = 4x$  を  $x$  軸方向に  $-2$  だけ平行移動したもので, その概形は [図] のようになる。

放物線  $y^2 = 4x$  の頂点は原点  $(0, 0)$ , 焦点は点  $(1, 0)$  である。

よって, 放物線 ① の頂点の座標は  $(-2, 0)$ , 焦点の座標は  $(-1, 0)$  である。

(2)  $y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$  を変形すると  $(y - 1)^2 + 2(x - 2) = 0$

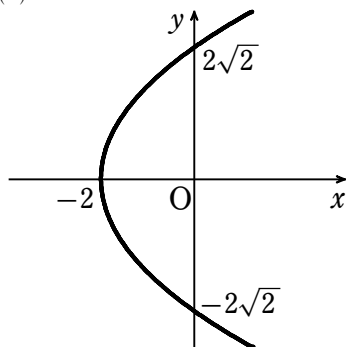
よって  $(y - 1)^2 = -2(x - 2)$  …… ①

曲線 ① は, 放物線  $y^2 = -2x$  を  $x$  軸方向に  $2$ ,  $y$  軸方向に  $1$  だけ平行移動したもので, その概形は [図] のようになる。

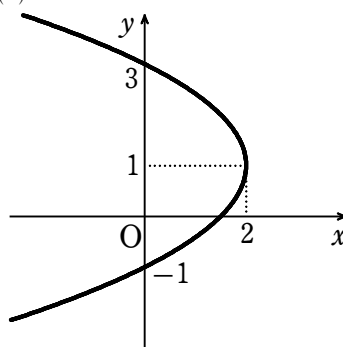
放物線  $y^2 = -2x$  の頂点は原点  $(0, 0)$ , 焦点は点  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  である。

よって, 放物線 ① の頂点の座標は  $(2, 1)$ , 焦点の座標は  $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$  である。

(1)



(2)



(3)  $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$  を変形すると  $(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 4$

よって  $\frac{(x - 2)^2}{4} + (y + 1)^2 = 1$  …… ①

曲線 ① は、楕円  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  を  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したもので、その概形は [図] のようになる。

楕円  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  の中心は原点  $(0, 0)$ , 焦点は 2 点  $(\sqrt{3}, 0)$ ,  $(-\sqrt{3}, 0)$  である。

よって、楕円 ① の中心の座標は  $(2, -1)$ , 焦点の座標は  $(2 + \sqrt{3}, -1)$ ,  $(2 - \sqrt{3}, -1)$  である。

(4)  $9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y + 16 = 0$  を変形すると  $9(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 36$

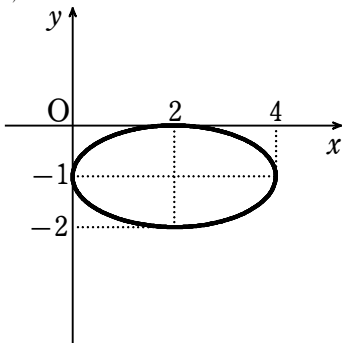
よって  $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$  …… ①

曲線 ① は、楕円  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  を  $x$  軸方向に  $-2$ ,  $y$  軸方向に 2 だけ平行移動したもので、その概形は [図] のようになる。

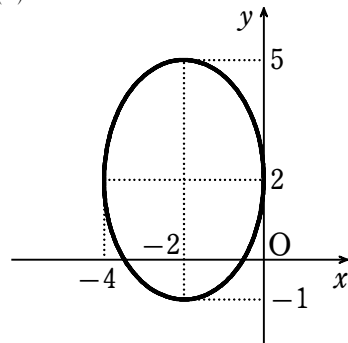
楕円  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  の中心は原点  $(0, 0)$ , 焦点は 2 点  $(0, \sqrt{5})$ ,  $(0, -\sqrt{5})$  である。

よって、楕円 ① の中心の座標は  $(-2, 2)$ , 焦点の座標は  $(-2, 2 + \sqrt{5})$ ,  $(-2, 2 - \sqrt{5})$  である。

(3)



(4)



(5)  $x^2 - y^2 + 4x + 6y - 6 = 0$  を変形すると  $(x+2)^2 - (y-3)^2 = 1$  …… ①

曲線 ① は、双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  を  $x$  軸方向に  $-2$ ,  $y$  軸方向に 3 だけ平行移動したもので、その概形は [図] のようになる。

双曲線  $x^2 - y^2 = 1$  の漸近線の方程式は  $x - y = 0$ ,  $x + y = 0$ , 焦点は 2 点  $(\sqrt{2}, 0)$ ,  $(-\sqrt{2}, 0)$  である。

よって、双曲線 ① の漸近線の方程式は  $(x+2) - (y-3) = 0$ ,  $(x+2) + (y-3) = 0$   
すなわち  $x - y + 5 = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$

焦点の座標は  $(-2+\sqrt{2}, 3)$ ,  $(-2-\sqrt{2}, 3)$  である。

(6)  $4y^2 - 9x^2 - 18x - 24y - 9 = 0$  を変形すると  $-9(x+1)^2 + 4(y-3)^2 = 36$

よって  $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = -1$  ..... ①

曲線 ① は、双曲線  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$  を  $x$  軸方向に  $-1$ ,  $y$  軸方向に  $3$  だけ平行移動したもので、その概形は [図] のようになる。

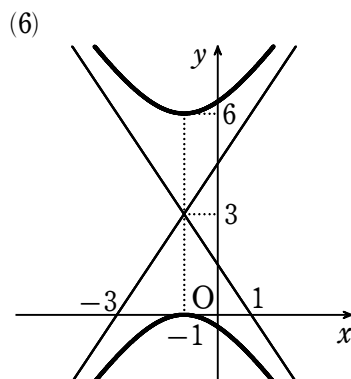
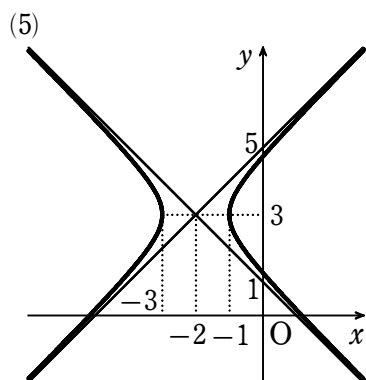
双曲線  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$  の漸近線の方程式は  $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0$ ,  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$

焦点は 2 点  $(0, \sqrt{13})$ ,  $(0, -\sqrt{13})$  である。

よって、双曲線 ① の漸近線の方程式は  $\frac{x+1}{2} - \frac{y-3}{3} = 0$ ,  $\frac{x+1}{2} + \frac{y-3}{3} = 0$

すなわち  $3x - 2y + 9 = 0$ ,  $3x + 2y - 3 = 0$

焦点の座標は  $(-1, 3+\sqrt{13})$ ,  $(-1, 3-\sqrt{13})$  である。



### A 25 - 3

次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(1)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$   $\left(\frac{5}{2}, \sqrt{3}\right)$

(2)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$   $(-3\sqrt{5}, 4)$

(3)  $2x^2 - y^2 = 2$   $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(4)  $y^2 = 10x$   $(2, -2\sqrt{5})$

【解答】 (1)  $2x + 5\sqrt{3}y - 20 = 0$  (2)  $\sqrt{5}x + 3y + 3 = 0$

$$(3) \quad 2x - y - \sqrt{2} = 0 \quad (4) \quad 5x + 2\sqrt{5}y + 10 = 0$$

$$(1) \text{ 接線の方程式は } \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}y = 1$$

$$\text{よって } 2x + 5\sqrt{3}y - 20 = 0$$

$$(2) \text{ 接線の方程式は } \frac{1}{9} \cdot (-3\sqrt{5})x - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot y = 1$$

$$\text{よって } \sqrt{5}x + 3y + 3 = 0$$

$$(3) \quad x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \text{ より, 接線の方程式は } \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}y = 1$$

$$\text{よって } 2x - y - \sqrt{2} = 0$$

$$(4) \text{ 接線の方程式は } (-2\sqrt{5})y = 5(x + 2)$$

$$\text{よって } 5x + 2\sqrt{5}y + 10 = 0$$

### B 25 - 1

楕円  $4x^2 + y^2 = 4$  の, 点 A (0, 3) を通る接線の方程式を求めよ。

**解答**  $y = \pm\sqrt{5}x + 3$

$$(1) \text{ 楕円 } 4x^2 + y^2 = 4 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線の方程式は } 4x_1x + y_1y = 4$$

$$\text{これが点 A (0, 3) を通るから } 3y_1 = 4 \quad \text{よって } y_1 = \frac{4}{3}$$

$$\text{このとき, } 4x_1^2 + y_1^2 = 4 \text{ から } 4x_1^2 + \frac{16}{9} = 4 \quad \text{これを解いて } x_1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{よって, 求める接線の方程式は } 4 \cdot \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)x + \frac{4}{3}y = 4 \quad \text{ゆえに } y = \pm\sqrt{5}x + 3$$

$$(2) \quad 4x^2 + y^2 = 4 \quad \cdots \cdots \text{①, } y = mx + 3 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{②を①に代入すると } 4x^2 + (mx + 3)^2 = 4$$

$$\text{整理すると } (m^2 + 4)x^2 + 6mx + 5 = 0$$

$$\text{ここで } m^2 + 4 \neq 0 \quad \text{この2次方程式の判別式を } D \text{ とすると } D = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9m^2 - (m^2 + 4) \cdot 5 = 4m^2 - 4 \cdot 5 = 4(m^2 - 5)$$

$$\text{よって } m^2 - 5 = 0 \quad \text{これを解いて } m = \pm\sqrt{5}$$

$$\text{したがって, 求める接線の方程式は } y = \pm\sqrt{5}x + 3$$

### B 25 - 2

楕円  $x^2 + 4y^2 = 4$  と直線  $x + 2y = 1$  の2つの交点を P, Q とするとき

- (1) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ。  
 (2) 線分 PQ の長さ  $l$  を求めよ。

**解答** (1)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  (2)  $\frac{\sqrt{35}}{2}$

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x + 2y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② から  $y$  を消去すると  $x^2 + (1-x)^2 = 4$

よって  $2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

点 P, Q の座標をそれぞれ  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  とすると,  $x_1, x_2$  は 2 次方程式 ③ の異なる 2 つの実数解であり, 解と係数の関係から

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 x_2 = -\frac{3}{2}$$

(1) M は線分 PQ の中点であるから, その座標を  $(x, y)$  とすると

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

よって, M の座標は  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$(2) \quad l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left\{ \left(-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\right) \right\}^2$$

$$= \frac{5}{4}(x_2 - x_1)^2 = \frac{5}{4}\{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\}$$

$$= \frac{5}{4}\left\{1^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\right\} = \frac{35}{4}$$

よって  $l = \sqrt{\frac{35}{4}} = \frac{\sqrt{35}}{2}$

### B 25 - 3

$2x^2 + 3y^2 = 1$  で表される曲線 C がある。

- (1) C を  $xy$  平面上に図示せよ。  
 (2) 点 P( $x, y$ ) が C 上を動くとき,  $x^2 - y^2 + xy$  の最大値を求めよ。

**解答** (1) [図] (2)  $\frac{\sqrt{31} + 1}{12}$

$$(1) \quad 2x^2 + 3y^2 = 1 \text{ から } \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$$

したがって、 $C$  は右の図のようになる。

$$(2) \quad P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right) \text{ と表される。}$$

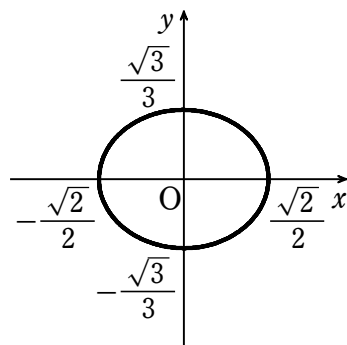
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta \text{ を } x^2 - y^2 + xy$$

に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + xy &= \frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{3}\sin^2\theta + \frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{6}(1 - \cos 2\theta) + \frac{\sqrt{6}}{12}\sin 2\theta \\ &= \frac{5}{12}\cos 2\theta + \frac{\sqrt{6}}{12}\sin 2\theta + \frac{1}{12} \\ &= \frac{\sqrt{31}}{12}\sin(2\theta + \alpha) + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{31}}, \quad \sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{31}}$$

$-1 \leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$  であるから、 $x^2 - y^2 + xy$  は最大値  $\frac{\sqrt{31} + 1}{12}$  をとる。



### B 25 - 4

$a, b$  を正の定数とする。双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点  $P(x_0, y_0)$  から 2 直線  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $y = -\frac{b}{a}x$  にそれぞれ垂線  $PA, PB$  を下ろす。

(1) 長さ  $\overline{PA}, \overline{PB}$  を求めよ。

(2) 積  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  を  $a, b$  を用いて表せ。

$$\text{【解答】 (1) } \overline{PA} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \overline{PB} = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2) \quad \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

(1) 点  $P(x, y)$  と直線  $bx - ay = 0$ ,  $bx + ay = 0$  との距離を求めればよいから

$$\overline{PA} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \overline{PB} = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  であるから

$$\begin{aligned}\overline{PA} \cdot \overline{PB} &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right| = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

**B 25 - 5**

楕円  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  と直線  $y = \frac{3}{4}x + k$  がある。

- (1) 異なる 2 点で交わるような、定数  $k$  の値の範囲を求めよ。  
 (2) 楕円が直線から切り取る線分の中点の軌跡を求めよ。

**解答** (1)  $-3\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2}$  (2) 直線  $y = -\frac{3}{4}x$  の  $-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$  の部分

(1) 楕円と直線の方程式から  $y$  を消去すると  $\frac{x^2}{16} + \frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}x + k\right)^2 = 1$

よって  $9x^2 + 12kx + 8k^2 - 72 = 0$  …… ①

① の判別式を  $D$  とすると  $\frac{D}{4} = (6k)^2 - 9(8k^2 - 72) = -36(k^2 - 18)$

異なる 2 点で交わるから  $D > 0$

したがって  $k^2 - 18 < 0$

これを解いて  $-3\sqrt{2} < k < 3\sqrt{2}$

- (2) ① の異なる 2 つの実数解を  $x_1, x_2$  とし、線分の中点の座標を  $(x, y)$  とする。

① において、解と係数の関係により

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{12k}{9}\right) = -\frac{2}{3}k$$

$$y = \frac{3}{4}x + k = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}k\right) + k = \frac{1}{2}k$$

$k$  を消去して  $y = -\frac{3}{4}x$

$x = -\frac{2}{3}k$  と (1) から  $-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$

したがって、求める軌跡は 直線  $y = -\frac{3}{4}x$  の  $-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$  の部分。

**C 25 - 1**

放物線  $y^2 = 4px$  ( $p \neq 0$ ) について、焦点  $F$  から任意の接線へ下ろした垂線を  $FQ$  とす

ると、点 Q は y 軸上にあることを示せ。

**解答** 略

焦点 F の座標は  $(p, 0)$

放物線上の点  $P(x_1, y_1)$  における接線の方程式は  $y_1 y = 2p(x + x_1)$  …… ①

また、点  $P(x_1, y_1)$  は放物線上にあるから  $y_1^2 = 4px_1$  …… ②

[1]  $y_1 \neq 0$  のとき ① から  $y = \frac{2p}{y_1}x + \frac{2px_1}{y_1}$  …… ①'

また、 $F(p, 0)$  を通り、直線 ①' に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{y_1}{2p}(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{y_1}{2p}x + \frac{y_1}{2} \quad \dots\dots ③$$

①' と ③ から  $y$  を消去すると  $\frac{2p}{y_1}x + \frac{2px_1}{y_1} = -\frac{y_1}{2p}x + \frac{y_1}{2}$

両辺に  $2py_1$  を掛けて整理すると  $(4p^2 + y_1^2)x = p(y_1^2 - 4px_1)$

② から  $y_1^2 - 4px_1 = 0$  であるから  $(4p^2 + y_1^2)x = 0$

$4p^2 + y_1^2 \neq 0$  であるから  $x = 0$       これを ①' に代入すると  $y = \frac{2px_1}{y_1}$

したがって、点 Q の座標は  $\left(0, \frac{2px_1}{y_1}\right)$

ゆえに、点 Q は y 軸上にある。

[2]  $y_1 = 0$  のとき ② から  $x_1 = 0$

ゆえに、① は直線  $x = 0$  すなわち y 軸を表す。

したがって、焦点 F から接線 ① に垂線 FQ を下ろせば、点 Q は y 軸上にある。

[1], [2] から、題意は示された。

## C 25 - 2

楕円  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  上に  $x_1 > 0$ ,  $y_1 > 0$  となるような点  $P(x_1, y_1)$  をとる。

(1) 点 P における接線  $l_1$  と法線  $l_2$  の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 接線  $l_1$  が x 軸と交わる点を Q, 法線  $l_2$  が x 軸と交わる点を S とし、線分 SQ の長さが最小となるように点 P を定める。このとき、 $\triangle PSQ$  の面積を求めよ。

**解答** (1) 接線の方程式は  $y = -\frac{9x_1}{4y_1}x + \frac{9}{y_1}$ , 法線の方程式は  $y = \frac{4y_1}{9x_1}x + \frac{5}{9}y_1$

(2) 3

$$(1) \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ の両辺を } x \text{ について微分すると } \frac{1}{2}x + \frac{2}{9}y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{ゆえに } \frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y}$$

$$\text{点 } P \text{ における接線の方程式は } y - y_1 = -\frac{9x_1}{4y_1}(x - x_1)$$

$$\text{すなわち } y = -\frac{9x_1}{4y_1}x + \frac{9}{y_1}\left(\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9}\right)$$

$$\text{よって } y = -\frac{9x_1}{4y_1}x + \frac{9}{y_1} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{点 } P \text{ における法線の方程式は } y - y_1 = \frac{4y_1}{9x_1}(x - x_1)$$

$$\text{すなわち } y = \frac{4y_1}{9x_1}x + \frac{5}{9}y_1 \quad \dots\dots ②$$

$$(2) \quad ① \text{ において } y=0 \text{ とすると } x = \frac{4}{x_1}$$

$$\text{よって } Q\left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$$

$$② \text{ において } y=0 \text{ とすると } x = -\frac{5}{4}x_1$$

$$\text{よって } S\left(-\frac{5}{4}x_1, 0\right)$$

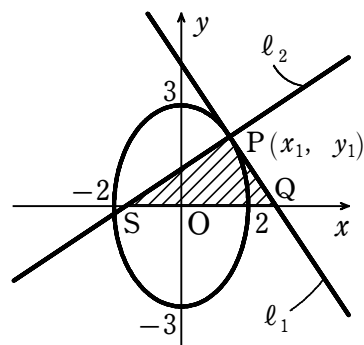
$$\text{ゆえに } SQ = \frac{4}{x_1} + \frac{5}{4}x_1$$

$$(\text{相加平均}) \geq (\text{相乗平均}) \text{ により } \frac{4}{x_1} + \frac{5}{4}x_1 \geq 2\sqrt{\frac{4}{x_1} \cdot \frac{5}{4}x_1} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{等号は, } \frac{4}{x_1} = \frac{5}{4}x_1 \text{ すなわち } x_1 = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ のとき成り立つ。}$$

$$\text{このとき } y_1 = 3\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{よって } \triangle PSQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot 2\sqrt{5} = 3$$



**C 25 - 3**

双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点 P における接線が、2つの漸近線と交わる点を Q, R とし、原点を O とする。次のことを証明せよ。

- (1) P は線分 QR の中点  
 (2)  $\triangle OQR$  の面積は一定

**解答** (1) 略 (2) 略

- (1) P の座標を  $\left(\frac{a}{\cos \theta}, b \tan \theta\right)$  とする。

P における接線の方程式は 
$$\frac{\frac{a}{\cos \theta} \cdot x}{a^2} - \frac{(b \tan \theta) y}{b^2} = 1$$

すなわち 
$$\frac{x}{a \cos \theta} - \frac{y \tan \theta}{b} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また、2つの漸近線の方程式は

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

① と ② の交点 Q の座標を  $(x_1, y_1)$  とすると

$$\frac{x_1}{a \cos \theta} - \frac{y_1 \tan \theta}{b} = 1, \quad \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} = 0$$

$\frac{y_1}{b}$  を消去すると  $\frac{x_1}{a} \left( \frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta \right) = 1$  すなわち  $\frac{x_1}{a} \cdot \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = 1$

ゆえに  $x_1 = \frac{a \cos \theta}{1 - \sin \theta}, \quad y_1 = \frac{b \cos \theta}{1 - \sin \theta}$

同様に、① と ③ の交点 R の座標を  $(x_2, y_2)$  とすると

$$x_2 = \frac{a \cos \theta}{1 + \sin \theta}, \quad y_2 = -\frac{b \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

よって、線分 QR の中点の x 座標と y 座標は

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a \cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{a \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) = \frac{a \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{a}{\cos \theta}$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{b \cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{b \cos \theta}{1 + \sin \theta} \right) = \frac{b \sin \theta \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = b \tan \theta$$

したがって、P は線分 QR の中点である。

(2)  $\triangle OQR$  の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1| &= \frac{1}{2} \left| \frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta} \cdot \left(-\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right) - \frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta} \cdot \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| -\frac{2ab\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} \right| = |ab|\end{aligned}$$

よって、 $\triangle OQR$  の面積は一定である。

### C 25 - 4

2つの楕円  $C_1: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ ,  $C_2: x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$  について

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  の交点の座標をすべて求めよ。
- (2)  $C_1$  の内部と  $C_2$  の内部の共通部分の面積を求めよ。

**解答** (1)  $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  (複号任意) (2)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

(1)  $C_1$ ,  $C_2$  は、それぞれ  $x$  軸,  $y$  軸, 原点に関して対称である。

$C_1$  の方程式から  $y^2 = 1 - \frac{x^2}{3}$  ..... ①

これを  $C_2$  の方程式に代入して  $x^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = 1$

これを解くと  $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$  ① から  $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって、求める交点の座標は  $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  (複号任意)

(2) 第1象限における  $C_1$  と  $C_2$  の交点は

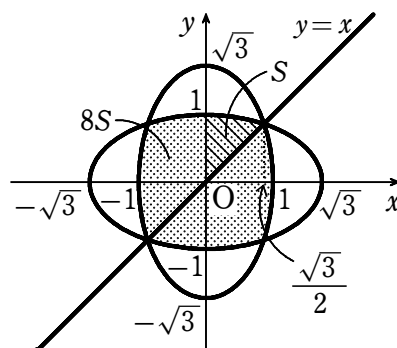
点  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  である。

右の図の斜線部分の面積を  $S$  とすると、図形の対称性から、求める面積は  $8S$  である。

① において、 $y \geq 0$  とすると

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$$

よって  $S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{3 - x^2} dx - \frac{3}{8}$



ここで、 $x = \sqrt{3} \sin \theta$  とおくと  $dx = \sqrt{3} \cos \theta d\theta$   
 $x$  と  $\theta$  の対応は右のようになる。

|          |                                    |
|----------|------------------------------------|
| $x$      | $0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\theta$ | $0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$      |

$$\begin{aligned}
 \text{よって } S &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3-3\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{3} \cos \theta d\theta - \frac{3}{8} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} \cos^2 \theta d\theta - \frac{3}{8} = \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta - \frac{3}{8} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{3}{8} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{12} \pi
 \end{aligned}$$

したがって、求める面積は  $8S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$

### C 25 - 5

長さ 10 の線分 AB の両端 A, B が、それぞれ  $x$  軸上,  $y$  軸上を動くとき、線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P の軌跡を求めよ。また、線分 AB の通過する領域を求めよ。

**解答** 楕円  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

A( $s$ , 0), B(0,  $t$ ), P( $x$ ,  $y$ ) とする。

AB=10 であるから  $s^2 + t^2 = 10^2$  …… ①

P は線分 AB を 3 : 2 に内分するから  $x = \frac{2s+3 \cdot 0}{3+2}$ ,  $y = \frac{2 \cdot 0+3t}{3+2}$

よって  $x = \frac{2}{5}s$ ,  $y = \frac{3}{5}t$  ゆえに  $s = \frac{5}{2}x$ ,  $t = \frac{5}{3}y$

これを ① に代入して  $\left(\frac{5}{2}x\right)^2 + \left(\frac{5}{3}y\right)^2 = 10^2$  ゆえに  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

よって、点 P の軌跡は 楕円  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

**C 25 - 6**

楕円  $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$  の外部の点  $P(a, b)$  から引いた 2 本の接線が直交するような点  $P$  の軌跡を求めよ。

**解答** 円  $x^2 + y^2 = 25$

点  $P$  の座標が

$$(a, b) = (\sqrt{17}, 2\sqrt{2}), (\sqrt{17}, -2\sqrt{2}), \\ (-\sqrt{17}, 2\sqrt{2}), (-\sqrt{17}, -2\sqrt{2})$$

のとき、点  $P(a, b)$  から引いた 2 本の接線は、 $x$  軸に平行な直線と  $y$  軸に平行な直線となり、条件に適する。

$a \neq \pm\sqrt{17}$  のとき、点  $P(a, b)$  を通る接線の方程式は

$$y = m(x - a) + b \quad \dots\dots ①$$

とおける。① を楕円の方程式  $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$  に代入すると

$$\frac{x^2}{17} + \frac{(mx - ma + b)^2}{8} = 1$$

整理すると  $(17m^2 + 8)x^2 + 34m(-ma + b)x + 17\{(-ma + b)^2 - 8\} = 0$

この 2 次方程式の判別式を  $D$  とおくと、 $D = 0$  であるから

$$\frac{D}{4} = 17^2 m^2 (-ma + b)^2 - 17(17m^2 + 8)\{(-ma + b)^2 - 8\} = 0$$

整理すると  $(17 - a^2)m^2 + 2abm + (8 - b^2) = 0 \quad \dots\dots ②$

2 次方程式 ② の 2 つの解を  $m_1, m_2$  とすると、2 本の接線が直交するとき

$$m_1 m_2 = -1$$

また、解と係数の関係により  $m_1 m_2 = \frac{8 - b^2}{17 - a^2}$  ゆえに  $\frac{8 - b^2}{17 - a^2} = -1$

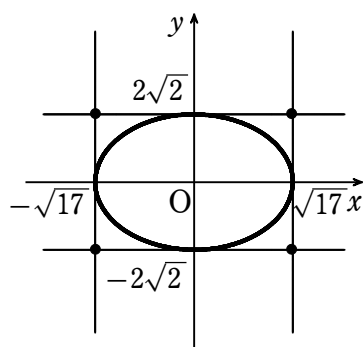
よって  $a^2 + b^2 = 25$

$(a, b) = (\sqrt{17}, 2\sqrt{2}), (\sqrt{17}, -2\sqrt{2}), (-\sqrt{17}, 2\sqrt{2}), (-\sqrt{17}, -2\sqrt{2})$  も、この方程式を満たす。

したがって、点  $P$  の軌跡は 円  $x^2 + y^2 = 25$

**参考** 2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  とすると

$$\alpha\beta < 0 \implies \frac{c}{a} < 0 \implies b^2 - 4ac > 0$$



したがって、2 次方程式 ② について  $m_1 m_2 = -1$  すなわち  $\frac{8-b^2}{17-a^2} = -1$  が満たされていれば、2 次方程式 ② は必ず異なる 2 つの実数解をもち、2 本の接線が引ける。

## 第 26 章 二次曲線と極座標 (2)

### A 26 - 1

次の極方程式の表す曲線を，直交座標に関する方程式で表せ。

- (1)  $r \sin \theta = -1$                       (2)  $r = -4 \sin \theta$                       (3)  $r \sin \left( \theta - \frac{2}{3} \pi \right) = 2$   
 (4)  $r \cos^2 \theta = \sin \theta$                       (5)  $r^2 \cos 2\theta = -1$                       (6)  $r^2(4 - 3 \cos^2 \theta) = 4$

**解答** (1)  $y = -1$     (2)  $x^2 + y^2 + 4y = 0$     (3)  $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$     (4)  $x^2 = y$   
 (5)  $x^2 - y^2 = -1$     (6)  $x^2 + 4y^2 = 4$

与えられた曲線上の点 P の極座標を  $(r, \theta)$ ，直交座標を  $(x, y)$  とする。

- (1)  $r \sin \theta = -1$  に  $r \sin \theta = y$  を代入して  $y = -1$   
 (2)  $r = -4 \sin \theta$  の両辺に  $r$  を掛けると  $r^2 = -4r \sin \theta$   
 これに  $r^2 = x^2 + y^2$ ， $r \sin \theta = y$  を代入すると  $x^2 + y^2 = -4y$   
 よって  $x^2 + y^2 + 4y = 0$

**参考** 曲線  $r = -4 \sin \theta$  は極  $(0, n\pi)$  ( $n$  は整数) を通るから， $r = -4 \sin \theta$  の両辺に  $r$  を掛けても同値である。

- (3)  $r \sin \left( \theta - \frac{2}{3} \pi \right) = 2$  から  $r \left( \sin \theta \cos \frac{2}{3} \pi - \cos \theta \sin \frac{2}{3} \pi \right) = 2$   
 ゆえに  $-\frac{1}{2} r \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} r \cos \theta = 2$   
 これに  $r \sin \theta = y$ ， $r \cos \theta = x$  を代入すると  $-\frac{1}{2} y - \frac{\sqrt{3}}{2} x = 2$   
 よって  $\sqrt{3}x + y + 4 = 0$

- (4)  $r \cos^2 \theta = \sin \theta$  の両辺に  $r$  を掛けると  $r^2 \cos^2 \theta = r \sin \theta$   
 これに  $r \cos \theta = x$ ， $r \sin \theta = y$  を代入すると  $x^2 = y$

**参考** 曲線  $r \cos^2 \theta = \sin \theta$  は極  $(0, n\pi)$  ( $n$  は整数) を通るから， $r \cos^2 \theta = \sin \theta$  に  $r$  を掛けても同値である。

- (5)  $r^2 \cos 2\theta = -1$  から  $r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = -1$   
 よって  $r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = -1$   
 これに  $r \sin \theta = y$ ， $r \cos \theta = x$  を代入すると  $x^2 - y^2 = -1$   
 (6)  $r^2(4 - 3 \cos^2 \theta) = 4$  から  $4r^2 - 3r^2 \cos^2 \theta = 4$   
 これに  $r^2 = x^2 + y^2$ ， $r \cos \theta = x$  を代入すると  $4(x^2 + y^2) - 3x^2 = 4$

よって  $x^2 + 4y^2 = 4$

## A 26 - 2

次の直交座標に関する方程式の表す曲線を、極方程式で表せ。

- (1)  $x=5$  (2)  $y=-\sqrt{3}x$  (3)  $x+y-4=0$   
 (4)  $x^2+y^2=4x$  (5)  $y^2=-4x$  (6)  $x^2-y^2=9$

**解答** (1)  $r\cos\theta=5$  (2)  $\theta=\frac{2}{3}\pi$  (または  $\theta=-\frac{\pi}{3}$  など)

(3)  $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$  (4)  $r=4\cos\theta$  (5)  $r\sin^2\theta=-4\cos\theta$

(6)  $r^2\cos 2\theta=9$

(1)  $x=5$  に  $x=r\cos\theta$  を代入して  $r\cos\theta=5$

**別解**  $x=5$  が表す直線は、極座標が  $(5, 0)$  である点を通り、始線に垂直である。

よって、求める極方程式は  $r\cos\theta=5$

(2)  $y=-\sqrt{3}x$  に  $x=r\cos\theta$ ,  $y=r\sin\theta$  を代入すると  $r\sin\theta=-\sqrt{3}r\cos\theta$

よって  $r(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)=0$

ゆえに  $r=0$  または  $\tan\theta=-\sqrt{3}$

$0\leq\theta<2\pi$  とすると、 $\tan\theta=-\sqrt{3}$  から

$$\theta=\frac{2}{3}\pi \text{ または } \theta=\frac{5}{3}\pi \dots\dots \textcircled{1}$$

$r=0$  は極を表す。また、 $\textcircled{1}$  の 2 つの極方程式は同じ直線を表し、極を通る。

よって、求める極方程式は  $\theta=\frac{2}{3}\pi$  (または  $\theta=-\frac{\pi}{3}$  など)

**別解**  $y=-\sqrt{3}x$  が表す直線は、極 (原点) を通り、始線 ( $x$  軸の正の部分) とのなす角が  $\frac{2}{3}\pi$  である。

よって、求める極方程式は  $\theta=\frac{2}{3}\pi$

(3)  $x+y-4=0$  に  $x=r\cos\theta$ ,  $y=r\sin\theta$  を代入すると  $r\cos\theta+r\sin\theta-4=0$

よって  $r(\cos\theta+\sin\theta)=4$

この左辺を変形すると  $\sqrt{2}r\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4$

ゆえに  $\sqrt{2}r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=4$

よって、求める極方程式は  $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$

(4)  $x^2 + y^2 = 4x$  に  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $x = r \cos \theta$  を代入すると  $r^2 = 4r \cos \theta$

よって  $r(r - 4 \cos \theta) = 0$

ゆえに  $r = 0$  または  $r = 4 \cos \theta$

$r = 0$  は極を表す。また、 $r = 4 \cos \theta$  は極座標が  $(2, 0)$  である点を中心とし、半径が 2 の円を表す。

これは極を通る。よって、求める極方程式は  $r = 4 \cos \theta$

**別解**  $x^2 + y^2 = 4x$  を変形すると  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

この方程式が表す円の半径は 2 で、中心の極座標は  $(2, 0)$  である。

よって、求める極方程式は  $r = 4 \cos \theta$

(5)  $y^2 = -4x$  に  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  を代入すると  $r^2 \sin^2 \theta = -4r \cos \theta$

よって  $r(r \sin^2 \theta + 4 \cos \theta) = 0$

ゆえに  $r = 0$  または  $r \sin^2 \theta = -4 \cos \theta$

$r = 0$  は極を表す。また、極  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  は  $r \sin^2 \theta = -4 \cos \theta$  を満たすから、この極方程式が表す図形は極を通る。

よって、求める極方程式は  $r \sin^2 \theta = -4 \cos \theta$

(6)  $x^2 - y^2 = 9$  に  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  を代入すると  $r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 9$

よって、求める極方程式は  $r^2 \cos 2\theta = 9$

## B 26 - 1

次の極方程式はどのような曲線を表すか。直交座標の方程式に直して答えよ。

(1)  $r = \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \theta}$       (2)  $r = \frac{3}{1 + 2 \cos \theta}$       (3)  $r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$

**解答** (1) 楕円  $\frac{(x+1)^2}{2} + y^2 = 1$       (2) 双曲線  $(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(3) 放物線  $y^2 = -4(x-1)$

(1)  $r = \frac{1}{\sqrt{2} + \cos \theta}$  から  $\sqrt{2}r + r \cos \theta = 1$

これに  $r \cos \theta = x$  を代入すると  $\sqrt{2}r + x = 1$       すなわち  $\sqrt{2}r = 1 - x$

両辺を 2 乗して  $2r^2 = (1-x)^2$

$r^2 = x^2 + y^2$  を代入すると  $2(x^2 + y^2) = (1-x)^2$

整理して  $x^2 + 2x + 2y^2 - 1 = 0$  ゆえに  $(x+1)^2 + 2y^2 = 2$

よって、与えられた極方程式が表す曲線は 楕円  $\frac{(x+1)^2}{2} + y^2 = 1$

$$(2) \quad r = \frac{3}{1+2\cos\theta} \text{ から } r + 2r\cos\theta = 3$$

これに  $r\cos\theta = x$  を代入すると  $r + 2x = 3$  すなわち  $r = -2x + 3$

両辺を 2 乗して  $r^2 = (-2x + 3)^2$

$r^2 = x^2 + y^2$  を代入すると  $x^2 + y^2 = (-2x + 3)^2$

整理して  $3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0$  ゆえに  $3(x-2)^2 - y^2 = 3$

よって、与えられた極方程式が表す曲線は 双曲線  $(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

$$(3) \quad r = \frac{2}{1+\cos\theta} \text{ から } r + r\cos\theta = 2$$

これに  $r\cos\theta = x$  を代入すると  $r + x = 2$  すなわち  $r = -x + 2$

両辺を 2 乗して  $r^2 = (-x + 2)^2$

$r^2 = x^2 + y^2$  を代入すると  $x^2 + y^2 = (-x + 2)^2$

よって、与えられた極方程式が表す曲線は 放物線  $y^2 = -4(x-1)$

## B 26 - 2

楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) の中心 O から垂直な 2 つの半直線を引き、楕円との交点を P, Q とすると、 $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$  は一定であることを示せ。

**解答** 略

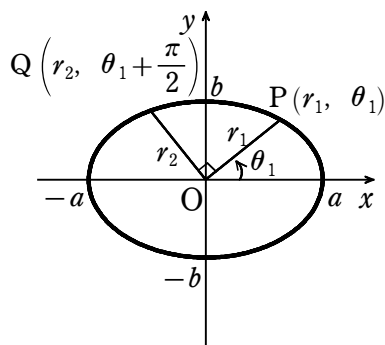
楕円の中心 O を極、 $x$  軸の正の部分の始線にとり、楕円を極方程式で表す。

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  に  $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\sin\theta$  を代入して

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

よって  $\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}$

OP ⊥ OQ であるから、2 点 P, Q の極座標は



$(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_1 + \frac{\pi}{2})$  とおける。

$$\text{また} \quad \cos^2\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\theta_1, \quad \sin^2\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\theta_1$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \left(\frac{\cos^2\theta_1}{a^2} + \frac{\sin^2\theta_1}{b^2}\right) + \left(\frac{\sin^2\theta_1}{a^2} + \frac{\cos^2\theta_1}{b^2}\right) \\ &= \frac{\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1}{a^2} + \frac{\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1}{b^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (\text{一定}) \end{aligned}$$

### B 26 - 3

放物線  $y^2 = 4x$  …… ① 上に 4 点があり、 $y$  座標の大きい順に A, B, C, D とする。

AC と BD は ① の焦点 F で垂直に交わり、 $\overrightarrow{FA}$  が  $x$  軸の正の方向となす角を  $\theta$  とする。

(1) AF を  $\theta$  で表せ。

(2)  $\frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF}$  は一定であることを示せ。

**解答** (1)  $AF = \frac{2}{1 - \cos\theta}$  (2) 略

(1) 条件から、4 点 A, B, C, D は右の図のようになる。

点 A の  $x$  座標を  $a$ ,  $AF = r$  とすると、放物線の定義

$$\text{から} \quad r = a - (-1)$$

$$\text{よって} \quad a = r - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\cos\theta = \frac{a-1}{r} \quad \text{であるから、}\textcircled{1} \text{を代入すると}$$

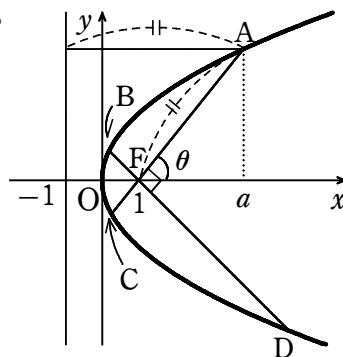
$$\cos\theta = \frac{r-2}{r}$$

$$1 - \cos\theta \neq 0 \quad \text{であるから} \quad r = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

$$\text{ゆえに} \quad AF = \frac{2}{1 - \cos\theta}$$

$$(2) (1) \text{から} \quad BF = \frac{2}{1 - \cos(\theta + 90^\circ)} = \frac{2}{1 + \sin\theta}$$

$$\text{同様に} \quad CF = \frac{2}{1 - \cos(\theta + 180^\circ)} = \frac{2}{1 + \cos\theta}$$



$$DF = \frac{2}{1 - \cos(\theta + 270^\circ)} = \frac{2}{1 - \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \frac{1}{AF \cdot CF} + \frac{1}{BF \cdot DF} &= \frac{1}{4} \{ (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) + (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \} \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 \theta + 1 - \sin^2 \theta) = \frac{1}{4} \quad (\text{一定}) \end{aligned}$$

**B 26 - 4**

次の曲線を、原点 O を中心として ( ) 内の角だけ回転して得られる曲線の方程式を求めよ。

(1)  $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16 \quad (-30^\circ)$

(2)  $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0 \quad (60^\circ)$

**解答** (1)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (2) \quad y^2 = 4x$

回転後の曲線上に任意の点 P(x, y) をとり、与えられた回転移動によって P に移されるもとの曲線上の点を Q(X, Y) とする。

(1) Q(X, Y) は P(x, y) を原点 O を中心として  $30^\circ$  だけ回転した点であるから

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって} \quad X = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y), \quad Y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点 Q(X, Y) は曲線  $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$  上の点であるから

$$7X^2 - 6\sqrt{3}XY + 13Y^2 = 16$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して整理すると} \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(2) Q(X, Y) は P(x, y) を原点 O を中心として  $-60^\circ$  だけ回転した点であるから

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって} \quad X = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y), \quad Y = \frac{1}{2}(y - \sqrt{3}x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点 Q(X, Y) は曲線  $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0$  上の点であるから

$$3X^2 + 2\sqrt{3}XY + Y^2 - 8X + 8\sqrt{3}Y = 0$$

$$\text{すなわち} \quad (\sqrt{3}X + Y)^2 - 8(X - \sqrt{3}Y) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して整理すると} \quad (2y)^2 - 8 \cdot 2x = 0$$

よって  $y^2 = 4x$

### C 26 - 1

方程式  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$  で表される曲線を  $C$  とする。

- (1)  $\sqrt{x} = t$  において,  $C$  を媒介変数  $t$  で表せ。
- (2)  $C$  は焦点  $(2, 2)$ , 準線  $y = -x$  である放物線の一部であることを示せ。

**解答** (1)  $x = t^2, y = (2-t)^2$  ( $0 \leq t \leq 2$ ) (2) 略

- (1)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$  と  $\sqrt{x} = t$  から

$$\sqrt{x} = t \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad \sqrt{y} = 2 - t \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① から  $x = t^2, t \geq 0$

② から  $y = (2-t)^2, 2-t \geq 0$

よって, 曲線  $C$  を媒介変数  $t$  で表すと  $x = t^2, y = (2-t)^2$  ( $0 \leq t \leq 2$ )

- (2) 曲線  $C$  上の点を  $P(t^2, (2-t)^2)$ , 点  $(2, 2)$  を  $F$  とする。

点  $P$  と直線  $y = -x$  との距離は

$$\frac{|t^2 + (2-t)^2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2t^2 - 4t + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|t^2 - 2t + 2|$$

一方, 2 点  $P, F$  間の距離は

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{(t^2 - 2)^2 + \{(2-t)^2 - 2\}^2} = \sqrt{2t^4 - 8t^3 + 16t^2 - 16t + 8} \\ &= \sqrt{2(t^2 - 2t + 2)^2} \\ &= \sqrt{2}|t^2 - 2t + 2| \end{aligned}$$

よって, 曲線  $C$  上の点  $P$  について, 点  $F(2, 2)$  からの距離と直線  $y = -x$  からの距離は等しい。

したがって,  $C$  は, 点  $(2, 2)$  を焦点とし, 直線  $y = -x$  を準線とする放物線の一部である。

### C 26 - 2

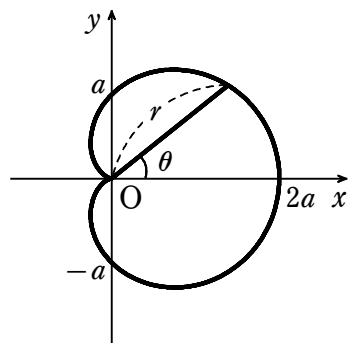
$a > 0$  を定数として, 極方程式  $r = a(1 + \cos \theta)$  により表される曲線  $C_a$  を考える。

次の問いに答えよ。

- (1) 極座標が  $(\frac{a}{2}, 0)$  の点を中心とし半径が  $\frac{a}{2}$  である

円  $S$  を, 極方程式で表せ。

- (2) 点  $O$  と曲線  $C_a$  上の点  $P \neq O$  とを結ぶ直線が円  $S$



と交わる点を  $Q$  とするとき、線分  $PQ$  の長さは一定であることを示せ。

- (3) 点  $P$  が曲線  $C_a$  上を動くとき、極座標が  $(2a, 0)$  の点と  $P$  との距離の最大値を求めよ。

【解答】 (1)  $r = a \cos \theta$  (2) 略 (3)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}a$

- (1)  $A(a, 0)$  とし、円  $S$  上の点を  $Q(r, \theta)$  とすると、 $OQ \perp AQ$ 、 $\angle AOQ = \theta$  から  $OQ = OA \cos \theta$

よって  $r = a \cos \theta$

- (2)  $O, P, Q$  は同一直線上にあるから、 $P(r_1, \theta), Q(r_2, \theta)$  とおく。

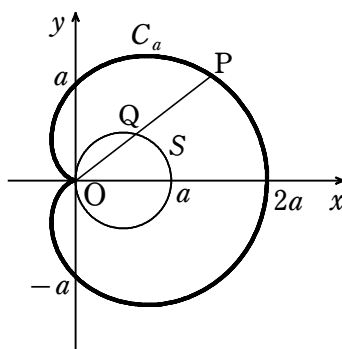
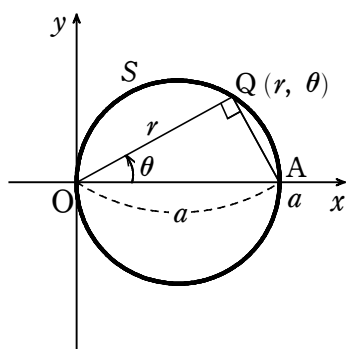
点  $P$  は曲線  $C_a$  上にあるから  $r_1 = a(1 + \cos \theta)$

点  $Q$  は円  $S$  上にあるから  $r_2 = a \cos \theta$

よって  $PQ = |r_1 - r_2| = |a| = a$  (一定)

(1)

(2)



- (3)  $B(2a, 0)$  として、 $\triangle OPB$  に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BP^2 &= OB^2 + OP^2 - 2OB \cdot OP \cos \theta \\ &= 4a^2 + a^2(1 + \cos \theta)^2 - 4a^2 \cos \theta (1 + \cos \theta) \\ &= a^2(-3\cos^2 \theta - 2\cos \theta + 5) \\ &= a^2 \left\{ -3 \left( \cos \theta + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{16}{3} \right\} \end{aligned}$$

よって、 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$  のとき  $BP^2$  が最大となる。

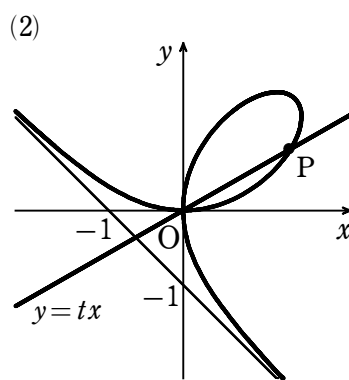
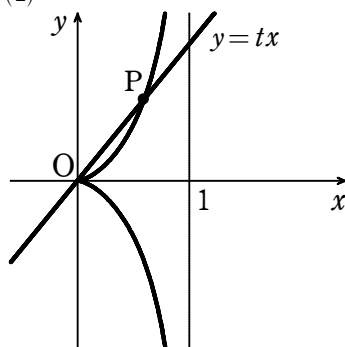
$a > 0$  より、 $BP$  の最大値は  $\sqrt{\frac{16}{3}a^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$

**C 26 - 3**

直線  $y=tx$  との共有点を (1)  
 考えて、次の方程式で表さ  
 れる曲線を、媒介変数  $t$  で  
 表せ。

$$(1) \quad y^2 - \frac{x^3}{1-x} = 0$$

$$(2) \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$$



**解答** (1)  $x = \frac{t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3}{1+t^2}$  (2)  $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$

(1)  $y=tx$  を  $y^2 - \frac{x^3}{1-x} = 0$  に代入すると  $t^2x^2 - \frac{x^3}{1-x} = 0$

よって  $x^2\{(1+t^2)x - t^2\} = 0$

ゆえに  $x=0$  または  $x = \frac{t^2}{1+t^2}$

これらを  $y=tx$  に代入すると

$x=0$  のとき  $y=0$  ..... ①

$x = \frac{t^2}{1+t^2}$  のとき  $y = \frac{t^3}{1+t^2}$  ..... ②

② の  $x, y$  に  $t=0$  を代入すると  $x=0, y=0$  となるから、① が表す点  $(0, 0)$  は ② の媒介変数表示で表される曲線に含まれている。

したがって、求める媒介変数表示は  $x = \frac{t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3}{1+t^2}$

(2)  $y=tx$  を  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  に代入すると  $x^3 + t^3x^3 - 3x \cdot tx = 0$

よって  $x^2\{(1+t^3)x - 3t\} = 0$

ここで  $t=-1$  のとき  $x=0$ ,  $t \neq -1$  のとき  $x=0, \frac{3t}{1+t^3}$

まとめると  $x=0$  または  $x = \frac{3t}{1+t^3}$

これらを  $y=tx$  に代入すると

$x=0$  のとき  $y=0$  ..... ①

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \text{ のとき } y = \frac{3t^2}{1+t^3} \quad \dots\dots ②$$

② の  $x, y$  に  $t=0$  を代入すると  $x=0, y=0$  となるから、① が表す点  $(0, 0)$  は ② の媒介変数表示で表される曲線に含まれている。

したがって、求める媒介変数表示は  $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$

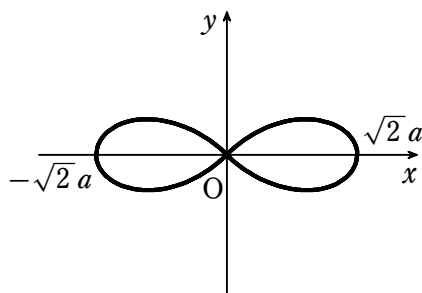
### C 26 - 4

2 定点  $A(-a, 0), B(a, 0)$  からの距離の積が  $a^2$  である点  $P$  の軌跡  $C$  はレムニスケートとよばれ、その概形は図ようになる。

- (1) レムニスケート  $C$  の方程式は、次の式で与えられることを示せ。

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

- (2) レムニスケート  $C$  の極方程式を求めよ。



**解答** (1) 略 (2)  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

$P$  の直交座標を  $(x, y)$  とし、極座標を  $(r, \theta)$  とする。

- (1)  $AP \cdot BP = a^2$  であるから  $AP^2 \cdot BP^2 = a^4$

$$\text{よって } \{(x+a)^2 + y^2\}\{(x-a)^2 + y^2\} = a^4$$

$$(x^2 + y^2 + a^2 + 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax) = a^4$$

$$\text{したがって } (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

$$\text{整理して } (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

- (2)  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, x^2 + y^2 = r^2$  であるから

$$(r^2)^2 = 2a^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)$$

$$r^4 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$r^4 = 2a^2 r^2 \cos 2\theta$$

$$r^2(r^2 - 2a^2 \cos 2\theta) = 0$$

ゆえに  $r=0$  または  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

$\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき  $r=0$  となるから、 $r=0$  は  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  に含まれる。

よって、求める極方程式は  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

## 第 27 章 数学Ⅲの関数

### A 27 - 1

次の関数の逆関数を求めよ。また、その値域を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{x-1}{x-2}$$

$$(2) \quad y = \frac{x+3}{x+2}$$

$$(3) \quad y = \frac{2x+1}{x+1} \quad (x \geq 0)$$

$$(4) \quad y = \frac{4x-1}{2x-1} \quad \left(\frac{1}{2} < x \leq 2\right)$$

**解答** 逆関数、値域の順に (1)  $y = \frac{2x-1}{x-1}$ ,  $y \neq 2$  (2)  $y = \frac{3-2x}{x-1}$ ,  $y \neq -2$

$$(3) \quad y = \frac{1-x}{x-2} \quad (1 \leq x < 2), \quad y \geq 0 \quad (4) \quad y = \frac{x-1}{2(x-2)} \quad \left(x \geq \frac{7}{3}\right), \quad \frac{1}{2} < y \leq 2$$

$$(1) \quad \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$$

であるから  $y = \frac{1}{x-2} + 1$

この関数の定義域は  $x \neq 2$ , 値域は  $y \neq 1$

$$y = \frac{x-1}{x-2} \text{ を } x \text{ について解くと, } y(x-2) = x-1 \text{ から } (y-1)x = 2y-1$$

$$y \neq 1 \text{ であるから } x = \frac{2y-1}{y-1}$$

よって、逆関数は、この  $x$  と  $y$  を入れかえて  $y = \frac{2x-1}{x-1}$

もとの関数の定義域が  $x \neq 2$  であるから、求める値域は  $y \neq 2$

$$(2) \quad \frac{x+3}{x+2} = \frac{(x+2)+1}{x+2} = \frac{1}{x+2} + 1$$

であるから  $y = \frac{1}{x+2} + 1$

この関数の定義域は  $x \neq -2$ , 値域は  $y \neq 1$

$$y = \frac{x+3}{x+2} \text{ を } x \text{ について解くと, } y(x+2) = x+3 \text{ から } (y-1)x = 3-2y$$

$$y \neq 1 \text{ であるから } x = \frac{3-2y}{y-1}$$

よって、逆関数は、この  $x$  と  $y$  を入れかえて  $y = \frac{3-2x}{x-1}$

もとの関数の定義域が  $x \neq -2$  であるから、求める値域は  $y \neq -2$

$$(3) \quad \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2$$

であるから  $y = -\frac{1}{x+1} + 2 \quad (x \geq 0)$

この関数のグラフは図のようになり、値域は  $1 \leq y < 2$

$y = \frac{2x+1}{x+1}$  を  $x$  について解くと、 $y(x+1) = 2x+1$  から

$$(y-2)x = 1-y$$

$y \neq 2$  であるから  $x = \frac{1-y}{y-2} \quad (1 \leq y < 2)$

よって、逆関数は、この  $x$  と  $y$  を入れかえて  $y = \frac{1-x}{x-2} \quad (1 \leq x < 2)$

もとの関数の定義域が  $x \geq 0$  であるから、求める値域は  $y \geq 0$

$$(4) \quad \frac{4x-1}{2x-1} = \frac{2(2x-1)+1}{2x-1} = \frac{1}{2x-1} + 2$$

であるから  $y = \frac{1}{2x-1} + 2 \quad \left(\frac{1}{2} < x \leq 2\right)$

この関数のグラフは図のようになり、値域は  $y \geq \frac{7}{3}$

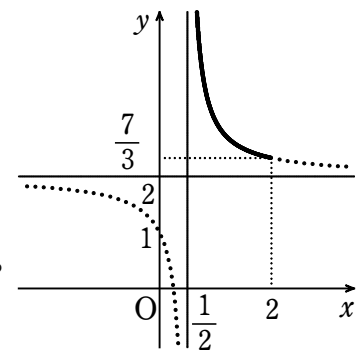
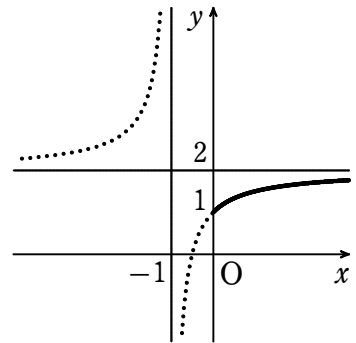
$y = \frac{4x-1}{2x-1}$  を  $x$  について解くと、 $y(2x-1) = 4x-1$  から

$$2(y-2)x = y-1$$

$y \neq 2$  であるから  $x = \frac{y-1}{2(y-2)} \quad \left(y \geq \frac{7}{3}\right)$

よって、逆関数は、この  $x$  と  $y$  を入れかえて  $y = \frac{x-1}{2(x-2)} \quad \left(x \geq \frac{7}{3}\right)$

もとの関数の定義域が  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  であるから、求める値域は  $\frac{1}{2} < y \leq 2$



## A 27 - 2

関数  $y = f(x) = \sqrt{5x}$  がある。

(1) 曲線  $y = f(x)$  と  $y$  軸に関して対称な曲線を  $y = g(x)$  とする。

この曲線  $y = g(x)$  を  $x$  軸方向に 10 だけ平行移動した曲線を  $y = h(x)$  とする。

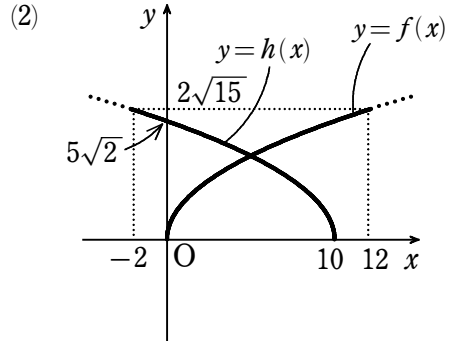
$y = g(x)$  と  $y = h(x)$  を求めよ。

(2) 関数  $y = f(x)$  と関数  $y = h(x)$  のグラフをかき、その共有点の座標を求めよ。

**解答** (1)  $g(x) = \sqrt{-5x}$ ,

$$h(x) = \sqrt{-5(x-10)}$$

(2) [図] 実線部分 (3) とともに 5



(1)  $g(x) = f(-x) = \sqrt{-5x}$ ,

$$h(x) = g(x-10) = \sqrt{-5(x-10)}$$

(2) グラフは右の図の実線部分のようになる。

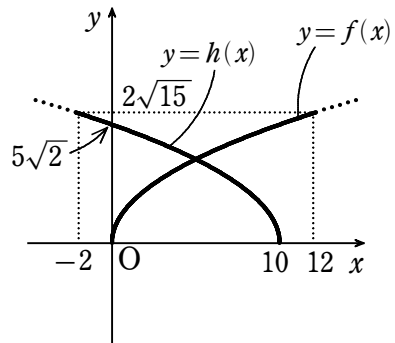
(3)  $\sqrt{5x} = \sqrt{-5(x-10)}$  であるから

$$5x = -5(x-10)$$

ゆえに  $x = 5$

このとき  $y = f(5) = \sqrt{25} = 5$

よって,  $x, y$  座標はともに 5 である。



### A 27 - 3

次の関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  について,  $(g \circ f)(x)$  の定義域と値域を求めよ。

(1)  $f(x) = 2x + 3$  ( $1 \leq x \leq 3$ ),  $g(x) = x^2$  ( $0 \leq x \leq 10$ )

(2)  $f(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x+1}$

**解答** (1) 定義域  $1 \leq x \leq 3$ , 値域  $25 \leq y \leq 81$

(2) 定義域  $x \geq -4$ , 値域  $0 < y \leq 1$

(1)  $f(x)$  の定義域  $1 \leq x \leq 3$  における値域は  $5 \leq f(x) \leq 9$  で,  $g(x)$  の定義域  $0 \leq x \leq 10$  に含まれるから, 合成関数  $(g \circ f)(x)$  が定義できる。

よって,  $(g \circ f)(x)$  の定義域は  $1 \leq x \leq 3$

また,  $5 \leq x \leq 9$  における  $g(x)$  の値域は  $25 \leq g(x) \leq 81$  であるから,

$(g \circ f)(x)$  の値域は  $25 \leq y \leq 81$

(2)  $f(x)$  の定義域  $x \geq -4$  における値域は  $f(x) \geq 0$  で,  $g(x)$  の定義域  $x \neq -1$  に含まれるから, 合成関数  $(g \circ f)(x)$  が定義できる。

よって,  $(g \circ f)(x)$  の定義域は  $x \geq -4$

また,  $x \geq 0$  における  $g(x)$  の値域は  $0 < g(x) \leq 1$  であるから,

$(g \circ f)(x)$  の値域は  $0 < y \leq 1$

### B 27 - 1

関数  $y = 3\cos(4\theta - 3\pi)$  のグラフは、 $y = \cos 4\theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $\overset{\text{ア}}{\square} \pi$  だけ平行移動し、 $\theta$  軸をもとにして  $y$  軸方向に  $\overset{\text{イ}}{\square}$  倍拡大したものである。また、この関数の周期は  $\overset{\text{ウ}}{\square} \pi$  である。

**解答** (ア)  $\frac{3}{4}$  (イ) 3 (ウ)  $\frac{1}{2}$

$$3\cos(4\theta - 3\pi) = 3\cos 4\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right)$$

したがって、 $y = 3\cos(4\theta - 3\pi)$  のグラフは、 $y = \cos 4\theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $\frac{3}{4}\pi$  だけ平行移動し、 $\theta$  軸をもとにして  $y$  軸方向に 3 倍拡大したものである。

周期は  $2\pi \div 4 = \frac{1}{2}\pi$

### B 27 - 2

座標平面において、 $y = \log_2 x$  のグラフを  $y$  軸方向に 3 だけ平行移動して得られるグラフの方程式は  $y = \log_2(\overset{\text{ア}}{\square} x)$  であり、このグラフと  $x$  軸との交点の  $x$  座標は  $\overset{\text{イ}}{\square}$  である。

**解答** (ア) 8 (イ)  $\frac{1}{8}$

$y = \log_2 x$  を  $y$  軸方向に 3 平行移動すると  $y = \log_2 x + 3$

よって  $y = \log_2 x + \log_2 2^3 = \log_2 \overset{\text{ア}}{\square} x$

$x$  軸との交点の  $x$  座標は、 $\log_2 8x = 0$  から  $8x = 1$  ゆえに  $x = \overset{\text{イ}}{\square} \frac{1}{8}$

### B 27 - 3

関数  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  のグラフは、関数  $y = \frac{-2x+5}{x-2}$  のグラフを、どのように平行移動した

ものか。

**解答**  $x$  軸方向に  $-3$ ,  $y$  軸方向に  $4$  だけ平行移動

$$y = \frac{2x+3}{x+1} \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad y = \frac{-2x+5}{x-2} \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{とする。}$$

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 2$$

$$\frac{-2x+5}{x-2} = \frac{-2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 2$$

から,  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  のグラフはともに  $y = \frac{1}{x}$  のグラフを

平行移動したものである。

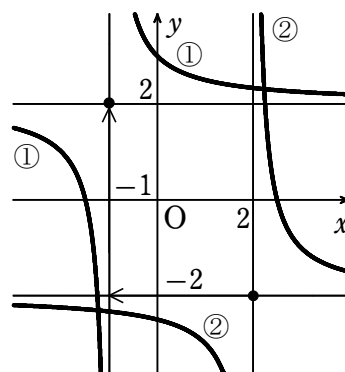
また,  $\textcircled{1}$  の漸近線は 2 直線  $x = -1$ ,  $y = 2$ ,

$\textcircled{2}$  の漸近線は 2 直線  $x = 2$ ,  $y = -2$

よって,  $\textcircled{2}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $p$ ,  $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動したとき,  $\textcircled{1}$  のグラフに重なるとすると  $2 + p = -1$ ,  $-2 + q = 2$

ゆえに  $p = -3$ ,  $q = 4$

したがって,  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  のグラフは,  $y = \frac{-2x+5}{x-2}$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-3$ ,  $y$  軸方向に  $4$  だけ平行移動したものである。



### B 27 - 4

次の不等式を解け。

$$(1) \quad \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 1} < 0$$

$$(2) \quad \frac{4}{x+1} \leq \frac{1}{x-1}$$

**解答** (1)  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $1 < x < 2$     (2)  $x < -1$ ,  $1 < x \leq \frac{5}{3}$

(1) 不等式から  $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-1} < 0$

左辺を  $P$  とおき,  $P$  の符号を調べると, 次の表のようになる。

|        |     |                |     |   |     |   |     |
|--------|-----|----------------|-----|---|-----|---|-----|
| $x$    | ... | $-\frac{1}{2}$ | ... | 1 | ... | 2 | ... |
| $x-1$  | -   | -              | -   | 0 | +   | + | +   |
| $2x+1$ | -   | 0              | +   | + | +   | + | +   |
| $x-2$  | -   | -              | -   | - | -   | 0 | +   |
| $P$    | -   | 0              | +   | / | -   | 0 | +   |

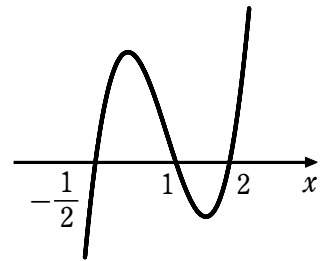
この表から、解は  $x < -\frac{1}{2}, 1 < x < 2$

**別解** 不等式から  $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-1} < 0$

両辺に  $(x-1)^2 (>0)$  を掛けて

$$(2x+1)(x-2)(x-1) < 0, x \neq 1$$

よって  $x < -\frac{1}{2}, 1 < x < 2$



(2) 不等式から  $\frac{4(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$  すなわち  $\frac{3x-5}{(x+1)(x-1)} \leq 0$

左辺を  $P$  とおき、 $P$  の符号を調べると、次の表のようになる。

|        |     |    |     |   |     |               |     |
|--------|-----|----|-----|---|-----|---------------|-----|
| $x$    | ... | -1 | ... | 1 | ... | $\frac{5}{3}$ | ... |
| $3x-5$ | -   | -  | -   | - | -   | 0             | +   |
| $x+1$  | -   | 0  | +   | + | +   | +             | +   |
| $x-1$  | -   | -  | -   | 0 | +   | +             | +   |
| $P$    | -   | /  | +   | / | -   | 0             | +   |

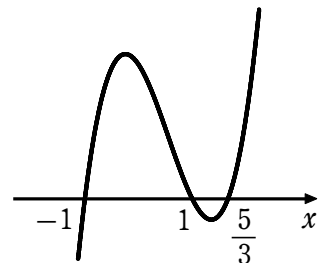
この表から、解は  $x < -1, 1 < x \leq \frac{5}{3}$

**別解** 不等式から  $\frac{3x-5}{(x+1)(x-1)} \leq 0$

両辺に  $(x+1)^2(x-1)^2 (>0)$  を掛けて

$$(3x-5)(x+1)(x-1) \leq 0, x \neq \pm 1$$

よって  $x < -1, 1 < x \leq \frac{5}{3}$



$$(1) \sqrt{x^2 - x} \leq 3 - x$$

$$(2) \sqrt{13 - x^2} > x + 1$$

**解答** (1)  $x = -\frac{3}{4}$  (2)  $x = 0, 5$  (3)  $x \leq 0, 1 \leq x \leq \frac{9}{5}$  (4)  $-\sqrt{13} \leq x < 2$

(1) 与式から  $x^2 + 1 \geq 0$  …… ①,  $x + 2 \geq 0$  …… ②,  $x^2 + 1 = (x + 2)^2$  …… ③

① は常に成り立つ。

② から  $x \geq -2$  …… ④

③ を整理すると  $4x + 3 = 0$  よって  $x = -\frac{3}{4}$

これは ④ を満たす。

したがって、求める解は  $x = -\frac{3}{4}$

(2) 与式から  $10x - x^2 \geq 0$  …… ①,  $x \geq 0$  …… ②,  $10x - x^2 = x^2$  …… ③

① から  $x(x - 10) \leq 0$  よって  $0 \leq x \leq 10$  …… ④

③ を整理すると  $2x^2 - 10x = 0$   $2x(x - 5) = 0$  よって  $x = 0, 5$

これは ②, ④ を満たす。

したがって、求める解は  $x = 0, 5$

**参考**  $y = \sqrt{10x - x^2}$  のグラフを考える。

両辺を平方すると  $y^2 = 10x - x^2$   $(x - 5)^2 + y^2 = 5^2$

つまり、点 (5, 0) を中心とする半径 5 の円の上側半分を表している。

(3) 与式から  $x^2 - x \geq 0$  …… ①,  $3 - x \geq 0$  …… ②,  $x^2 - x \leq (3 - x)^2$  …… ③

① から  $x(x - 1) \geq 0$  よって  $x \leq 0, 1 \leq x$  …… ④

② から  $x \leq 3$  …… ⑤

③ から  $x^2 - x \leq 9 - 6x + x^2$  整理すると  $5x - 9 \leq 0$  よって  $x \leq \frac{9}{5}$  …… ⑥

④, ⑤, ⑥ の共通範囲を求めて

$$x \leq 0, 1 \leq x \leq \frac{9}{5}$$

(4) (i)  $x + 1 \geq 0$  …… ① のとき、両辺を平方すると  $13 - x^2 > (x + 1)^2$

整理すると  $x^2 + x - 6 < 0$   $(x + 3)(x - 2) < 0$

① から  $-1 \leq x < 2$  …… ②

(ii)  $x + 1 < 0$  …… ③ のとき、 $13 - x^2 \geq 0$  ならば与えられた不等式は成り立つ。

$(\sqrt{13} + x)(\sqrt{13} - x) \geq 0$  から  $-\sqrt{13} \leq x \leq \sqrt{13}$

③ から  $-\sqrt{13} \leq x < -1$  …… ④

②, ④ を合わせた共通範囲を求めて

$$-\sqrt{13} \leq x < 2$$

**参考**  $y = \sqrt{13 - x^2}$  のグラフを考える。

$$\text{両辺を平方すると } y^2 = 13 - x^2 \quad x^2 + y^2 = 13$$

つまり, 原点  $(0, 0)$  を中心とする半径  $\sqrt{13}$  の円の上側半分を表している。

### B 27 - 6

関数  $f(x) = \frac{ax+b}{x+3}$  とその逆関数  $f^{-1}(x)$  について,  $f(1)=1$ ,  $f^{-1}(4)=-1$  であるとき, 定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。

**解答**  $a = -2$ ,  $b = 6$

$$f(1)=1 \text{ より } \frac{a+b}{1+3}=1$$

$$\text{すなわち } a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f^{-1}(4)=-1 \text{ より } f(-1)=4$$

$$\text{よって } \frac{-a+b}{-1+3}=4$$

$$\text{すなわち } -a+b=8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } a = -2, b = 6$$

### C 27 - 1

関数  $f(x) = \sqrt{x+1}$  について, 次の問いに答えよ。

(1) 逆関数  $f^{-1}(x)$  を求めよ。

(2) 不等式  $f^{-1}(x) \geq f(x)$  を満たす  $x$  の値の範囲を求めよ。

**解答** (1)  $f^{-1}(x) = x^2 - 1 \quad (x \geq 0)$  (2)  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  (3)  $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(1) 関数  $y = f(x)$  について, 値域は  $y \geq 0$  である。

$$y = \sqrt{x+1} \text{ を } x \text{ について解くと } x = y^2 - 1 \quad (y \geq 0)$$

$$\text{よって, 求める逆関数は } f^{-1}(x) = x^2 - 1 \quad (x \geq 0)$$

(2) 求める共有点は直線  $y = x$  上にあるから,  $y = f(x)$  と  $y = x$  のグラフの共有点を求めればよい。

$$\sqrt{x+1} = x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

の両辺を 2 乗して整理すると  $x^2 - x - 1 = 0$

これを解くと  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

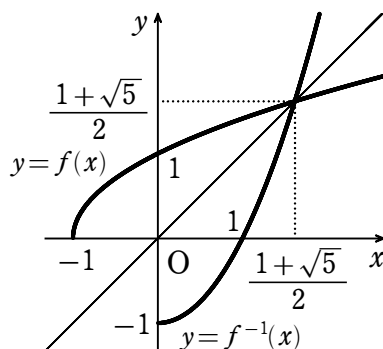
このうち、① を満たすのは  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

よって、求める共有点の座標は  $\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$

(3)  $y = \sqrt{x+1}$ ,  $y = x^2 - 1$  ( $x \geq 0$ ) のグラフは、  
右の図のようになる。

グラフより、 $f^{-1}(x) \geq f(x)$  を満たす  $x$  の値の範

囲は  $x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$



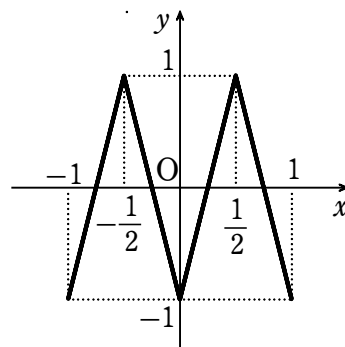
### C 27 - 2

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (-1 \leq x \leq 0) \\ -2x+1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$  のように定義された関数  $f(x)$  について

(1)  $y = (f \circ f)(x)$  のグラフをかけ。

(2)  $(f \circ f)(a) = f(a)$  となる  $a$  を求めよ。

**解答** (1) [図] (2)  $a = \pm 1, \pm \frac{1}{3}$



(1)  $y=f(x)$  のグラフは右の図のようになる。

また,  $-1 \leq f(x) \leq 0$  のとき

$$(f \circ f)(x) = 2f(x) + 1,$$

$0 \leq f(x) \leq 1$  のとき

$$(f \circ f)(x) = -2f(x) + 1$$

したがって,  $y=(f \circ f)(x)$  は

$$-1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$y = 2(2x+1) + 1 = 4x + 3$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \text{ のとき}$$

$$y = -2(2x+1) + 1 = -4x - 1$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$y = -2(-2x+1) + 1 = 4x - 1$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ のとき}$$

$$y = 2(-2x+1) + 1 = -4x + 3$$

よって,  $y=(f \circ f)(x)$  のグラフは, 右の図のようになる。

(2) (1) で求めたグラフと  $y=f(x)$  のグラフの共有点の  $x$  座標が, 求める  $a$  の値である。

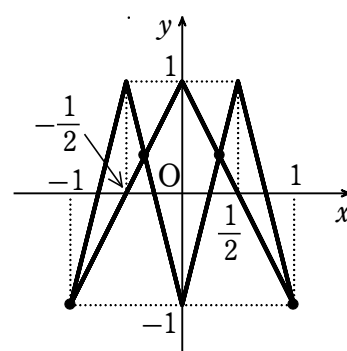
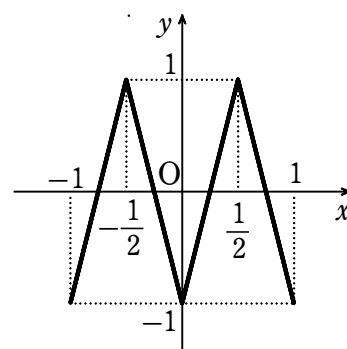
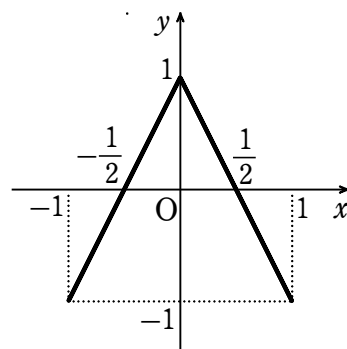
両者のグラフを重ね合わせると, 右のようになり, 共有点は 4 個ある。

$$-4x - 1 = 2x + 1 \text{ とすると } x = -\frac{1}{3}$$

$$4x - 1 = -2x + 1 \text{ とすると } x = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって, 4 個の共有点の } x \text{ 座標は } x = \pm 1, \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{したがって } a = \pm 1, \pm \frac{1}{3}$$



## 第 28 章 数学Ⅲの極限

### A 28 - 1

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x-1} + 1 \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left( 1 - \frac{2}{x+1} \right)$$

**解答** (1)  $-1$  (2)  $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x-1} + 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{1+(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left( 1 - \frac{2}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x+1)-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### A 28 - 2

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2+3x+1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+x}{-x^3+4x^2+2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-5x-2}{x^2-3x+2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2+5x+2}{x^2-x+1}$$

**解答** (1)  $0$  (2)  $0$  (3)  $3$  (4)  $-2$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2+3x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+x}{-x^3+4x^2+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 3$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 5x + 2}{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -2$$

**A 28 - 3**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) = \boxed{\phantom{00}}$$

**解答**  $-\frac{3}{2}$

$-x = t$  とおくと  $t \rightarrow +\infty$

$$(\text{与式}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2 - 3t} - t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-3t}{\sqrt{t^2 - 3t} + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{t}} + 1} = -\frac{3}{2} \quad \text{答}$$

**A 28 - 4**

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2^n}\right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n + 1}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 2^n}{7^n - 2^n}$$

**解答** (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4)  $\infty$  (5) 3 (6) 1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 2$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} = \infty$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 2^n}{7^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{7}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n} = 1$$

**A 28 - 5**

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 2^n)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n+1} - 3^n)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n} - 3^{n+1})$$

**解答** (1)  $\infty$  (2)  $-\infty$  (3)  $\infty$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right\} = \infty$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{n+1} - 3^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left\{ 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right\} = -\infty$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n} - 3^{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left\{ 1 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} = \infty$$

**A 28 - 6**

次の極限值を求めよ。

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$$

**解答** (1) 4 (2)  $\frac{1}{3}$  (3)  $\frac{1}{2}$  (4) 2 (5) 1 (6)  $\frac{3}{5}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{2} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot \frac{1}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \\
 &= \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

**A 28 - 7**

次の極限を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \qquad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \qquad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$$

**解答** (1) 2 (2) 2 (3) 4

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{x^2(1 + \cos 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2(1 + \cos 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2(1 + \cos 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 4 \cdot \left( \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 2x} \right\} \\
 &= 4 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{別解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 2 \cdot \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \right\} = 2 \cdot 1^2 = 2$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot (1 + \cos x) \right\} \\
 &= 1^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4
 \end{aligned}$$

**A 28 - 8**

次の極限值を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (1 + 3h)^{\frac{1}{h}} \qquad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^x \qquad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x+2}{x}$$

**解答** (1)  $e^3$  (2)  $e^3$  (3) 2(1)  $3h = t$  とおくと,  $h \rightarrow 0$  のとき  $t \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+3h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^3 = e^3$$

(2)  $\frac{3}{x} = t$  とおくと,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow +0$

よって  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{\frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^3 = e^3$

(3)  $\frac{2}{x} = t$  とおくと,  $x \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow +0$

よって  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow +0} \log (1+t)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow +0} \log \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^2$   
 $= \log e^2 = 2$

**A 28 - 9**

次の無限等比数列の極限を調べよ。

(1)  $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{32}{27}, \dots$

(2)  $3+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-1, 5-3\sqrt{2}, \dots$

**解答** (1) 極限はない (2) 0

(1) 公比  $r$  は  $r = -\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = -\frac{4}{3} < -1$

よって, この数列は振動して, 極限はない。

(2) 公比  $r$  は  $r = \frac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{7\sqrt{2}-7}{9-2} = \sqrt{2}-1$

$|\sqrt{2}-1| < 1$  であるから, 0 に収束する。

**A 28 - 10**

次の極限を求めよ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x-1|}{x-1}$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x-1|}{x-1}$  (3)  $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3}$  (4)  $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3}$

**解答** (1) -1 (2) 1 (3)  $-\infty$  (4)  $\infty$

(1)  $x < 1$  のとき  $|x-1| = -(x-1)$

よって  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

(2)  $x > 1$  のとき  $|x-1| = x-1$

よって  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{x-1} = 1$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3} = \infty$

### B 28 - 1

次の等式が成り立つように、定数  $a$ ,  $b$  の値を定めよ。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - ax - b) = 5$$

**解答**  $a = 1$ ,  $b = -3$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} - ax - b$  とおき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$  …… ① が成り立つとする。

$a \leq 0$  とすると  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  となるから、① が成り立つとき  $a > 0$

$x \rightarrow \infty$  のときを考えるから、 $x > 0$  としてよい。

$$\begin{aligned} \text{よって } f(x) &= \frac{(x^2 + 4x) - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + (ax + b)} = \frac{(1 - a^2)x^2 + (4 - 2ab)x - b^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + (ax + b)} \\ &= \frac{(1 - a^2)x + (4 - 2ab) - \frac{b^2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + a + \frac{b}{x}} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

① が成り立つには  $1 - a^2 = 0$   $a > 0$  から  $a = 1$

これと ② より  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 - b$

$2 - b = 5$  のとき ① が成り立つから  $b = -3$

したがって  $a = 1$ ,  $b = -3$

### B 28 - 2

次の極限を求めよ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\sin^3 x}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$

**解答** (1) 4 (2)  $\frac{1}{2}$  (3) 1 (4)  $-\pi$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x \cos x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x \cos x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x(1 + \cos x)}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 2 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x(1 + \cos x) \right\} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin^3 x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos^2 x)}{\sin^3 x(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2 x}{\sin^3 x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \sin x = t \text{ とおくと } x \rightarrow 0 \text{ のとき } t \rightarrow 0$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

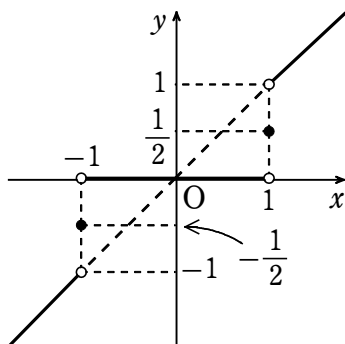
$$(4) \quad x - 1 = t \text{ とおくと } x \rightarrow 1 \text{ のとき } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t + \pi)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( -\pi \cdot \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right) \\
 &= -\pi \cdot 1 = -\pi
 \end{aligned}$$

### B 28- 3

関数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$  について、 $y = f(x)$  のグラフをかけ。また、 $f(x)$  が不連続となる  $x$  の値を求めよ。

**解答**  $x = \pm 1$  で不連続, [図]



[1]  $x^2 < 1$  すなわち  $-1 < x < 1$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0 \text{ であるから } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} = 0$$

[2]  $x^2 = 1$  すなわち  $x = \pm 1$  のとき

$$x=1 \text{ のとき } f(x)=\frac{1}{2}, \quad x=-1 \text{ のとき } f(x)=-\frac{1}{2}$$

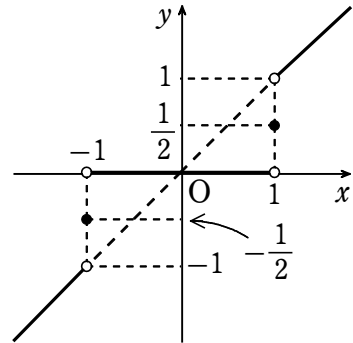
[3]  $x^2 > 1$  すなわち  $x < -1$ ,  $1 < x$  のとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$  であるから

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = x$$

よって,  $y = f(x)$  のグラフは右の図のようになる。

また,  $f(x)$  は  $x = \pm 1$  で不連続である。



### B 28 - 4

$r$  を正の定数とする。極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}}$  を求めよ。

**解答**  $0 < r < 3$  のとき  $-9$ ,  $r = 3$  のとき  $-2$ ,  $r > 3$  のとき  $\frac{1}{r}$

[1]  $0 < r < 3$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{r}{3} \right)^{n-1} - 3}{\left( \frac{r}{3} \right)^n + \frac{1}{3}} = -9$$

[2]  $r = 3$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 3^{n+1}}{3^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}(1 - 3^2)}{3^{n-1}(3 + 1)} = -2$$

[3]  $r > 3$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r} - 3 \left( \frac{3}{r} \right)^n}{1 + \frac{1}{r} \left( \frac{3}{r} \right)^{n-1}} = \frac{1}{r}$$

### B 28 - 5

無限等比級数  $(2+x) - \frac{(2+x)x}{2} + \frac{(2+x)x^2}{4} - \frac{(2+x)x^3}{8} + \cdots$  が, 収束するような  $x$  の値の範囲を求めよ。

**解答**  $-2 \leq x < 2$

この無限等比級数の初項は  $2+x$ ，公比は  $-\frac{x}{2}$

したがって，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$$2+x=0 \quad \text{または} \quad \left| -\frac{x}{2} \right| < 1$$

$$2+x=0 \quad \text{のとき} \quad x=-2$$

$$\left| -\frac{x}{2} \right| < 1 \quad \text{のとき} \quad -1 < -\frac{x}{2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad -2 < x < 2$$

よって，求める  $x$  の値の範囲は  $-2 \leq x < 2$

### B 28 - 6

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$$

**解答** 1

関数  $f(x) = e^x$  は，すべての実数  $x$  について微分可能で  $f'(x) = e^x$   
 $x \rightarrow +0$  であるから， $0 < x < \pi$  としてよい。

このとき  $0 < \sin x$

区間  $[0, \sin x]$  において，平均値の定理を用いると

$$\frac{e^{\sin x} - e^0}{\sin x - 0} = e^c, \quad 0 < c < \sin x$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = e^c, \quad 0 < c < \sin x$$

を満たす  $c$  が存在する。

$$\lim_{x \rightarrow +0} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0 \quad \text{であるから} \quad \lim_{x \rightarrow +0} c = 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^c = e^0 = 1$$

### B 28 - 7

次の無限級数の和を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^{n-1}} \right) \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{3^n} - \frac{3}{4^{n-1}} \right)$$

**解答** (1)  $\frac{9}{4}$       (2)  $-3$

- (1) 無限等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$  の公比は、それぞれ  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{5}$  で公比の絶対値が 1 より小さいから、これらはともに収束する。

よって、求める和  $S$  は

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$

- (2) 無限等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$  の公比は、それぞれ  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  で公比の絶対値が 1 より小さいから、これらはともに収束する。

よって、求める和  $S$  は

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - 4 = -3$$

### B 28 - 8

次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

- (1)  $\left(\frac{3}{2} - 5\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{5}{27}\right) + \cdots$   
 (2)  $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{16} + \cdots$   
 (3)  $\frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{6}} + \cdots$

**解答** (1) 収束、和  $-\frac{9}{2}$  (2) 発散 (3) 発散

- (1) 第  $n$  項は  $\frac{3}{2^n} - \frac{5}{3^{n-1}}$

無限等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}}$  の公比は、それぞれ  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  で公比の絶対値が 1 より

小さいから、これらはともに収束する。

よって、無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{5}{3^{n-1}}\right)$  は収束し、その和  $S$  は

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{5}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 3 - \frac{15}{2} = -\frac{9}{2}$$

(2) 第  $n$  項を  $a_n$  とすると  $a_n = \frac{2n-1}{4n}$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{4} = \frac{1}{2}$

よって、数列  $\{a_n\}$  は 0 に収束しないから、この無限級数は発散する。

(3) 第  $n$  項は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{(n+2) - n} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \end{aligned}$$

第  $n$  項までの部分和を  $S_n$  とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})\} \\ &= \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) \end{aligned}$$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

よって、この無限級数は発散する。

## B 28 - 9

次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

(1)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{6} + \frac{7}{11} + \frac{11}{18} + \cdots$  (2)  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$

(3)  $\frac{1}{3} + \frac{1+2}{9} + \frac{1+2+4}{27} + \frac{1+2+4+8}{81} + \cdots$

**解答** (1) 発散 (2) 収束, 和  $\frac{1}{4}$  (3) 収束, 和  $\frac{3}{2}$

(1) 第  $n$  項の分子を  $a_n$ , 分母を  $b_n$  とする。

数列  $\{a_n\}$  の階差数列は 1, 2, 3, 4,  $\cdots$

この第  $n$  項は  $n$

よって、 $n \geq 2$  のとき  $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$

数列  $\{b_n\}$  の階差数列は 1, 3, 5, 7,  $\cdots$

この第  $n$  項は  $2n-1$

よって、 $n \geq 2$  のとき  $b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = 2 + n(n-1) - (n-1) = n^2 - 2n + 3$

したがって、 $n \geq 2$  のとき、この無限級数の第  $n$  項  $c_n$  は  $c_n = \frac{n^2 - n + 2}{2(n^2 - 2n + 3)}$

$$\text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{2(n^2 - 2n + 3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

よって、数列  $\{c_n\}$  は 0 に収束しないから、与えられた無限級数は発散する。

$$(2) \text{ 第 } n \text{ 項は} \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

第  $n$  項までの部分和を  $S_n$  とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left( \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots + \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

よって、この無限級数は収束し、その和は  $\frac{1}{4}$

$$(3) \text{ 第 } n \text{ 項を } a_n \text{ とすると} \quad a_n = \frac{1+2+4+\cdots+2^{n-1}}{3^n} = \frac{2^n-1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

無限等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$  の公比は、それぞれ  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  で公比の絶対値が 1 より

小さいから、これらはともに収束する。

よって、この無限級数は収束し、その和  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

## C 28 - 1

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan 2x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin \pi x}{x+1}$$

**解答** (1)  $-1$  (2)  $-\pi$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} \right) \\ = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

(2)  $x+1=\theta$  とおくと,  $x \rightarrow -1$  のとき  $\theta \rightarrow 0$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin \pi x}{x+1} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\theta - \pi)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi\theta}{\theta} = -\lim_{\theta \rightarrow 0} \pi \cdot \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta} \\ = -\pi \cdot 1 = -\pi$$

## C 28 - 2

極限値  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+[x]}{x+1}$  を求めよ。ただし,  $[ \ ]$  はガウス記号を表す。

**解答** (1)  $0$  (2)  $2$

(1)  $0 \leq |\cos x| \leq 1$  であるから,  $x > 0$  のとき

$$0 \leq \left| \frac{\cos x}{x} \right| = \frac{|\cos x|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos x}{x} \right| = 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

**別解**  $-1 \leq \cos x \leq 1$  であるから,  $x > 0$  のとき

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

(2)  $[x] \leq x < [x] + 1$  であるから  $x-1 < [x] \leq x$

$$\text{ゆえに} \quad 2x-1 < x+[x] \leq 2x$$

$$x > 0 \text{ のとき} \quad \frac{2x-1}{x+1} < \frac{x+[x]}{x+1} \leq \frac{2x}{x+1}$$

$$\text{ここで} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x}} = 2$$

よって  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + [x]}{x+1} = 2$

**C 28 - 3**

次の極限を求めよ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{3x}$

**解答** (1) 0 (2) 0

(1)  $0 \leq \left| \sin \frac{1}{2x} \right| \leq 1$  より  $0 \leq x^2 \left| \sin \frac{1}{2x} \right| \leq x^2$

すなわち  $0 \leq x^2 \sin \frac{1}{2x} \leq x^2$

ここで,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  であるから  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 \sin \frac{1}{2x} \right| = 0$

よって  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2x} = 0$

(2)  $0 \leq |\cos x| \leq 1$  より  $0 \leq \frac{|\cos x|}{|3x|} \leq \frac{1}{|3x|}$

すなわち  $0 \leq \frac{\cos x}{3x} \leq \frac{1}{|3x|}$

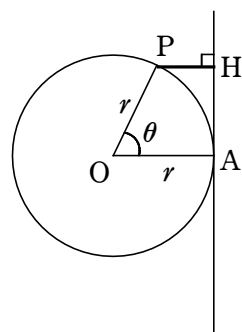
ここで,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|3x|} = 0$  であるから  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{\cos x}{3x} \right| = 0$

よって  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{3x} = 0$

**C 28 - 4**

半径  $r$  の円  $O$  の周上に定点  $A$  と動点  $P$  がある。

右の図のように、 $A$  における接線に  $P$  から下ろした垂線を  $PH$  とし、 $\angle POA = \theta$  とする。このとき、次の問いに答えよ。



- (1)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。 $AH$ ,  $PH$ ,  $\widehat{AP}$  の長さを、 $\theta$  を用いて

それぞれ表せ。ただし、 $\widehat{AP}$  は、弧  $AP$  の長さを表す。

- (2)  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH^2}{PH}$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\widehat{AP}^2}{PH}$  を求めよ。

**解答** (1)  $AH = r \sin \theta$ ,  $PH = r(1 - \cos \theta)$ ,  $\widehat{AP} = r\theta$

$$(2) \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH^2}{PH} = 2r, \quad \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\widehat{AP}^2}{PH} = 2r$$

- (1) 点  $P$  から  $OA$  に下ろした垂線を  $PQ$  とすると

$$AH = QP = r \sin \theta$$

$$PH = QA = OA - OQ = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

$$\widehat{AP} = r\theta$$

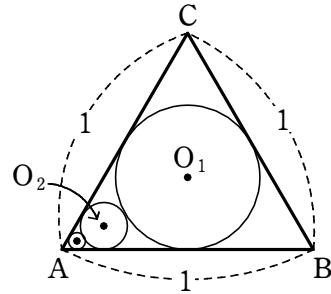
$$(2) \frac{AH^2}{PH} = \frac{(r \sin \theta)^2}{r(1 - \cos \theta)} = \frac{r^2 \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{r(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{r^2 \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{r \sin^2 \theta} = r(1 + \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{AP}^2}{PH} &= \frac{(r\theta)^2}{r(1 - \cos \theta)} = \frac{r^2 \theta^2 (1 + \cos \theta)}{r(1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{r^2 \theta^2 (1 + \cos \theta)}{r \sin^2 \theta} = r \left( \frac{\theta}{\sin \theta} \right)^2 (1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH^2}{PH} = \lim_{\theta \rightarrow +0} r(1 + \cos \theta) = 2r$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\widehat{AP}^2}{PH} = \lim_{\theta \rightarrow +0} r \left( \frac{\theta}{\sin \theta} \right)^2 (1 + \cos \theta) = 2r$$

1 辺が 1 の正三角形  $ABC$  の内接円を  $O_1$  とし、 $O_1$  に外接し、辺  $AB$ ,  $AC$  に接する円を  $O_2$ ,  $O_2$  に外接し、辺  $AB$ ,  $AC$  に接する円を  $O_3$  とし、以下同様にして、円  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $\dots$ ,  $O_n$ ,  $\dots$  を作るとき、円の面積の総和を求めよ。ただし、円  $O_n$  の半径を  $r_n$  とするとき、 $r_n > r_{n+1}$  とする。



**解答**  $\frac{3}{32}\pi$

円  $O_n$  の半径を  $r_n$ , 面積を  $S_n$  とし、点  $O_{n+1}$  を通り辺  $AB$  に平行な直線と点  $O_n$  から  $AB$  に下ろした垂線との交点を  $H_n$  とする。

$\triangle O_n O_{n+1} H_n$  において、 $\angle O_n O_{n+1} H_n = 30^\circ$  であるから

$$O_n O_{n+1} \sin 30^\circ = O_n H_n$$

すなわち  $(r_n + r_{n+1}) \cdot \frac{1}{2} = r_n - r_{n+1}$

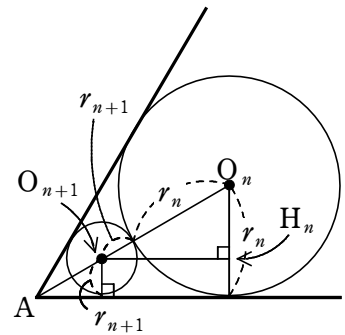
よって  $r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n$

したがって、円  $O_n$  と円  $O_{n+1}$  の面積比は  $9:1$  であるから  $S_{n+1} = \frac{1}{9} S_n$

また、 $r_1 = \frac{1}{2} \tan 30^\circ = \frac{1}{2\sqrt{3}}$  であるから  $S_1 = \frac{\pi}{12}$

ゆえに、円の面積の総和は、初項  $\frac{\pi}{12}$ , 公比  $\frac{1}{9}$  ( $\left|\frac{1}{9}\right| < 1$ ) の無限等比級数の和で表され

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{12}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{32}\pi$$

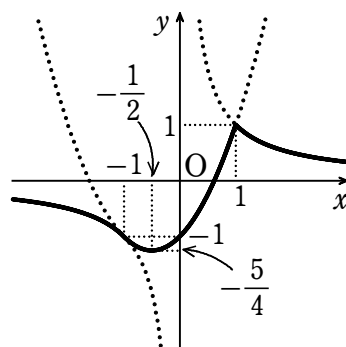


## C 28 - 6

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + x^2 + ax + b}{x^{2n} + 1}$  が連続関数であるとき

- (1) 定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。
- (2) 関数  $y = f(x)$  のグラフの概形をかけ。

【解答】 (1)  $a=1, b=-1$  (2) [図]



(1)  $-1 < x < 1$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$  であるから

$$f(x) = \frac{0 + x^2 + ax + b}{0 + 1} = x^2 + ax + b$$

$x < -1, 1 < x$  のとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n-1}} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n-2}} = 0$  であるから

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{2n-2}} + \frac{a}{x^{2n-1}} + \frac{b}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{\frac{1}{x} + 0 + 0 + 0}{1 + 0} = \frac{1}{x}$$

これらは、 $|x| < 1, |x| > 1$  のそれぞれで連続である。

$$x=1 \text{ のとき} \quad f(x) = \frac{1+1+a+b}{1+1} = \frac{a+b+2}{2}$$

$$x=-1 \text{ のとき} \quad f(x) = \frac{-1+1-a+b}{1+1} = \frac{-a+b}{2}$$

$$\text{また} \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (x^2 + ax + b) = 1 - a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x} = -1$$

$f(x)$  が  $x = \pm 1$  においても連続であるための条件は

$$1 + a + b = 1 = \frac{a+b+2}{2} \quad \text{すなわち} \quad a+b=0$$

$$-1 = 1 - a + b = \frac{-a+b}{2} \quad \text{すなわち} \quad -a+b=-2$$

これを解くと  $a=1, b=-1$

(2) (1) により

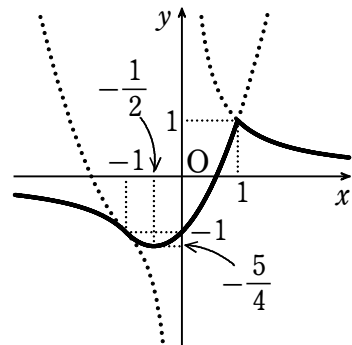
$|x| \leq 1$  のとき

$$f(x) = x^2 + x - 1,$$

$|x| > 1$  のとき

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

よって、グラフは [図]



### C 28 - 7

$a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$  で定められる数列  $\{a_n\}$  について、次の問いに答えよ。

(1)  $|a_{n+1}-3| \leq \frac{2}{3}|a_n-3|$  を示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

**解答** (1) 略 (2) 3

$$\begin{aligned} (1) \quad a_{n+1}-3 &= \sqrt{2a_n+3}-3 = \frac{(\sqrt{2a_n+3}-3)(\sqrt{2a_n+3}+3)}{\sqrt{2a_n+3}+3} \\ &= \frac{(2a_n+3)-9}{\sqrt{2a_n+3}+3} = \frac{2(a_n-3)}{\sqrt{2a_n+3}+3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad |a_{n+1}-3| = \frac{2}{\sqrt{2a_n+3}+3} |a_n-3|$$

$$\sqrt{2a_n+3}+3 \geq 3 \text{ であるから} \quad |a_{n+1}-3| \leq \frac{2}{3} |a_n-3|$$

(2) (1) で示した不等式から

$$|a_n-3| \leq \frac{2}{3} |a_{n-1}-3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |a_{n-2}-3| \leq \cdots \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |a_1-3|$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq |a_n-3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |1-3|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |1-3| = 0 \text{ であるから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n-3| = 0$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

**C 28 - 8**

数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  について, 次の事柄は正しいか。正しくないものはその反例をあげよ。ただし,  $\alpha$  は定数とする。

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$

**解答** (1) 正しくない ;  $a_n = n + 1$ ,  $b_n = n$       (2) 正しくない ;  $a_n = n$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$

(3) 正しい

(1) 正しくない。

(反例)  $a_n = n + 1$ ,  $b_n = n$  とすると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  であるが

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

(2) 正しくない。

(反例)  $a_n = n$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$  とすると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  であるが

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

(3) 正しい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \alpha - 0 = \alpha$$



## 第 29 章 数学Ⅲの微分

### A 29 - 1

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = x^{\frac{3}{5}}$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$$

$$(4) \quad y = x^2 e^x$$

$$(5) \quad y = e^x \cos x$$

$$(6) \quad y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$(7) \quad y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$$

**解答** (1)  $\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$  (2)  $-\frac{5}{2\sqrt{x^7}}$  (3)  $-\frac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}}$  (4)  $= x(2+x)e^x$

$$(5) e^x(\cos x - \sin x) \quad (6) \frac{1}{1 - \sin x} \quad (7) \frac{\sin x - \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2}$$

$$(1) \quad y' = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} \left( = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} \right)$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^5}} = x^{-\frac{5}{2}} \text{ であるから } y' = -\frac{5}{2} x^{-\frac{5}{2}-1} = -\frac{5}{2} x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{5}{2\sqrt{x^7}}$$

$$(3) \quad y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}} = x^{-\frac{7}{4}} \text{ であるから } y' = -\frac{7}{4} x^{-\frac{7}{4}-1} = -\frac{7}{4} x^{-\frac{11}{4}} = -\frac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}}$$

$$(4) \quad y' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = x(2+x)e^x$$

$$(5) \quad y' = (e^x)' \cos x + e^x(\cos x)' = e^x \cos x + e^x \cdot (-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

$$(6) \quad y' = \frac{-\sin x(1 - \sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{-\sin x + (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{1 - \sin x}$$

$$(7) \quad y' = \frac{-\cos x(1 + \cos x) - (1 - \sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{-\cos x - \cos^2 x + \sin x - \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x - \cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\sin x - \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2}$$

**A 29 - 2**

次の関数を微分せよ。

- (1)  $y = \cos(2x - 1)$       (2)  $y = \tan 3x$       (3)  $y = \sin x^2$   
 (4)  $y = \tan x^2$       (5)  $y = \cos^3 x$   
 (6)  $y = e^{5x}$       (7)  $y = e^{-2x^2}$       (8)  $y = 3^{4x}$   
 (9)  $y = \log |\tan x|$       (10)  $y = (\log x)^3$

**解答** (1)  $-2\sin(2x - 1)$    (2)  $\frac{3}{\cos^2 3x}$    (3)  $2x \cos x^2$    (4)  $\frac{2x}{\cos^2 x^2}$    (5)  $-3\cos^2 x \sin x$

(6)  $5e^{5x}$    (7)  $-4xe^{-2x^2}$    (8)  $4 \cdot 3^{4x} \log 3$    (9)  $\frac{1}{\sin x \cos x}$    (10)  $\frac{3(\log x)^2}{x}$

(1)  $y' = -\sin(2x - 1) \cdot (2x - 1)' = -2\sin(2x - 1)$

(2)  $y' = \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x}$       (3)  $y' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cos x^2$

(4)  $y' = \frac{1}{\cos^2 x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$

(5)  $y' = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x$

(6)  $y' = e^{5x} \cdot (5x)' = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$

(7)  $y' = e^{-2x^2} \cdot (-2x^2)' = -4xe^{-2x^2}$

(8)  $y' = 3^{4x} \log 3 \cdot (4x)' = 4 \cdot 3^{4x} \log 3$

(9)  $y' = \frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)' = \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$

(10)  $y' = 3(\log x)^2 (\log x)' = 3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3(\log x)^2}{x}$

**A 29 - 3**

次の曲線上の点 A における接線および法線の方程式を求めよ。

(1)  $y = \frac{x}{x+1}$ , A (0, 0)      (2)  $y = \sqrt{x+3}$ , A (1, 2)

(3)  $y = \sqrt{4-x^2}$ , A  $(-\sqrt{3}, 1)$       (4)  $y = \cos x$ , A  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(5)  $y = e^x$ , A (0, 1)      (6)  $y = \log x$ , A (e, 1)

**解答** 接線の方程式, 法線の方程式の順に

$$(1) \quad y = x, \quad y = -x \quad (2) \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}, \quad y = -4x + 6$$

$$(3) \quad y = \sqrt{3}x + 4, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$(4) \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \quad y = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$$(5) \quad y = x + 1, \quad y = -x + 1 \quad (6) \quad y = \frac{1}{e}x, \quad y = -ex + e^2 + 1$$

$$(1) \quad f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ とすると, } f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \text{ より } f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad f'(0) = 1$$

よって, 接線の方程式は  $y = x$

また, 法線の方程式は  $y = -x$

$$(2) \quad f(x) = \sqrt{x+3} \text{ とすると } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}, \quad f'(1) = \frac{1}{4}$$

よって, 接線の方程式は  $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 1)$  すなわち  $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

また, 法線の方程式は  $y - 2 = -4(x - 1)$  すなわち  $y = -4x + 6$

$$(3) \quad f(x) = \sqrt{4-x^2} \text{ とすると } f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f'(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

よって, 接線の方程式は  $y - 1 = \sqrt{3}\{x - (-\sqrt{3})\}$  すなわち  $y = \sqrt{3}x + 4$

また, 法線の方程式は  $y - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\{x - (-\sqrt{3})\}$  すなわち  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$

$$(4) \quad f(x) = \cos x \text{ とすると } f'(x) = -\sin x, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって, 接線の方程式は

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ すなわち } y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

また, 法線の方程式は

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ すなわち } y = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$$(5) \quad f(x) = e^x \text{ とすると } f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1$$

よって, 接線の方程式は  $y - 1 = x - 0$  すなわち  $y = x + 1$

また, 法線の方程式は  $y - 1 = -(x - 0)$  すなわち  $y = -x + 1$

$$(6) \quad f(x) = \log x \text{ とすると } f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(e) = \frac{1}{e}$$

よって、接線の方程式は  $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$  すなわち  $y=\frac{1}{e}x$

また、法線の方程式は  $y-1=-e(x-e)$  すなわち  $y=-ex+e^2+1$

**A 29 - 4**

次の関数は  $x=1$  で微分可能であることを証明せよ。

$$x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x^2, \quad x \geq 1 \text{ のとき } f(x) = 2x - 1$$

**解答** 略

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\{2(1+h) - 1\} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 2 = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (2+h) = 2$$

ゆえに  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$

よって、関数  $f(x)$  は  $x=1$  で微分可能である。

**B 29 - 1**

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, y = \frac{2t}{t^2 + 1} \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} \text{ を } x, y \text{ で表せ。}$$

**解答**  $-\frac{x}{y}$

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 1} \text{ から } \frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}$$

$$y = \frac{2t}{t^2 + 1} \text{ から } \frac{dy}{dt} = \frac{2\{(t^2 + 1) - t(2t)\}}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$$

ゆえに  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - t^2}{2t} = -\frac{x}{y}$

**別解**  $x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, y = \frac{2t}{t^2 + 1} \text{ から } x^2 + y^2 = 1$

よって  $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$  ゆえに  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

**B 29 - 2**

関数  $y = x^{\sqrt{x}}$  (ただし  $x > 0$ ) について、導関数  $y'$  を求め、 $y' = 0$  となる  $x$  の値を求めよ。

**解答**  $y' = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \log x + 1 \right), \quad x = \frac{1}{e^2}$

$x > 0$  であるから、 $y = x^{\sqrt{x}}$  の両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \log x$$

両辺を  $x$  で微分して  $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} \log x + 1 \right)$

よって  $y' = y \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} \log x + 1 \right) = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} \log x + 1 \right) = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \log x + 1 \right)$

$y' = 0$  のとき、 $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} > 0$  から  $\frac{1}{2} \log x + 1 = 0$

よって  $x = \frac{1}{e^2}$

### B 29 - 3

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 10$ , A (27, 1)

(2)  $x^2 + 3xy - y^2 = 3$ , A (1, 2)

**解答** (1)  $y = -\frac{1}{3}x + 10$  (2)  $y = 8x - 6$

(1) 方程式の両辺を  $x$  で微分すると  $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$

ゆえに、 $x \neq 0$  のとき  $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

よって、点 (27, 1) における接線の傾きは  $-\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$

したがって、求める接線の方程式は

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 27) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{3}x + 10$$

(2) 方程式の両辺を  $x$  で微分すると  $2x + 3y + 3xy' - 2yy' = 0$

ゆえに、 $3x - 2y \neq 0$  のとき  $y' = -\frac{2x + 3y}{3x - 2y}$

よって、点 (1, 2) における接線の傾きは  $-\frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 2} = 8$

したがって、求める接線の方程式は

$$y - 2 = 8(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 8x - 6$$

### B 29 - 4

2 つの曲線  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{x}$  に共通な接線の方程式を求めよ。

**解答**  $y = -4x - 4$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{とおくと} \quad f'(x) = 2x, \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

曲線  $y = f(x)$  上の点  $(p, p^2)$  における接線の方程式は  $y - p^2 = 2p(x - p)$

すなわち  $y = 2px - p^2 \quad \dots\dots ①$

曲線  $y = g(x)$  上の点  $(q, \frac{1}{q})$  における接線の方程式は  $y - \frac{1}{q} = -\frac{1}{q^2}(x - q)$

すなわち  $y = -\frac{1}{q^2}x + \frac{2}{q} \quad \dots\dots ②$

①, ② が一致するとき  $2p = -\frac{1}{q^2}, \quad -p^2 = \frac{2}{q}$

これを解いて  $p = -2, \quad q = -\frac{1}{2}$

よって、共通な接線の方程式は  $y = -4x - 4$

### B 29 - 5

2 曲線  $y = ax^3$  と  $y = 3\log x$  が共有点をもち、その点における 2 曲線の接線が一致しているとき、定数  $a$  の値を求めよ。また、その共有点における接線の方程式を求めよ。

**解答**  $a = \frac{1}{e}, \quad y = \frac{3}{\sqrt[3]{e}}x - 2$

$$f(x) = ax^3, \quad g(x) = 3\log x \quad \text{とすると} \quad f'(x) = 3ax^2, \quad g'(x) = \frac{3}{x}$$

2 曲線が共有点をもち、その点における 2 曲線の接線が一致することから、共有点の

$x$  座標を  $p$  とすると  $f(p) = g(p), \quad f'(p) = g'(p)$

$f(p) = g(p)$  より  $ap^3 = 3\log p \quad \dots\dots ①$

$f'(p) = g'(p)$  より  $3ap^2 = \frac{3}{p} \quad \text{すなわち} \quad ap^3 = 1 \quad \dots\dots ②$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } 3\log p = 1 \quad \text{よって} \quad p = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{これを } \textcircled{2} \text{ に代入して } ae = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{1}{e}$$

共有点の座標は  $(e^{\frac{1}{3}}, 1)$  であるから, 接線の方程式は

$$y - 1 = \frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}(x - e^{\frac{1}{3}}) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{3}{\sqrt[3]{e}}x - 2$$

## B 29 - 6

平均値の定理を利用して, 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

**解答** (1) 1 (2) 1

(1) 関数  $f(x) = \sin x$  はすべての実数  $x$  で微分可能であり  $f'(x) = \cos x$   
 区間  $[x^2, x]$  (または  $[x, x^2]$ ) で平均値の定理を用いると

$$\frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2} = \cos c, \quad x^2 < c < x \quad (\text{または } x < c < x^2)$$

を満たす  $c$  が存在する。

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{であるから} \quad \lim_{x \rightarrow 0} c = 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos c = \cos 0 = 1$$

(2)  $x \rightarrow +0$  であるから,  $x > 0$  としてよい。このとき  $\sin x < x$

関数  $f(x) = e^x$  はすべての実数  $x$  で微分可能であり  $f'(x) = e^x$

区間  $[\sin x, x]$  で平均値の定理を用いると

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = e^c, \quad \sin x < c < x$$

を満たす  $c$  が存在する。

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \quad \text{であるから} \quad \lim_{x \rightarrow +0} c = 0$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^c = e^0 = 1$$

## B 29 - 7

$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 2 & (x \geq 1) \\ x^3 + (1-a)x^2 & (x < 1) \end{cases}$  とする。  $f(x)$  が  $x=1$  で微分可能な関数となるように、実数  $a, b$  の値を定めよ。

**解答**  $a = \frac{1}{2}, b = 3$

関数  $f(x)$  が  $x=1$  で微分可能であるとき、 $x=1$  で連続であるから

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

すなわち、 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1)$  より  $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 2 = 1^3 + (1-a) \cdot 1^2$

よって  $b = -2a + 4 \dots\dots ①$

このとき  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(ax^2 + bx - 2) - (a + b - 2)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} \{a(x+1) + b\} = 2a + b = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\{x^3 + (1-a)x^2\} - (a + b - 2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3 + (1-a)x^2 + a - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \{x^2 + (2-a)x + 2 - a\} = 5 - 2a$$

$f(x)$  が  $x=1$  で微分可能であるとき  $4 = 5 - 2a$

よって  $a = \frac{1}{2}$

このとき、① から  $b = 3$

### C 29 - 1

次の関数を微分せよ。

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 4})$$

**解答**  $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 4})' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

### C 29 - 2

次の  $x$  の関数  $y$  について,  $\frac{dy}{dx}$  を求めよ。ただし,  $y$  を用いて表してもよい。

(1)  $xy + y^3 = x^2$                       (2)  $x = \sin(x + y)$

**解答** (1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 3y^2}$       (2)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos(x + y)}{\cos(x + y)}$

(1) 両辺を  $x$  について微分すると  $1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$

ゆえに  $(x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = 2x - y$

よって,  $x + 3y^2 \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 3y^2}$

(2) 両辺を  $x$  について微分すると  $1 = \cos(x + y) \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$

よって,  $\cos(x + y) \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x + y)} - 1 = \frac{1 - \cos(x + y)}{\cos(x + y)}$

### C 29 - 3

$x$  の関数  $y$  が,  $\theta$  を媒介変数として,  $x = 1 - \cos \theta$ ,  $y = \theta - \sin \theta$  と表されるとき,  $\frac{dy}{dx}$ , および  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を  $\theta$  の関数として表せ。

**解答**  $\frac{1 - \cos \theta}{\sin^3 \theta}$

$\frac{dx}{d\theta} = \sin \theta$ ,  $\frac{dy}{d\theta} = 1 - \cos \theta$

よって  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

したがって 
$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \\ &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{\sin \theta \cdot \sin \theta - (1 - \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin^3 \theta} \end{aligned}$$

**参考** 一般に,  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  のとき,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{\{f'(t)\}^3}$  が成り立つ。

**C 29 - 4**

- (1)  $y = \sin x \left( -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$  の逆関数を  $y = f(x)$  とする。  $f'(x)$  を求めよ。
- (2)  $y = \tan x \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$  の逆関数を  $y = g(x)$  とする。  $g''(1)$  の値を求めよ。

**解答** (1)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (2)  $-\frac{1}{2}$

- (1) 逆関数を  $y = f(x)$  とすると  $x = f^{-1}(y) = \sin y$

よって 
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  であるから  $\cos y \geq 0$

ゆえに 
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (2) 逆関数を  $y = g(x)$  とすると  $x = g^{-1}(y) = \tan y$

よって 
$$g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

ゆえに 
$$g''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

したがって 
$$g''(1) = -\frac{2 \cdot 1}{(1+1^2)^2} = -\frac{1}{2}$$

**C 29 - 5**

$f(x)$  は  $x > 0$  で定義された関数で、 $x=1$  で微分可能で  $f'(1)=2$  かつ任意の  $x > 0$ ,  $y > 0$  に対して  $f(xy) = f(x) + f(y)$  を満たすものとする。

- (1)  $f(1)$  の値を求めよ。また、これを利用して、 $f\left(\frac{1}{x}\right)$  を  $f(x)$  で表せ。

- (2)  $f\left(\frac{x}{y}\right)$  を  $f(x)$  と  $f(y)$  で表せ。

- (3)  $f(1)$ ,  $f'(1)$  の値に注意することにより、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  を  $x$  で表せ。

- (4)  $f(x)$  を求めよ。

**解答** (1)  $f(1)=0, f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$  (2)  $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

(3)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2}{x}$  (4)  $f(x)=2\log x$

(1)  $f(xy)=f(x)+f(y)$  …… ① で  $x=y=1$  とおくと  $f(1)=f(1)+f(1)$   
よって  $f(1)=0$

① で  $y=\frac{1}{x}$  とおくと  $f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1)=0$  であるから  $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

(2)  $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

(3) (2) から  $f(x+h)-f(x)=f\left(\frac{x+h}{x}\right)=f\left(1+\frac{h}{x}\right)$

また  $f(1)=0$

よって 
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \cdot f'(1) = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

(4) (3) より  $f'(x)=\frac{2}{x}$  であるから  $f(x)=\int \frac{2}{x} dx = 2\log x + C$  ( $C$  は積分定数)

$f(1)=0$  から  $C=0$

よって  $f(x)=2\log x$

### C 29 - 6

次の関数  $f(x)$  について、 $x=0$  で連続であるが、微分可能でないことを示せ。

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

**解答** 略

常に  $0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$  であるから  $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  であるから  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

よって、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$  より、 $f(x)$  は  $x=0$  で連続である。

また 
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

$h \rightarrow 0$  のとき、 $\sin \frac{1}{h}$  は一定の値に収束しないので、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$  すなわち  $f'(0)$  は存在しない。

したがって、 $f(x)$  は  $x=0$  で微分可能でない。

## 第 30 章 数学Ⅲ のグラフ

### A 30 - 1

関数  $y = x + \sin 2x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) のグラフを描け。

**解答** (1)  $x < 0$ ,  $1 < x$  で下に凸 ;  $0 < x < 1$  で上に凸 ; 変曲点は点  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$

(2)  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  で上に凸,  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  で下に凸, 変曲点は点  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$(1) \quad y' = 4x^3 - 6x^2 + 2$$

$$y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$$

$$y'' = 0 \text{ とすると } x = 0, 1$$

$y''$  の符号と曲線の凹凸は次の表のようになる。

|       |       |     |       |     |       |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|
| $x$   | ..... | 0   | ..... | 1   | ..... |
| $y''$ | +     | 0   | -     | 0   | +     |
| $y$   | 下に凸   | 変曲点 | 上に凸   | 変曲点 | 下に凸   |

よって  $x < 0$ ,  $1 < x$  で下に凸 ;  $0 < x < 1$  で上に凸

変曲点は点  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$

$$(2) \quad y' = 1 + 2\cos 2x$$

$$y'' = 2(-2\sin 2x) = -4\sin 2x$$

$$y'' = 0 \text{ とすると } \sin 2x = 0$$

$$0 < x < \pi \text{ から } x = \frac{\pi}{2}$$

$y''$  の符号と曲線の凹凸は次の表のようになる。

|       |   |       |                 |       |       |
|-------|---|-------|-----------------|-------|-------|
| $x$   | 0 | ..... | $\frac{\pi}{2}$ | ..... | $\pi$ |
| $y''$ |   | -     | 0               | +     |       |
| $y$   |   | 上に凸   | 変曲点             | 下に凸   |       |

よって  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  で上に凸,  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  で下に凸

変曲点は点  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

### B 30 - 1

$y = (1 - \cos x) \sin x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) のグラフを描け。また、最大値・最小値を求めよ。

**解答** (2)  $x = \frac{2}{3}\pi$  のとき最大値  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ,  $x = \frac{4}{3}\pi$  のとき最小値  $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{aligned} y' &= \sin^2 x + (1 - \cos x) \cos x = 1 - \cos^2 x + \cos x - \cos^2 x \\ &= -2\cos^2 x + \cos x + 1 = -(\cos x - 1)(2\cos x + 1) \end{aligned}$$

$0 < x < 2\pi$  において  $y' = 0$  となる  $x$  の値は,  $\cos x = -\frac{1}{2}$  から  $x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

$0 \leq x \leq 2\pi$  における  $y$  の増減表は次のようになる。

|      |   |     |                  |     |                  |     |        |
|------|---|-----|------------------|-----|------------------|-----|--------|
| $x$  | 0 | ... | $\frac{2}{3}\pi$ | ... | $\frac{4}{3}\pi$ | ... | $2\pi$ |
| $y'$ |   | +   | 0                | -   | 0                | +   |        |
| $y$  | 0 | ↗   | 極大               | ↘   | 極小               | ↗   | 0      |

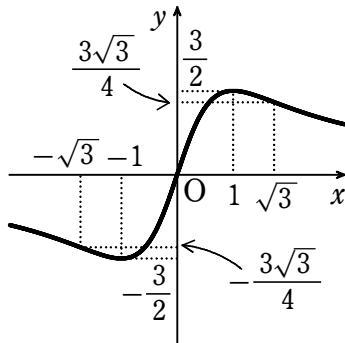
$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき } y = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad x = \frac{4}{3}\pi \text{ のとき } y = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

よって  $x = \frac{2}{3}\pi$  のとき最大値  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ,  $x = \frac{4}{3}\pi$  のとき最小値  $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

### B 30 - 2

関数  $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$  のグラフをかけ。

**解答** (1)



$$\begin{aligned} (1) \quad y &= 3x(x^2 + 1)^{-1} \text{ から } y' = 3(x^2 + 1)^{-1} + 3x \cdot (-1)(x^2 + 1)^{-2} \cdot 2x \\ &= \frac{3(x^2 + 1) - 6x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$y' = -3(x^2 - 1)(x^2 + 1)^{-2} \text{ から } y'' = -3\{2x(x^2 + 1)^{-2} + (x^2 - 1) \cdot (-2)(x^2 + 1)^{-3} \cdot 2x\}$$

$$= \frac{-3\{2x(x^2+1)-4x(x^2-1)\}}{(x^2+1)^3} = \frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

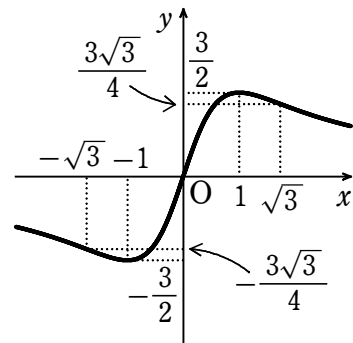
$y'=0$  とすると  $x=\pm 1$   $y''=0$  とすると  $x=0, \pm\sqrt{3}$

また,  $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$  とすると,  $f(-x)=-f(x)$  であるから, グラフは原点に関して対称である。

よって,  $x \geq 0$  で考える。

$y$  の増減とグラフの凹凸は, 次の表のようになる。

|       |   |     |               |     |                       |     |
|-------|---|-----|---------------|-----|-----------------------|-----|
| $x$   | 0 | ... | 1             | ... | $\sqrt{3}$            | ... |
| $y'$  |   | +   | 0             | -   | -                     | -   |
| $y''$ | 0 | -   | -             | -   | 0                     | +   |
| $y$   | 0 | ↗   | $\frac{3}{2}$ | ↘   | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | ↘   |



また  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$

よって, グラフは [図]。

### B 30 - 3

曲線  $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$  の凹凸を調べ, 変曲点の座標を求めよ。また, グラフをかけ。

**解答** (3)  $x < -1$ ,  $1 < x$  で下に凸;  
 $-1 < x < 1$  で上に凸; 変曲点

$\left(-1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ; [図]

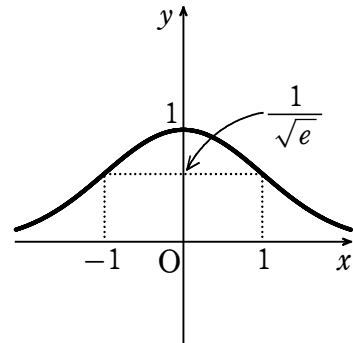
(3)

$$(3) \quad y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y'' = -e^{-\frac{x^2}{2}} - x \cdot (-xe^{-\frac{x^2}{2}}) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$y'=0$  とすると,  $x=0$ ,  $y''=0$  とすると  $x=\pm 1$

$y$  の増減とグラフの凹凸は, 次の表のようになる。

|       |            |                      |            |   |            |                      |            |
|-------|------------|----------------------|------------|---|------------|----------------------|------------|
| $x$   | ...        | -1                   | ...        | 0 | ...        | 1                    | ...        |
| $y'$  | +          | +                    | +          | 0 | -          | -                    | -          |
| $y''$ | +          | 0                    | -          | - | -          | 0                    | +          |
| $y$   | $\nearrow$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\searrow$ |



また  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$

ゆえに、 $y$  軸は漸近線である。

よって  $x < -1, 1 < x$  で下に凸、 $-1 < x < 1$  で上に凸

変曲点の座標は  $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  グラフは [図]。

### B 30 - 4

関数  $y = (x-1)e^x$  のグラフの概形をかけ。

**解答**

$$y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x, \quad y'' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0 \quad y'' = 0 \text{ とすると } x = -1$$

$y$  の増減とグラフの凹凸は、次の表のようになる。

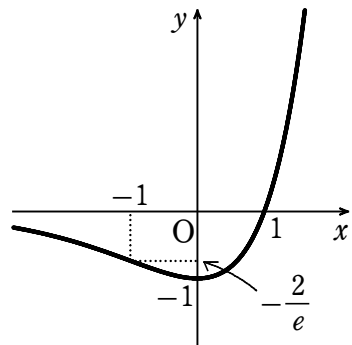
|       |            |                |            |    |            |
|-------|------------|----------------|------------|----|------------|
| $x$   | ...        | -1             | ...        | 0  | ...        |
| $y'$  | -          | -              | -          | 0  | +          |
| $y''$ | -          | 0              | +          | +  | +          |
| $y$   | $\searrow$ | $-\frac{2}{e}$ | $\searrow$ | -1 | $\nearrow$ |

また  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$

更に、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$  であるから、 $x$  軸はこの曲線の

漸近線である。

よって、グラフは [図]。



### B 30 - 5

曲線  $y = x \log x$  の凹凸を調べ、変曲点があればその座標を求めよ。また、グラフをかけ。

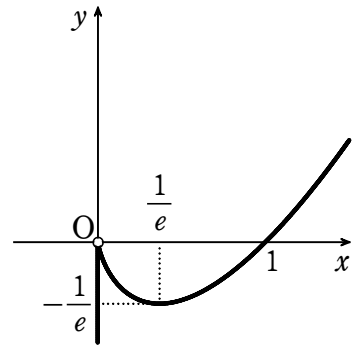
**解答**

(2) 定義域は  $x > 0$  である。

$$y' = \log x + 1, \quad y'' = \frac{1}{x} > 0 \quad y' = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{e}$$

$y$  の増減とグラフの凹凸は、次の表ようになる。

|       |   |     |                |     |
|-------|---|-----|----------------|-----|
| $x$   | 0 | ... | $\frac{1}{e}$  | ... |
| $y'$  | / | -   | 0              | +   |
| $y''$ | / | +   | +              | +   |
| $y$   | / | ↘   | $-\frac{1}{e}$ | ↗   |



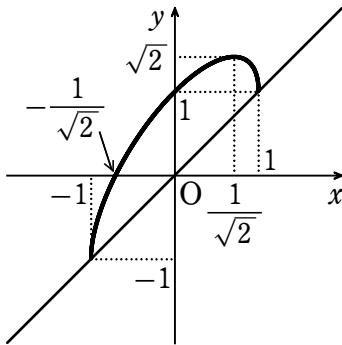
また  $\lim_{x \rightarrow +0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

よって、 $x > 0$  で下に凸；変曲点はなし；グラフは[図]。

### B 30 - 6

関数  $y = x + \sqrt{1-x^2}$  のグラフをかけ。

解答



(3) この関数の定義域は、 $1-x^2 \geq 0$  を解いて  $-1 \leq x \leq 1$   
 $-1 < x < 1$  のとき

$$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = -\frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'=0 \text{ とすると } \sqrt{1-x^2}=x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

左辺は正であるから  $x>0$

$$\textcircled{1} \text{ の両辺を 2 乗して } 2x^2=1 \quad \text{よって } x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

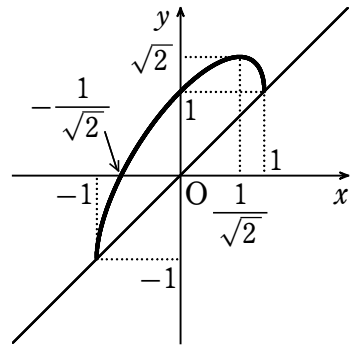
$y$  の増減とグラフの凹凸は、次の表のようになる。

|       |    |     |                      |     |   |
|-------|----|-----|----------------------|-----|---|
| $x$   | -1 | ... | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ... | 1 |
| $y'$  | ↗  | +   | 0                    | -   | ↘ |
| $y''$ | ↗  | -   | -                    | -   | ↘ |
| $y$   | -1 | ↗   | $\sqrt{2}$           | ↘   | 1 |

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow -1+0} y' = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y' = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\infty$$

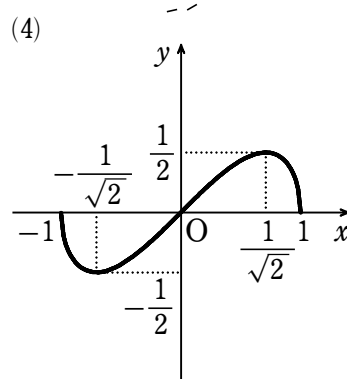
したがって、グラフは右の図のようになる。



### B 30 - 7

関数  $y = x\sqrt{1-x^2}$  のグラフをかけ。

解答



4)  $1-x^2 \geq 0$  であるから、定義域は  $-1 \leq x \leq 1$

奇関数であるから、グラフは原点に関して対称。

$$-1 < x < 1 \text{ のとき } y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$-1 < x < 1 \text{ で, } y' = 0 \text{ とすると } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y'' = 0 \text{ とすると } x = 0$$

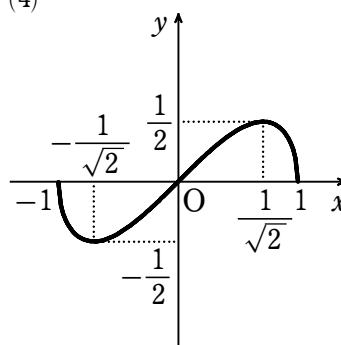
$y$  の増減とグラフの凹凸は、次の表のようになる。

|       |            |            |                       |            |   |            |                      |            |            |
|-------|------------|------------|-----------------------|------------|---|------------|----------------------|------------|------------|
| $x$   | -1         | ...        | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ...        | 0 | ...        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ...        | 1          |
| $y'$  | $\nearrow$ | -          | 0                     | +          | + | +          | 0                    | -          | $\searrow$ |
| $y''$ | $\nearrow$ | +          | +                     | +          | 0 | -          | -                    | -          | $\searrow$ |
| $y$   | 0          | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$        | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$        | $\searrow$ | 0          |

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow -1+0} y' = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y' = -\infty$$

よって、グラフは [図]。

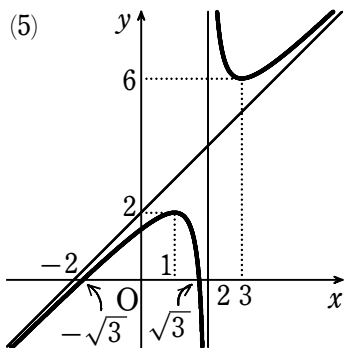
(4)



### B 30 - 8

関数  $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$  のグラフをかけ。

解答



(5) 関数の定義域は  $x \neq 2$  である。

$$y = x + 2 + \frac{1}{x-2} \text{ であるから } y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}, \quad y'' = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$y' = 0$  となる  $x$  の値は  $x = 1, 3$

よって、 $y$  の増減やグラフの凹凸は、次の表のようになる。

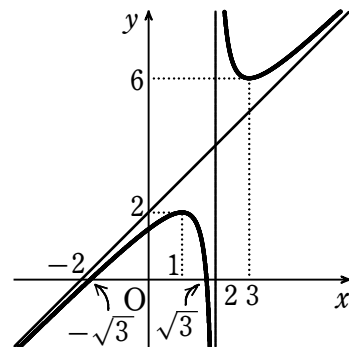
|       |     |         |     |   |     |         |     |
|-------|-----|---------|-----|---|-----|---------|-----|
| $x$   | ... | 1       | ... | 2 | ... | 3       | ... |
| $y'$  | +   | 0       | -   | / | -   | 0       | +   |
| $y''$ | -   | -       | -   | / | +   | +       | +   |
| $y$   | ↗   | 極大<br>2 | ↘   | / | ↘   | 極小<br>6 | ↗   |

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{y - (x+2)\} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{y - (x+2)\} = 0$$

より、漸近線は

$$x=2, \quad y=x+2; [\text{図}]$$



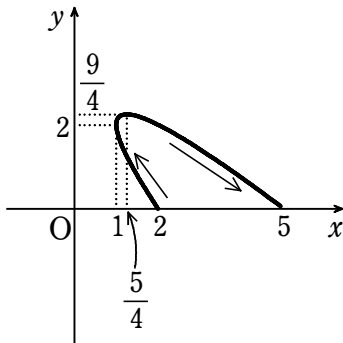
### B 30 - 9

曲線が  $t$  を媒介変数として

$$x = 1 + t^2, \quad y = 2 + t - t^2$$

と表されているとき、この曲線の  $y \geq 0$  の部分を図示せよ。

解答



$$y \geq 0 \text{ から } 2+t-t^2 \geq 0 \quad \text{よって } t^2-t-2 \leq 0$$

$$(t-2)(t+1) \leq 0 \quad \text{ゆえに } -1 \leq t \leq 2$$

$\frac{dx}{dt} = 2t$ ,  $\frac{dy}{dt} = 1-2t$  から, 次の増減表を得る。

|                 |    |            |   |            |               |            |   |
|-----------------|----|------------|---|------------|---------------|------------|---|
| $t$             | -1 | ...        | 0 | ...        | $\frac{1}{2}$ | ...        | 2 |
| $\frac{dx}{dt}$ | -  | -          | 0 | +          | +             | +          | + |
| $x$             | 2  | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ | $\frac{5}{4}$ | $\nearrow$ | 5 |
| $\frac{dy}{dt}$ | +  | +          | + | +          | 0             | -          | - |
| $y$             | 0  | $\nearrow$ | 2 | $\nearrow$ | $\frac{9}{4}$ | $\searrow$ | 0 |

また,  $t \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2t}{2t}$  ..... ①

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1-2t}{2t} \right) \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2t^2} \cdot \frac{1}{2t} = -\frac{1}{4t^3}$$

$$t < 0 \text{ のとき } \frac{d^2y}{dx^2} > 0, \quad t > 0 \text{ のとき } \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

すなわち  $t \leq 0$  のとき下に凸,  $t \geq 0$  のとき上に凸

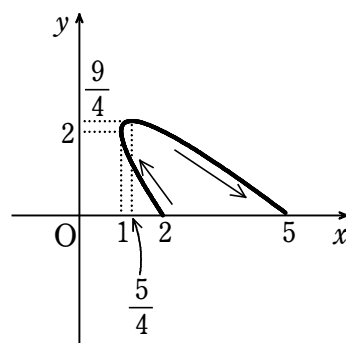
また, ① から,  $t = -1, 2$  の接線の傾きは, それぞれ

$$-\frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{4}$$

$t = 0$  のとき  $\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} \neq 0$  から直線  $x = 1$

に接する。

以上により, 右の図のようになる。



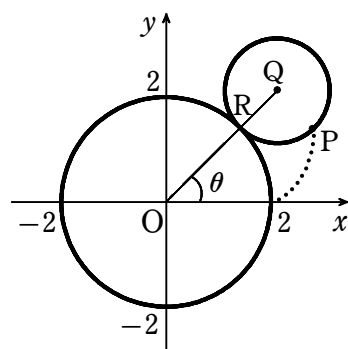
### C 30 - 1

原点  $O$  を中心とし, 半径  $2$  の円を  $D_1$  とする。

半径  $1$  の円  $D_2$  は最初に中心  $Q$  が  $(3, 0)$  にあり, 円  $D_1$  に外接しながら滑ることなく反時計まわりに転がるものとする。点  $P$  は円  $D_2$  の円周上に固定されていて, 最初は  $(2, 0)$  にある。

2つの円の接点を  $R$  としたとき, 線分  $OR$  が  $x$  軸となす角を  $\theta$  とする。

点  $P$  の座標  $(x, y)$  を,  $\theta$  を用いて表せ。



**解答**  $(3\cos\theta - \cos 3\theta, 3\sin\theta - \sin 3\theta)$

点  $(2, 0)$  を  $A$  とする。

$\widehat{AR} = 2\theta$ ,  $\widehat{PR} = \angle RQP$ ,  $\widehat{AR} = \widehat{PR}$  であるから

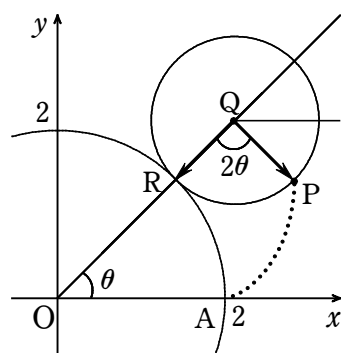
$$\angle RQP = 2\theta$$

$\overrightarrow{QP}$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角は,  $\overrightarrow{QR}$  と  $x$  軸の正の向きとのなす角が  $\theta - \pi$  であるから

$$(\theta - \pi) + 2\theta = 3\theta - \pi$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \overrightarrow{QP} &= (\cos(3\theta - \pi), \sin(3\theta - \pi)) \\ &= (-\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } (x, y) &= \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \\ &= (3\cos\theta, 3\sin\theta) + (-\cos 3\theta, -\sin 3\theta) \\ &= (3\cos\theta - \cos 3\theta, 3\sin\theta - \sin 3\theta) \end{aligned}$$



### C 30 - 2

座標平面上を運動する点  $P$  の、時刻  $t$  における座標が、 $x=e^{-t}\sin t$ ,  $y=e^{-t}\cos t$  で表されるとき、速度  $\vec{v}$  と  $\overrightarrow{OP}$  のなす角  $\theta$  を求めよ。ただし、 $O$  は原点  $(0, 0)$  とする。

**解答**  $\theta = \frac{3}{4}\pi$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t}(\sin t + \cos t)$$

であるから  $\vec{v} = (-e^{-t}(\sin t - \cos t), -e^{-t}(\sin t + \cos t))$

したがって  $|\vec{v}| = \sqrt{e^{-2t}(\sin t - \cos t)^2 + e^{-2t}(\sin t + \cos t)^2}$   
 $= \sqrt{2e^{-2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{2}e^{-t}$

また  $\overrightarrow{OP} = (e^{-t}\sin t, e^{-t}\cos t),$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(e^{-t}\sin t)^2 + (e^{-t}\cos t)^2} = \sqrt{e^{-2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} = e^{-t}$$

よって  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{OP} = -e^{-t}(\sin t - \cos t)e^{-t}\sin t - e^{-t}(\sin t + \cos t)e^{-t}\cos t$   
 $= -e^{-2t}$

したがって  $\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\vec{v}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{-e^{-2t}}{\sqrt{2}e^{-t} \cdot e^{-t}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leq \theta \leq \pi$  であるから  $\theta = \frac{3}{4}\pi$



# 第 31 章 数学Ⅲ の微分の応用

## A 31 - 1

- (1) 関数  $y = x^2 + \log(25 - x^2)$  の極値を求めよ。  
 (2) 関数  $f(\theta) = \frac{1}{2}\cos 2\theta + \sqrt{3}\sin \theta$  の極値を求めよ。

**解答**  $x = \pm 2\sqrt{6}$  のとき極大値 24,  $x = 0$  のとき極小値  $2\log 5$

**解答** 極大値は  $\frac{5}{4}$ , 極小値は  $-\frac{1}{2} + \sqrt{3}$  と  $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

(1) 真数条件から  $25 - x^2 > 0$  ゆえに  $-5 < x < 5$

$$\text{また } y' = 2x + \frac{-2x}{25 - x^2} = \frac{2x(24 - x^2)}{25 - x^2}$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, \pm 2\sqrt{6}$$

$-5 < x < 5$  における  $y$  の増減表は次のようになる。

|      |    |     |              |     |           |     |             |     |   |
|------|----|-----|--------------|-----|-----------|-----|-------------|-----|---|
| $x$  | -5 | ... | $-2\sqrt{6}$ | ... | 0         | ... | $2\sqrt{6}$ | ... | 5 |
| $y'$ |    | +   | 0            | -   | 0         | +   | 0           | -   |   |
| $y$  |    | ↗   | 24           | ↘   | $2\log 5$ | ↗   | 24          | ↘   |   |

よって  $x = \pm 2\sqrt{6}$  のとき極大値 24,  $x = 0$  のとき極小値  $2\log 5$

$$(2) f'(\theta) = -\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos \theta = -2\sin \theta \cos \theta + \sqrt{3}\cos \theta \\ = \cos \theta(-2\sin \theta + \sqrt{3})$$

$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$  が成り立つから、関数  $f(\theta)$  の周期は、 $2\pi$  である。

よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲において、 $f'(\theta) = 0$  を満たす  $\theta$  の値を求めると

$$\cos \theta = 0 \text{ または } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ から}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

ゆえに、 $0 \leq \theta < 2\pi$  における  $f(\theta)$  の増減表は次のようになる。

|              |   |     |                 |     |                           |     |                  |     |                           |     |        |
|--------------|---|-----|-----------------|-----|---------------------------|-----|------------------|-----|---------------------------|-----|--------|
| $\theta$     | 0 | ... | $\frac{\pi}{3}$ | ... | $\frac{\pi}{2}$           | ... | $\frac{2}{3}\pi$ | ... | $\frac{3}{2}\pi$          | ... | $2\pi$ |
| $f'(\theta)$ |   | +   | 0               | -   | 0                         | +   | 0                | -   | 0                         | +   |        |
| $f(\theta)$  |   | ↗   | $\frac{5}{4}$   | ↘   | $-\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ | ↗   | $\frac{5}{4}$    | ↘   | $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ | ↗   |        |

したがって、 $f(\theta)$  の極大値は  $\frac{5}{4}$

極小値は  $-\frac{1}{2} + \sqrt{3}$  と  $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$

## A 31 - 2

$f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$  ( $x > 0$ ) とする。

(1)  $f(x)$  の極値を求めよ。

(2) 定数  $a$  に対して、方程式  $ax = (\log x)^2$  の解の個数を求めよ。

ただし、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$  であることを用いてよい。

**解答** (1)  $x = e^2$  のとき極大値  $\frac{4}{e^2}$ ,  $x = 1$  のとき極小値  $0$

(2)  $a$  の範囲  $a < 0$   $a = 0$   $0 < a < \frac{4}{e^2}$   $a = \frac{4}{e^2}$   $\frac{4}{e^2} < a$   
 解の個数  $0$   $1$   $3$   $2$   $1$

(1)  $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$  ( $x > 0$ )

$$f'(x) = \frac{2 \log x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\log x)^2}{x^2} = \frac{\log x (2 - \log x)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$  とおくと  $\log x = 0, 2$

ゆえに  $x = 1, e^2$

$x = e^2$  のとき極大値  $\frac{4}{e^2}$

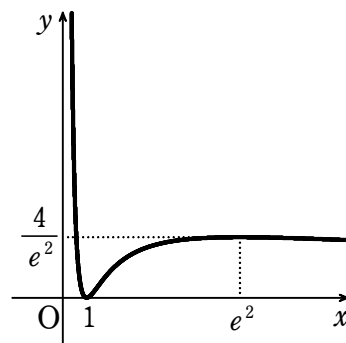
$x = 1$  のとき極小値  $0$

| $x$     | 0 | ... | 1  | ... | $e^2$ | ... |
|---------|---|-----|----|-----|-------|-----|
| $f'(x)$ |   | −   | 0  | +   | 0     | −   |
| $f(x)$  |   | ↘   | 極小 | ↗   | 極大    | ↘   |

$$(2) \quad ax = (\log x)^2 \text{ から } \frac{(\log x)^2}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)^2}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$$

よって,  $y = f(x)$  のグラフは図のようになる.



|         |         |         |                         |                     |                     |
|---------|---------|---------|-------------------------|---------------------|---------------------|
| $a$ の範囲 | $a < 0$ | $a = 0$ | $0 < a < \frac{4}{e^2}$ | $a = \frac{4}{e^2}$ | $\frac{4}{e^2} < a$ |
| 解の個数    | 0       | 1       | 3                       | 2                   | 1                   |

### A 31 - 3

すべての正の数  $x$  に対して, 不等式  $a\sqrt{x} > \log x$  が成り立つような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。

**解答**  $a > \frac{2}{e}$

$$x > 0 \text{ であるから } a\sqrt{x} > \log x \iff a > \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$  とするとき, 与えられた不等式が成り立つための必要十分条件は,  $a$  の値

が  $f(x)$  の最大値より大きいことである。

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - (\log x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \log x}{2\sqrt{x^3}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = e^2$$

$f(x)$  の増減表は右のようになる。

$$\text{ゆえに, } f(x) \text{ の最大値は } f(e^2) = \frac{2}{e}$$

$$\text{よって, 求める } a \text{ の値の範囲は } a > \frac{2}{e}$$

|         |   |     |               |     |
|---------|---|-----|---------------|-----|
| $x$     | 0 | ... | $e^2$         | ... |
| $f'(x)$ |   | +   | 0             | -   |
| $f(x)$  |   | ↗   | $\frac{2}{e}$ | ↘   |

### B 31 - 1

$a$  を実数とする。関数  $f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$  が極値をもたないように,  $a$  の値の範囲を定めよ。

解答  $a \leq -\frac{9}{8}, 2 \leq a$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a - \sin x + \cos 2x = a - \sin x + (1 - 2\sin^2 x) \\ &= -2\sin^2 x - \sin x + a + 1 \end{aligned}$$

$f(x)$  が極値をもたないのは、すべての  $x$  について  $f'(x) \geq 0$ 、またはすべての  $x$  について  $f'(x) \leq 0$  が成り立つときである。

すなわち、すべての  $x$  について  $2\sin^2 x + \sin x - 1 \leq a$ 、またはすべての  $x$  について  $2\sin^2 x + \sin x - 1 \geq a$  が成り立つときである。

$$g(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1 \text{ とおくと } g(x) = 2\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$  であるから、 $g(x)$  は

$$\sin x = -\frac{1}{4} \text{ のとき 最小値 } -\frac{9}{8},$$

$$\sin x = 1 \text{ のとき 最大値 } 2 \text{ をとる。}$$

$$\text{よって } -\frac{9}{8} \leq g(x) \leq 2$$

$$\text{したがって、求める } a \text{ の値の範囲は } a \leq -\frac{9}{8}, 2 \leq a$$

### B 31 - 2

$f(x) = \sqrt{x} - \log x$  とする。

(1)  $f'(x)$  を求めよ。

(2)  $x > 0$  のとき  $f(x) > 0$  であることを示せ。ただし、 $2 < e < 3$  である。

(3) (2) を利用して  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  を示せ。

解答 (1)  $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$  (2) 略 (3) 略

(1) 真数条件から  $x > 0$

$$\text{このとき } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

(2)  $f'(x) = 0$  とすると  $x = 4$

$x > 0$  における  $f(x)$  の増減表は次のようになる。

|         |   |     |              |     |
|---------|---|-----|--------------|-----|
| $x$     | 0 | ... | 4            | ... |
| $f'(x)$ |   | —   | 0            | +   |
| $f(x)$  |   | ↘   | $2 - \log 4$ | ↗   |

よって,  $x > 0$  のとき  $f(x) \geq f(4) = 2 - \log 4$

$2 < e < 3$  であるから  $2 - \log 4 = \log e^2 - \log 4 > 0$

よって,  $x > 0$  のとき  $f(x) > 0$

(3)  $x \rightarrow \infty$  について考えるから,  $x > 1$  としてよい。

このとき, (3) から  $0 < \log x < \sqrt{x}$

よって  $0 < \frac{\log x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  であるから  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$

### B 31 - 3

$a, b$  は定数で,  $a > 0$  とする。関数  $f(x) = \frac{x-b}{x^2+a}$  の最大値が  $\frac{1}{6}$ , 最小値が  $-\frac{1}{2}$  であるとき,  $a, b$  の値を求めよ。

**解答**  $a = 3, b = 1$

$$f'(x) = \frac{x^2 + a - (x-b) \cdot 2x}{(x^2 + a)^2} = -\frac{x^2 - 2bx - a}{(x^2 + a)^2}$$

$a > 0$  であるから  $(x^2 + a)^2 > 0$

$f'(x) = 0$  とすると  $x^2 - 2bx - a = 0$  …… ①

① の判別式を  $D$  とすると,  $a > 0$  であるから  $\frac{D}{4} = b^2 + a > 0$

よって, 方程式 ① は異なる 2 つの実数解  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) をもち, 解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2b, \alpha\beta = -a \quad \text{…… ②}$$

増減表は次のようになる。

| $x$     | …          | $\alpha$ | …          | $\beta$ | …          |
|---------|------------|----------|------------|---------|------------|
| $f'(x)$ | —          | 0        | +          | 0       | —          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 極小       | $\nearrow$ | 極大      | $\searrow$ |

また  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

よって,  $f(x)$  は  $x = \alpha$  で最小値  $f(\alpha)$ ,  $x = \beta$  で最大値  $f(\beta)$  をとる。

$$\text{条件から } f(\alpha) = \frac{\alpha-b}{\alpha^2+a} = -\frac{1}{2}, f(\beta) = \frac{\beta-b}{\beta^2+a} = \frac{1}{6}$$

したがって  $2\alpha - 2b = -\alpha^2 - a, 6\beta - 6b = \beta^2 + a$

② により,  $a, b$  を消去すると

$$2\alpha - (\alpha + \beta) = -\alpha^2 + \alpha\beta, 6\beta - 3(\alpha + \beta) = \beta^2 - \alpha\beta$$

整理すると  $\alpha^2 + (1 - \beta)\alpha - \beta = 0, \beta^2 - (3 + \alpha)\beta + 3\alpha = 0$

よって  $(\alpha - \beta)(\alpha + 1) = 0, (\beta - \alpha)(\beta - 3) = 0$

$\alpha \neq \beta$  であるから  $\alpha = -1, \beta = 3$

② から  $2 = 2b, -3 = -a$

すなわち  $a = 3, b = 1$

### B 31 - 4

$a$  は定数とする。方程式  $x^3 - 3ax^2 + 4 = 0$  の異なる実数解の個数を調べよ。

**解答**  $a < 1$  のとき 1 個,  $a = 1$  のとき 2 個,  $1 < a$  のとき 3 個

$$x^3 - 3ax^2 + 4 = 0 \text{ から } x^3 + 4 = 3ax^2$$

この方程式は  $x = 0$  を解にもたないから  $\frac{x^3 + 4}{3x^2} = a$

よって、関数  $y = \frac{x^3 + 4}{3x^2}$  のグラフと直線  $y = a$  の共有点の個数が、与えられた方程式の実数解の個数と一致する。

$$y = \frac{x^3 + 4}{3x^2} \text{ から } y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3x^2}$$

$$y' = \frac{x^3 - 8}{3x^3} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{3x^3}$$

$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$  であるから、増減表は右のようになり、 $y$  は  $x = 2$  のとき極小値 1 をとる。

また  $\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty, \lim_{x \rightarrow -0} y = \infty,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

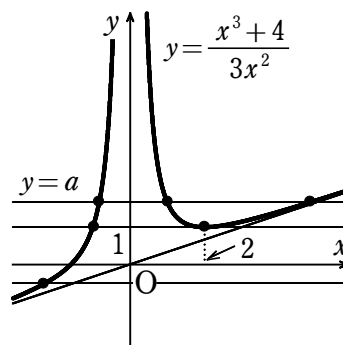
したがって、関数  $y = \frac{x^3 + 4}{3x^2}$  のグラフは右の図のようになる。

よって、与えられた方程式の異なる実数解の個数は

$a < 1$  のとき 1 個,  $a = 1$  のとき 2 個,

$1 < a$  のとき 3 個

|      |     |   |     |   |     |
|------|-----|---|-----|---|-----|
| $x$  | ... | 0 | ... | 2 | ... |
| $y'$ | +   | / | -   | 0 | +   |
| $y$  | ↗   | / | ↘   | 1 | ↗   |



### B 31 - 5

$a$  を正の定数とする。不等式  $a^x \geq x$  が任意の正の実数  $x$  に対して成り立つような  $a$  の値の範囲を求めよ。

**解答**  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$

$a^x \geq x$  の両辺の対数をとると  $x \log a \geq \log x$

したがって、 $\log a \geq \frac{\log x}{x}$  …… ① と変形される。

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = e$$

$x > 0$  での  $f(x)$  の増減表は右ようになる。

したがって、 $f(x)$  の最大値は  $f(e) = \frac{1}{e}$  である。

よって、① が  $x > 0$  の範囲で常に成り立つための条件は

$$\log a \geq \frac{1}{e} \quad \text{すなわち} \quad a \geq e^{\frac{1}{e}}$$

| $x$     | 0           | ...        | $e$ | ...        |
|---------|-------------|------------|-----|------------|
| $f'(x)$ | $\diagdown$ | +          | 0   | -          |
| $f(x)$  | $\diagdown$ | $\nearrow$ | 極大  | $\searrow$ |

### C 31 - 1

$x > 0$  のとき、不等式  $\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$  が成り立つことを証明せよ。

**解答**  $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$  とおくと  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$

$x > 0$  のとき  $f'(x) > 0$  であるから、 $f(x)$  は単調に増加する。

$$f(0) = 0 \text{ であるから、} x > 0 \text{ のとき } f(x) > 0$$

$$\text{したがって } \log(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \text{終}$$

【考え方】不等式  $f(x) > 0$  の証明は、 $(f(x) \text{ の最小値}) > 0$  を示すとよい。

$f(x) = (\text{左辺}) - (\text{右辺})$  とおき、区間  $x > 0$  における増減を調べる。

**解答**  $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$  とおくと  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$

$x > 0$  のとき  $f'(x) > 0$  であるから、 $f(x)$  は単調に増加する。

$$f(0) = 0 \text{ であるから、} x > 0 \text{ のとき } f(x) > 0$$

$$\text{したがって } \log(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \text{終}$$

### C 31 - 2

(1)  $x > 0$  のとき、不等式  $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$  が成り立つことを示せ。

(2) (1) の結果を用いて、極限值  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$  を求めよ。

**解答** (1) 略 (2) 0

(1)  $f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$  とすると

$$f'(x) = e^x - 1 - x, \quad f''(x) = e^x - 1$$

$x > 0$  のとき,  $e^x > 1$  であるから  $f''(x) > 0$

ゆえに,  $f'(x)$  は  $x \geq 0$  で単調に増加する。

$f'(0) = 0$  であるから,  $x > 0$  のとき  $f'(x) > 0$

よって,  $f(x)$  は  $x \geq 0$  で単調に増加する。

$f(0) = 0$  であるから,  $x > 0$  のとき  $f(x) > 0$

すなわち  $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

(2)  $x > 0$  から, (1) より  $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} > \frac{x^2}{2}$

よって  $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} > 0$       ゆえに  $0 < \frac{x}{e^x} < \frac{2}{x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$  であるから  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$

### C 31 - 3

すべての  $x \geq 0$  について,  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$  が成り立つことを示せ。

**解答** 略

$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$  とおく。

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, \quad f''(x) = -\sin x + x, \quad f'''(x) = -\cos x + 1$$

$x \geq 0$  のとき  $f'''(x) \geq 0$  であるから,  $f''(x)$  は単調に増加する。

このことと,  $f''(0) = 0$  であることから  $x \geq 0$  のとき  $f''(x) \geq 0$

よって,  $x \geq 0$  のとき  $f'(x)$  は単調に増加する。

このことと,  $f'(0) = 0$  であることから  $x \geq 0$  のとき  $f'(x) \geq 0$

よって,  $x \geq 0$  のとき  $f(x)$  は単調に増加する。

このことと,  $f(0) = 0$  であることから  $x \geq 0$  のとき  $f(x) \geq 0$

すなわち  $x \geq 0$  のとき  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$  …… ①

$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$  とおく。

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x, \quad g''(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

$x \geq 0$  のとき、① より  $g''(x) \geq 0$

よって、 $x \geq 0$  のとき  $g'(x)$  は単調に増加する。

このことと、 $g'(0) = 0$  であることから  $x \geq 0$  のとき  $g'(x) \geq 0$

よって、 $x \geq 0$  のとき  $g(x)$  は単調に増加する。

このことと、 $g(0) = 0$  であることから  $x \geq 0$  のとき  $g(x) \geq 0$

すなわち  $x \geq 0$  のとき  $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$  …… ②

①、② から、 $x \geq 0$  のとき  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

### C 31 - 4

(1)  $x > 0$  のとき、 $\log x \leq \frac{x}{e}$  が成り立つことを証明せよ。

(2)  $x > 0$  のとき、 $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  が成り立つことを証明せよ。

【解答】 (1) 略 (2) 略

(1)  $f(x) = \frac{x}{e} - \log x$  とすると  $f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{ex}$

$x > 0$  のとき、 $f'(x) = 0$  とすると  $x = e$

$f(x)$  の増減表は右のようになり、 $x = e$  で最小値 0 をとる。

よって、 $x > 0$  のとき  $f(x) \geq 0$

すなわち  $\log x \leq \frac{x}{e}$

|         |   |     |         |     |
|---------|---|-----|---------|-----|
| $x$     | 0 | ... | $e$     | ... |
| $f'(x)$ |   | -   | 0       | +   |
| $f(x)$  |   | ↘   | 極小<br>0 | ↗   |

(2)  $f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \log(1+x)$  とすると、 $x > 0$  のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{(1+x)(1-x+x^2) - 1}{1+x} \\ &= \frac{x^3}{1+x} > 0 \end{aligned}$$

よって、 $f(x)$  は  $x \geq 0$  で単調に増加する。

$f(0) = 0$  であるから、 $x > 0$  のとき  $f(x) > 0$

すなわち  $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

### C 31 - 5

$x \geq 1$  のとき、 $x \log x \geq (x-1) \log(x+1)$  を示せ。

解答 (1) 略 (2) 略

(1)  $f(x) = x \log x - (x-1) \log(x+1)$  とおくと

$$f'(x) = \log x + 1 - \log(x+1) - \frac{x-1}{x+1} = \log x - \log(x+1) + \frac{2}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{x(x+1)^2}$$

$x \geq 1$  のとき  $f''(x) \leq 0$  であるから,  $f'(x)$  は単調に減少する。また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \log \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \log \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{2}{x+1} \right) = 0$$

であるから,  $x \geq 1$  のとき  $f'(x) > 0$

よって,  $f(x)$  は  $x \geq 1$  で単調に増加する。

このことと  $f(1) = 0$  から,  $x \geq 1$  のとき  $f(x) \geq 0$

すなわち, 次のことが成り立つ。

$$x \geq 1 \text{ のとき } x \log x \geq (x-1) \log(x+1)$$

(2)  $(n!)^2 \geq n^n$  …… ① とする。

① が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1]  $n=1$  のとき

$$(\text{①の左辺}) = (1!)^2 = 1, \quad (\text{①の右辺}) = 1^1 = 1$$

よって, ① は成り立つ。

[2]  $n=k$  ( $k \geq 1$ ) のとき ① が成り立つ, すなわち  $(k!)^2 \geq k^k$  …… ②

と仮定する。(1)の結果から  $x \geq 1$  のとき

$$\log x^x \geq \log(x+1)^{x-1} \quad \text{よって} \quad x^x \geq (x+1)^{x-1}$$

したがって, 自然数  $k$  について  $k^k \geq (k+1)^{k-1}$  …… ③

$n=k+1$  のとき, ②, ③ により

$$\{(k+1)!\}^2 = (k!)^2 (k+1)^2 \geq k^k (k+1)^2 \geq (k+1)^{k-1} (k+1)^2 = (k+1)^{k+1}$$

よって,  $n=k+1$  のときも ① は成り立つ。

[1], [2] から, ① はすべての自然数  $n$  について成り立つ。

別解  $(n!)^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot n^2$

$$= 1 \cdot n \times 2 \cdot (n-1) \times \dots \times k(n-k+1) \times \dots \times n \cdot 1 \dots \text{①}$$

$$n^n = n \times n \times \dots \times n \times \dots \times n \dots \text{②}$$

①の  $k$  番目と ②の  $k$  番目を比較すると

$$k(n-k+1) - n = (n-k)(k-1) \geq 0$$

よって, ①と②の  $k$  番目の項は  $1 \leq k \leq n$  において常に  $k(n-k+1) \geq n$  であるから

$\geq n^n$

$(n!)^2$

**C 31 - 6**

(1)  $n$  は自然数とする。不等式  $e^x > 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$  ( $x > 0$ ) を証明せよ。

(2)  $n$  は自然数とする。  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$  を証明せよ。

**解答** (1) 略 (2) 略

(1)  $e^x > 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$  ( $x > 0$ ) …… ① とおく。

[1]  $n=1$  のとき

$1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x$  であるから、 $f(x) = e^x - (1 + x)$  とおくと

$$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad (x > 0)$$

$x > 0$  において、関数  $f(x)$  は増加する。

$$\text{また } f(0) = 0$$

$$\text{ゆえに } f(x) > 0 \quad (x > 0) \quad \text{すなわち } e^x > 1 + x \quad (x > 0)$$

よって、① が成り立つ。

[2]  $n=m$  のとき、① が成り立つと仮定して、 $n=m+1$  のときを考える。

$$g(x) = e^x - \left(1 + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{x^k}{k!}\right) \text{ とおくと } g'(x) = e^x - \left(1 + \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k!}\right)$$

$$\text{仮定から } g'(x) > 0 \quad (x > 0)$$

$x > 0$  において、関数  $g(x)$  は増加する。

$$\text{また } g(0) = 0 \quad \text{ゆえに } g(x) > 0 \quad (x > 0)$$

すなわち、 $n=m+1$  のときも ① は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数  $n$  に対して ① が成り立つ。

(2) (1) から  $e^x > 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$  ( $x > 0$ )

$$\text{ゆえに } \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(n+1)!} = \infty \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

**C 31 - 7**

$a > 0$ ,  $b > 0$  のとき、不等式  $b \log \frac{a}{b} \leq a - b \leq a \log \frac{a}{b}$  が成り立つことを証明せよ。

**解答** 略

$f(x) = (x-b) - b \log \frac{x}{b}$  ( $x > 0$ ) とおくと

$$f'(x) = \frac{x-b}{x}$$

増減表から  $f(x)$  は  $x=b$  で極小かつ最小で  $f(b)=0$

よって  $f(x) \geq 0$  ゆえに  $f(a) \geq 0$

$g(x) = a \log \frac{a}{x} - (a-x)$  ( $x > 0$ ) とおくと  $g'(x) = \frac{x-a}{x}$

$f(x)$  と同様、 $g(x)$  は  $x=a$  で極小かつ最小で  $g(a)=0$

よって  $g(x) \geq 0$  ゆえに  $g(b) \geq 0$

$f(a) \geq 0, g(b) \geq 0$  から与えられた不等式が成り立つ。

**別解** 不等式を変形すると  $\log \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b} - 1$  と  $1 - \frac{b}{a} \leq -\log \frac{b}{a}$

どちらも  $\log x \leq x-1$  から導くことができる。

### C 31 - 8

$a < b$  のとき、不等式  $e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b$  を証明せよ。

**解答** 略

関数  $f(x) = e^x$  は微分可能で  $f'(x) = e^x$

よって、閉区間  $[a, b]$  において平均値の定理を用いると

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} = e^c, \quad a < c < b$$

を満たす実数  $c$  が存在する。

$e^x$  は単調に増加し、 $a < c < b$  であるから  $e^a < e^c < e^b$

よって  $e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b$

### C 31 - 9

正の実数  $a, b$ , 実数の定数  $p > 1$  に対して、 $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$  を証明せよ。

**解答**

$$(1) \quad \frac{B}{A} = \frac{2^{p-1}(a^p + b^p)}{(a+b)^p} = \frac{2^{p-1} \left\{ 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^p \right\}}{\left( 1 + \frac{b}{a} \right)^p}$$

$\frac{b}{a} = x$  ( $> 0$ ) とし、 $f(x) = \frac{2^{p-1}(1+x^p)}{(1+x)^p}$  とすると

$$f'(x) = 2^{p-1} \cdot \frac{px^{p-1} \cdot (1+x^p) - (1+x^p) \cdot p(1+x)^{p-1}}{(1+x)^{2p}} = 2^{p-1} \cdot \frac{p(1+x)^{p-1}(x^{p-1}-1)}{(1+x)^{2p}}$$

$$= \frac{2^{p-1}p(x^{p-1}-1)}{(1+x)^{p+1}}$$

$x > 0$  で  $f'(x) = 0$  とすると,  $x^{p-1} - 1 = 0$  から  $x = 1$

[1]  $p > 1$  のとき  $p-1 > 0$

$x > 0$  における  $f(x)$  の増減表は, 右のようになる。

ゆえに,  $x > 0$  のとき

$$f(x) \geq 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{B}{A} \geq 1$$

等号は,  $x = 1$  すなわち  $a = b$  のときに成り立つ。

|         |   |     |         |     |
|---------|---|-----|---------|-----|
| $x$     | 0 | ... | 1       | ... |
| $f'(x)$ |   | -   | 0       | +   |
| $f(x)$  |   | ↘   | 極小<br>1 | ↗   |

以上から

$p > 1$  のとき  $A \leq B$ , 等号は  $a = b$  のときに成り立つ。

### C 31 - 10

$0 < a < b$  のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

【解答】 略

$x > 0$  とし,  $f(x) = (\log x - \log a) - \frac{2(x-a)}{x+a}$  とおく。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4a}{(x+a)^2} = \frac{(x-a)^2}{x(x+a)^2} > 0 \quad \text{また} \quad f(a) = 0$$

よって  $x > a$  のとき  $f(x) > 0$       ゆえに  $\log x - \log a > \frac{2(x-a)}{x+a}$

$x = b > a$  とすると  $\frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$  ..... ①

次に,  $x > 0$  とし,  $g(x) = \frac{x-a}{\sqrt{ax}} - (\log x - \log a)$  とおく。

$$g'(x) = \frac{x+a}{2x\sqrt{ax}} - \frac{1}{x} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} > 0 \quad \text{また} \quad g(a) = 0$$

よって,  $x > a$  のとき  $g(x) > 0$       ゆえに  $\log x - \log a < \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$

$x = b > a$  とすると  $\frac{b-a}{\log b - \log a} > \sqrt{ab}$  ..... ②

①, ② から,  $0 < a < b$  のとき  $\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$



## 第 32 章 数学Ⅲ の積分計算

### A 32 - 1

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \sqrt{x}(x+2)dx$$

$$(2) \int \frac{3x^3 - x^2 + 5x + 1}{x^2} dx$$

$$(3) \int \frac{t^2 - 1}{\sqrt[3]{t}} dt$$

**解答**  $C$  は積分定数を表す。 (1)  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$

$$(2) \frac{3}{2}x^2 - x + 5\log|x| - \frac{1}{x} + C \quad (3) \frac{3}{8}t^2\sqrt[3]{t^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2} + C$$

$$(1) \int \sqrt{x}(x+2)dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$(2) \int \frac{3x^3 - x^2 + 5x + 1}{x^2} dx = \int \left(3x - 1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{3}{2}x^2 - x + 5\log|x| - \frac{1}{x} + C$$

$$(3) \int \frac{t^2 - 1}{\sqrt[3]{t}} dt = \int (t^{\frac{5}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}) dt = \frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{8}t^2\sqrt[3]{t^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2} + C$$

### A 32 - 2

次の定積分，不定積分を求めよ。

$$(1) \int (2x+3)^{10} dx$$

$$(2) \int \sin(2x+3) dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{1-2x}$$

$$(4) \int_0^1 e^{3x} dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x} dx$$

**解答** (1)  $\frac{1}{22}(2x+3)^{11}+C$  (2)  $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C$

(3)  $-\frac{1}{2}\log|1-2x|+C$  (4)  $\frac{e^3-1}{3}$  (5)  $\frac{1}{3}$

(1)  $\int (2x+3)^{10}dx = \frac{1}{22}(2x+3)^{11}+C$

(2)  $\int \sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C$

(3)  $\int \frac{dx}{1-2x} = -\frac{1}{2}\log|1-2x|+C$

(4)  $\int_0^1 e^{3x}dx = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} = \frac{e^3-1}{3}$

(5)  $1-2x=t$  とおくと  $-2dx=dt$  から  $dx=-\frac{1}{2}dt$

よって  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}dx = \int_1^0 t^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

### A 32 - 3

次の不定積分を求めよ。

(1)  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

(2)  $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$

(3)  $\int \tan^2 2x dx$

**解答**  $C$  は積分定数とする。

(1)  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$  (2)  $\frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin 2x + C$  (3)  $\frac{\tan 2x}{2} - x + C$

(1)  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$

(2)  $\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}\sin^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)$  より

(与式)  $= \int \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin 2x + C$

(3)  $\int \tan^2 2x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1\right)dx = \frac{\tan 2x}{2} - x + C$

**A 32 - 4**

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \cos 3x \sin 5x dx$$

$$(2) \int \sin 2x \sin 4x dx$$

**解答**  $C$  は積分定数とする。

$$(1) -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C \quad (2) -\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$(1) \int \cos 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$$(2) \int \sin 2x \sin 4x dx = -\frac{1}{2} \int (\cos 6x - \cos 2x) dx = -\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

**A 32 - 5**

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{dx}{x(x+2)}$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2-4}$$

**解答**  $C$  は積分定数とする。

$$(1) \frac{1}{2} \log \left| \frac{x}{x+2} \right| + C \quad (2) \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$C$  は積分定数とする。

$$(1) \int \frac{dx}{x(x+2)} = \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} (\log |x| - \log |x+2|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} (\log |x-2| - \log |x+2|) + C$$

$$= \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

**A 32 - 6**

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{4x}{x^2+1} dx$$

$$(2) \int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

**解答**  $C$  は積分定数とする。

$$(1) 2\log(x^2+1) + C \quad (2) \frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1| + C \quad (3) \frac{1}{2}\log 2$$

$C$  は積分定数とする。

$$(1) \int \frac{4x}{x^2+1} dx = \int \frac{2(x^2+1)'}{x^2+1} dx = 2\log(x^2+1) + C$$

$$(2) \int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1} dx = \int \frac{\frac{1}{3}(x^3+3x^2+1)'}{x^3+3x^2+1} dx = \frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1| + C$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = [-\log|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log 2$$

## A 32 - 7

次の不定積分，定積分を求めよ。

$$(1) \int \sin^7 x \cos x dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx$$

**解答** (1)  $\frac{1}{8}\sin^8 x + C$  (2)  $\frac{2}{3}$

$$(1) \int \sin^7 x \cos x dx = \frac{1}{8}\sin^8 x + C$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' (\sin x)^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \left[ \frac{2}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

**A 32 - 8**

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x e^{-3x} dx \qquad (2) \int x^4 \log x dx \qquad (3) \int \log(x-2) dx$$

**解答**  $C$  は積分定数とする。

$$(1) -\frac{3x+1}{9} e^{-3x} + C \qquad (2) \frac{x^5}{5} \log x - \frac{1}{25} x^5 + C$$

$$(3) (x-2) \log(x-2) - x + C$$

$C$  は積分定数とする。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int x e^{-3x} dx &= \int x \left( -\frac{1}{3} e^{-3x} \right)' dx = -\frac{x}{3} e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx \\
 &= -\frac{x}{3} e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C = -\frac{3x+1}{9} e^{-3x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int x^4 \log x dx &= \int \left( \frac{x^5}{5} \right)' \log x dx = \frac{x^5}{5} \log x - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{x^5}{5} \log x - \frac{1}{5} \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} \log x - \frac{1}{25} x^5 + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \log(x-2) dx &= \int (x-2)' \log(x-2) dx = (x-2) \log(x-2) - \int (x-2) \cdot \frac{1}{x-2} dx \\
 &= (x-2) \log(x-2) - \int dx = (x-2) \log(x-2) - x + C
 \end{aligned}$$

**A 32 - 9**

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^x \cos x dx \qquad (2) \int e^{-x} \sin x dx$$

**解答**  $C$  は積分定数とする。

$$(1) \quad \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C \quad (2) \quad -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

$C$  は積分定数とする。

$$\begin{aligned} (1) \quad \int e^x \cos x dx &= \int e^x (\sin x)' dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x (-\cos x)' dx \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad 2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\text{したがって、積分定数を考えて} \quad \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int e^{-x} \sin x dx &= \int e^{-x} (-\cos x)' dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx \\ &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} (\sin x)' dx \\ &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad 2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

$$\text{したがって、積分定数を考えて} \quad \int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) + C$$

### A 32 - 10

$e^x = t$  と置換することで、 $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 6e^{-x} + 5} dx$  を求めよ。

ただし、 $e$  は自然対数の底である。

**解答**  $\log \frac{4(e+2)}{3(e+3)}$

$$e^x = t \text{ とおくと } x = \log t$$

$$\text{よって } dx = \frac{1}{t} dt$$

$$\text{ゆえに} \quad \int \frac{1}{e^x + 6e^{-x} + 5} dx = \int \frac{1}{t + \frac{6}{t} + 5} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 + 5t + 6} dt$$

また

|     |                   |
|-----|-------------------|
| $x$ | $0 \rightarrow 1$ |
| $t$ | $1 \rightarrow e$ |

$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad \int_0^1 \frac{1}{e^x + 6e^{-x} + 5} dx &= \int_1^e \frac{1}{t^2 + 5t + 6} dt = \int_1^e \frac{1}{(t+2)(t+3)} dt \\
 &= \int_1^e \left( \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\
 &= \left[ \log|t+2| - \log|t+3| \right]_1^e \\
 &= \log(e+2) - \log(e+3) - \log 3 + \log 4 \\
 &= \log \frac{4(e+2)}{3(e+3)}
 \end{aligned}$$

**A 32 - 11**

次の定積分を求めよ。

(1)  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

(2)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

**解答** (1)  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$       (2)  $\frac{\pi}{6}$

$x = 2\sin \theta$  とおくと  $dx = 2\cos \theta d\theta$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$  のとき,  $\cos \theta > 0$  であるから

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4(1-\sin^2 \theta)} = 2\sqrt{\cos^2 \theta} = 2\cos \theta$$

(1)  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos \theta) \cdot 2\cos \theta d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = 2 \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\cos \theta} \cdot 2\cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

|          |                               |
|----------|-------------------------------|
| $x$      | $0 \rightarrow 1$             |
| $\theta$ | $0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$ |

**A 32 - 12**

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{x^2+9} \qquad (2) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$$

**解答** (1)  $\frac{5}{36}\pi$  (2)  $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$

(1)  $x=3\tan\theta$  とおくと  $dx=\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

$x$  と  $\theta$  の対応は右のようになる。

|          |                  |                   |                 |
|----------|------------------|-------------------|-----------------|
| $x$      | $-\sqrt{3}$      | $\longrightarrow$ | $3$             |
| $\theta$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\longrightarrow$ | $\frac{\pi}{4}$ |

よって 
$$\int_{-\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{x^2+9} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9(\tan^2\theta+1)} \cdot \frac{3}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{3} \left[ \theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right\} = \frac{5}{36}\pi$$

(2)  $x=\sqrt{3}\tan\theta$  とおくと  $dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$x$  と  $\theta$  の対応は右のようになる。

|          |     |                   |                 |
|----------|-----|-------------------|-----------------|
| $x$      | $0$ | $\longrightarrow$ | $\sqrt{3}$      |
| $\theta$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $\frac{\pi}{4}$ |

よって 
$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3(\tan^2\theta+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

## A 32 - 13

次の不定積分を求めよ。

$$\int \cos^5 x dx$$

**解答**  $C$  は積分定数とする。  $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$$

$\sin x = t$  とおくと  $\cos x dx = dt$

よって 
$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$$

**B 32 - 1**

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int x\sqrt{2+x} dx$$

$$(2) \int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}} dx$$

**解答**  $C$  は積分定数とする。

$$(1) \frac{2}{15}(3x-4)(2+x)\sqrt{2+x} + C \quad (2) 2(x-3)\sqrt{x+1} + C$$

$C$  は積分定数とする。

$$(1) \sqrt{2+x} = t \text{ とおくと } x = t^2 - 2, \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2+x} dx &= \int (t^2 - 2) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 - 2t^2) dt \\ &= 2 \left( \frac{t^5}{5} - \frac{2}{3} t^3 \right) + C = \frac{2}{15} (3t^2 - 10) t^3 + C \\ &= \frac{2}{15} (3x - 4)(2 + x)\sqrt{2+x} + C \end{aligned}$$

$$(2) \sqrt{x+1} = t \text{ とおくと } x = t^2 - 1, \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{3t^2-4}{t} \cdot 2t dt = 2 \int (3t^2 - 4) dt \\ &= 2(t^3 - 4t) + C = 2(t^2 - 4)t + C \\ &= 2(x-3)\sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

**B 32 - 2**

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$$

**解答**  $\frac{3}{8}\pi$

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( 1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{よって} \quad \int_0^{\pi} \sin^4 x dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left( \frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right]_0^{\pi} = \frac{3}{8} \pi\end{aligned}$$

**B 32 - 3**

$\frac{3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$  を満たす定数  $a, b, c$  の値を求めよ。また、この結果を利用して、不定積分  $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx$  を求めよ。

**解答**  $a=2, b=-2, c=1, 2\log \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} + C$  ( $C$  は積分定数)

等式の両辺に  $x(x+1)^2$  を掛けると  $3x+2 = a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx$

右辺を整理すると  $3x+2 = (a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a$

同じ次数の項の係数が等しいから  $a+b=0, 2a+b+c=3, a=2$

これらを解くと  $a=2, b=-2, c=1$

$$\begin{aligned}\text{よって} \quad \int \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx &= \int \left\{ \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx \\ &= 2\log|x| - 2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + C \\ &= 2\log \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

**B 32 - 4**

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

$$(2) \int_1^e (\log x)^2 dx$$

**解答** (1)  $\frac{1}{4}(e^2-1)$  (2)  $e-2$

$$\begin{aligned}(1) \quad \int_0^1 x^2 e^{2x} dx &= \int_0^1 x^2 \left( \frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = \left[ x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left( \left[ x \cdot \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \right) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} \left[ e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_1^e (\log x)^2 dx &= \int_1^e (x)' (\log x)^2 dx = \left[ x (\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot (2 \log x) \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= e - 2 \int_1^e \log x dx = e - 2 \left( \left[ x \log x \right]_1^e - \int_1^e dx \right) = e - 2 \{ e - (e - 1) \} = e - 2
 \end{aligned}$$

**B 32 - 5**

次の定積分を求めよ。

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$(2) \quad \int_3^4 x \log(x-2) dx$$

**解答** (1)  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2$       (2)  $6\log 2 - \frac{11}{4}$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x (\tan x)' dx = \left[ x \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \left[ \log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_3^4 x \log(x-2) dx &= \int_3^4 \left( \frac{x^2}{2} \right)' \log(x-2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \log(x-2) \right]_3^4 - \int_3^4 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x-2} dx \\
 &= 8\log 2 - \frac{1}{2} \int_3^4 \frac{x^2}{x-2} dx = 8\log 2 - \frac{1}{2} \int_3^4 \left( x + 2 + \frac{4}{x-2} \right) dx \\
 &= 8\log 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} + 2x + 4\log(x-2) \right]_3^4 \\
 &= 8\log 2 - \frac{1}{2} \left( \frac{11}{2} + 4\log 2 \right) = 6\log 2 - \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

**B 32 - 6**

次の定積分を求めよ。

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{3-\sqrt{x}}}$$

**解答**  $\frac{28\sqrt{2}}{3} - \frac{32}{3}$

$$\sqrt{3-\sqrt{x}}=t \text{ とおくと } 3-\sqrt{x}=t^2, \quad x=(3-t^2)^2, \quad dx=-4t(3-t^2)dt,$$

$$x \text{ が } 1 \rightarrow 4 \text{ のとき } t \text{ は } \sqrt{2} \rightarrow 1$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{3-\sqrt{x}}} &= \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t(3-t^2)}{t} dt \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} (12-4t^2) dt = \left[ 12t - \frac{4}{3}t^3 \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \left( 12\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \right) - \left( 12 - \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{28\sqrt{2}}{3} - \frac{32}{3} \end{aligned}$$

## B 32 - 7

次の不定積分を求めよ。

(1)  $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx$

(2)  $\int \frac{e^{2x}}{(e^x + 3)^2} dx$

(3)  $\int \frac{\log x}{x(\log x + 1)^2} dx$

**解答**  $C$  は積分定数とする。

(1)  $\frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) + C$       (2)  $\log(e^x + 3) + \frac{3}{e^x + 3} + C$

(3)  $\log |\log x + 1| + \frac{1}{\log x + 1} + C$

$C$  は積分定数とする。

(1)  $(e^x)' = e^x$  であるから,  $e^x = u$  とおくと

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{(e^x)'}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{1}{u + u^{-1}} du = \int \frac{u}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(u^2 + 1)'}{u^2 + 1} du = \frac{1}{2} \log(u^2 + 1) + C \\ &= \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) + C \end{aligned}$$

(2)  $(e^x + 3)' = e^x$  であるから,  $e^x + 3 = u$  とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{(e^x + 3)^2} dx &= \int \frac{e^x}{(e^x + 3)^2} \cdot (e^x + 3)' dx = \int \frac{u-3}{u^2} du = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{3}{u^2} \right) du \\ &= \log |u| + \frac{3}{u} + C = \log(e^x + 3) + \frac{3}{e^x + 3} + C\end{aligned}$$

(3)  $(\log x + 1)' = \frac{1}{x}$  であるから,  $\log x + 1 = u$  とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x(\log x + 1)^2} dx &= \int \frac{\log x}{(\log x + 1)^2} (\log x + 1)' dx = \int \frac{u-1}{u^2} du \\ &= \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \log |u| + \frac{1}{u} + C \\ &= \log |\log x + 1| + \frac{1}{\log x + 1} + C\end{aligned}$$

### **B 32 - 8**

定積分  $\int_1^3 \sqrt{4x - x^2} dx$  を求めよ。

**B 32 - 9**

定積分  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1}$  を求めよ。

**解答**  $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$  とおくと

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

また、 $x$  と  $\theta$  の対応は右のようになる。

|          |                  |               |                 |
|----------|------------------|---------------|-----------------|
| $x$      | 0                | $\rightarrow$ | 1               |
| $\theta$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\rightarrow$ | $\frac{\pi}{6}$ |

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi \end{aligned}$$

**B 32 - 10**

不定積分  $\int \frac{dx}{\cos x}$  を求めよ。

**解答**  $\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C$  ( $C$  は積分定数)

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$\sin x = t$  とおくと  $\cos x dx = dt$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (\log |1+t| - \log |1-t|) + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

**B 32 - 11**

$m, n$  は自然数とする。定積分  $\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx$  を求めよ。

**解答**  $m \neq n$  のとき  $0$ ,  $m = n$  のとき  $\frac{\pi}{2}$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2} \{ \cos(m+n)x - \cos(m-n)x \}$$

$m \neq n$  のとき

$$(\text{与式}) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_0^\pi = 0$$

$m = n$  のとき

$$(\text{与式}) = \int_0^\pi \sin^2 mx dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2mx}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

**C 32 - 1**

次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

**解答**  $C$  は積分定数とする。  $\log \frac{e^x}{1+e^x} + C$

$$e^x = t \text{ とおくと } e^x dx = dt, \quad dx = \frac{1}{t} dt$$

$$\text{よって } \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \log |t| - \log |1+t| + C$$

$$= \log \left| \frac{t}{1+t} \right| + C = \log \frac{e^x}{1+e^x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

**C 32 - 2**

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^e 5^{\log x} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$$

【解答】 (1)  $\frac{5e-1}{\log 5+1}$  (2)  $\frac{1}{3}\log 2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

(1)  $\log x = t$  とおくと  $x = e^t, dx = e^t dt$

$x$  と  $t$  の対応は右のようになる。

|     |     |                   |     |
|-----|-----|-------------------|-----|
| $x$ | $1$ | $\longrightarrow$ | $e$ |
| $t$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $1$ |

よって  $\int_1^e 5^{\log x} dx = \int_0^1 5^t e^t dt = \int_0^1 (5e)^t dt$

$$= \left[ \frac{(5e)^t}{\log 5e} \right]_0^1 = \frac{5e-1}{\log 5+1}$$

(2)  $\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$  とおく。

両辺に  $x^3+1$  を掛けると  $1 = a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)$

右辺を整理すると  $1 = (a+b)x^2 - (a-b-c)x + a+c$

これが  $x$  についての恒等式であるから

$$a+b=0, a-b-c=0, a+c=1$$

これを解いて  $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$

よって  $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right)$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}}{x^2-x+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2-x+1}$$

ここで  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \left[ \log(x+1) \right]_0^1 = \log 2 \quad \dots\dots ①$

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx = \left[ \log(x^2-x+1) \right]_0^1 = 0 \quad \dots\dots ②$$

また  $\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$  とおくと  $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$

$x$  と  $\theta$  の対応は右のようになる。

|          |                  |                   |                 |
|----------|------------------|-------------------|-----------------|
| $x$      | $0$              | $\longrightarrow$ | $1$             |
| $\theta$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\longrightarrow$ | $\frac{\pi}{6}$ |

よって  $\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}(1+\tan^2\theta)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \quad \dots\dots \textcircled{3}
\end{aligned}$$

①, ②, ③ から  $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \log 2 - \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi = \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$

### C 32 - 3

定積分  $\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1-\cos 4x} \, dx$  を求めよ。

**解答**  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{1-\cos 4x}{2} = \sin^2 2x \quad \text{であるから} \quad 1-\cos 4x = 2\sin^2 2x$$

$$\text{よって} \quad \sqrt{1-\cos 4x} = \sqrt{2\sin^2 2x} = \sqrt{2} |\sin 2x|$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\sin 2x \geq 0$  であり,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$  のとき,  $\sin 2x \leq 0$  であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1-\cos 4x} \, dx &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} |\sin 2x| \, dx = \sqrt{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} (-\sin 2x) \, dx \right\} \\
&= \sqrt{2} \left( \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[ \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \right) = \sqrt{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$



## 第 33 章 数学Ⅲの積分の応用(1)

### A 33 - 1

曲線  $y = \cos x$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  と  $x$  軸で囲まれた図形に関して、以下の問いに答えよ。

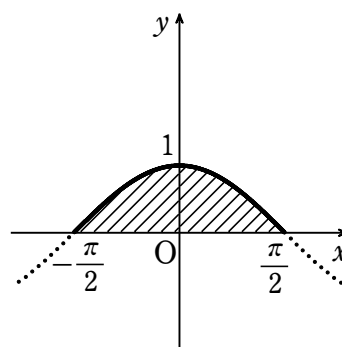
- (1) この図形の面積  $S$  を求めよ。  
 (2) この図形を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる立体の体積  $V$  を求めよ。

**解答** (1)  $S = 2$       (2)  $V = \frac{\pi^2}{2}$

$$(1) \quad S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2 \left[ \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$(2) \quad V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \pi \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$$



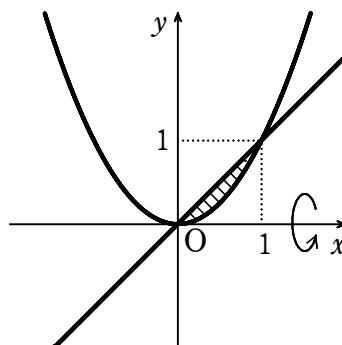
### A 33 - 2

直線  $y = x$  と放物線  $y = x^2$  で囲まれる部分を、 $x$  軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

**解答**  $\frac{2}{15}\pi$

$x = x^2$  とすると  $x(x-1) = 0$       よって  $x = 0, 1$   
 求める体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2 \, dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 \, dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \pi \left[ \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2}{15}\pi \end{aligned}$$



**A 33 - 3**

曲線  $y = \log x$ , 原点を通るこの曲線の接線, および  $x$  軸で囲まれた図形を  $y$  軸の周りに回転させてできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

**解答**  $\frac{\pi}{6}(e^2 - 3)$

$y' = \frac{1}{x}$  であるから, 曲線  $y = \log x$  上の点  $(t, \log t)$  における接線の方程式は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t)$$

すなわち  $y = \frac{1}{t}x + \log t - 1 \dots\dots ①$

接線 ① が原点を通るとき, ① に  $x=0, y=0$  を代入して,

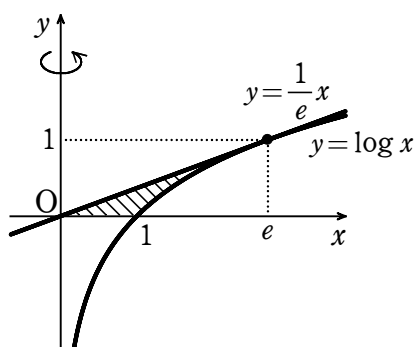
$$0 = \log t - 1 \quad \text{ゆえに} \quad t = e$$

よって, 原点を通る接線の方程式は  $y = \frac{1}{e}x$

また, 接点の座標は  $(e, 1)$

$y = \frac{1}{e}x$  より  $x = ey$ ,  $y = \log x$  より  $x = e^y$  であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \{(e^y)^2 - (ey)^2\} dy = \pi \int_0^1 (e^{2y} - e^2 y^2) dy \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2} e^{2y} - \frac{e^2}{3} y^3 \right]_0^1 = \pi \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{3} \right) = \frac{\pi}{6}(e^2 - 3) \end{aligned}$$

**B 33 - 1**

$0 \leq x \leq \pi$  の範囲で, 2 曲線  $y = \sin x$ ,  $y = \sin 2x$  によって囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

**解答**  $\frac{5}{2}$

$0 \leq x \leq \pi$  における 2 曲線の交点の  $x$  座標は  $\sin x = \sin 2x$

を解くと  $\sin x - 2\sin x \cos x = 0$

$$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$$

$\sin x = 0$  より  $x = 0, \pi$

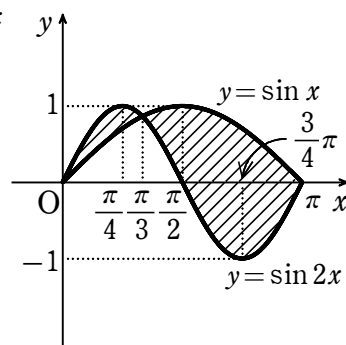
$\cos x = \frac{1}{2}$  より  $x = \frac{\pi}{3}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  では  $\sin x \leq \sin 2x$

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$  では  $\sin x \geq \sin 2x$

であるから、求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[ -\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) + \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$



### B 33 - 2

曲線  $y = e^x$  と、原点からこの曲線に引いた接線および  $y$  軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

**解答**  $\frac{e}{2} - 1$

$y = e^x$  から  $y' = e^x$

接点の座標を  $(a, e^a)$  とすると、接線の方程式は

$$y - e^a = e^a(x - a)$$

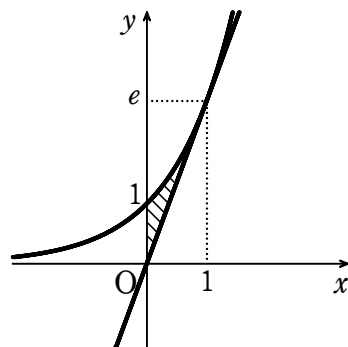
これが原点を通るから  $-e^a = -ae^a$

よって  $a = 1$

ゆえに、接線の方程式は  $y = ex$

$0 \leq x \leq 1$  で  $ex \leq e^x$  である。

よって、求める面積を  $S$  とすると



$$S = \int_0^1 (e^x - ex) dx = \left[ e^x - \frac{e}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

**B 33 - 3**

2つの曲線  $y = ax^2$ ,  $y = \log x$  が接するものとする。

- (1) 定数  $a$  の値と接点の座標を求めよ。  
 (2) 2つの曲線と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

**解答** (1)  $a = \frac{1}{2e}$ ,  $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$  (2)  $\frac{2}{3}\sqrt{e} - 1$

(1)  $f(x) = ax^2$ ,  $g(x) = \log x$  とする。

$f'(x) = 2ax$ ,  $g'(x) = \frac{1}{x}$  より、接点の  $x$  座標を  $t$  とおくと、

$$f(t) = g(t), \quad f'(t) = g'(t)$$

が成り立つから

$$at^2 = \log t \quad \dots\dots ①, \quad 2at = \frac{1}{t} \quad \dots\dots ②$$

$$② \text{ より } t^2 = \frac{1}{2a}$$

$$\text{これを } ① \text{ に代入して } \frac{1}{2} = \log t \quad \text{よって} \quad t = \sqrt{e}$$

$$\text{また, } a = \frac{1}{2t^2} \text{ より } a = \frac{1}{2e}$$

$$\text{接点の座標は } \left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$$

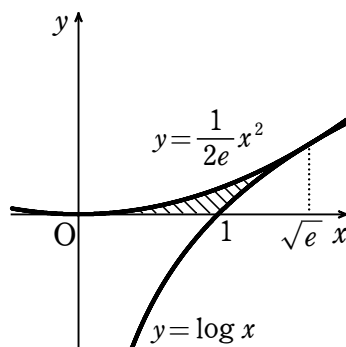
$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{2e}x^2, \quad g(x) = \log x$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で } 0 \leq f(x)$$

$$1 \leq x \leq \sqrt{e} \text{ で } g(x) \leq f(x)$$

よって、求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{e}} f(x) dx - \int_1^{\sqrt{e}} g(x) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} x^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} \log x dx \\ &= \frac{1}{2e} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{e}} - \left[ x \log x \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2e} \left( \frac{e\sqrt{e}}{3} - 0 \right) - \frac{\sqrt{e}}{2} + (\sqrt{e} - 1) \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1
 \end{aligned}$$

**B 33 - 4**

曲線  $C: y = xe^{-x}$  について

- (1) 曲線  $C$  の変曲点における接線の方程式を求めよ。  
 (2) 曲線  $C$ , (1) で求めた接線,  $y$  軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

**解答** (1)  $y = -\frac{x}{e^2} + \frac{4}{e^2}$  (2)  $\frac{9}{e^2} - 1$

(1)  $y = xe^{-x}$ ,  $y' = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$   
 $y'' = (-1)e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$

$x=2$  の前後で  $y''$  の符号が変わるから, 変曲点の座標は  $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

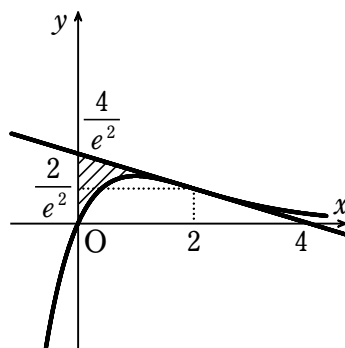
求める接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{e^2}(x-2) + \frac{2}{e^2} \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{x}{e^2} + \frac{4}{e^2}$$

- (2) 変曲点の前後で, 接線は曲線  $C$  の上方から下方になるから, 面積を求める部分は右の図の斜線部分である。

よって, 求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \left( -\frac{x}{e^2} + \frac{4}{e^2} - xe^{-x} \right) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{2e^2}x^2 + \frac{4}{e^2}x \right]_0^2 - \left\{ \left[ x(-e^{-x}) \right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx \right\} \\
 &= -\frac{2}{e^2} + \frac{8}{e^2} + 2e^{-2} - \left[ -e^{-x} \right]_0^2 = \frac{9}{e^2} - 1
 \end{aligned}$$

**B 33 - 5**

$a > 0$  とする。曲線  $y = \sin 2x$   $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S$  を, 曲線  $y = a \sin x$  が 2 等分するように定数  $a$  の値を定めよ。

**解答**  $a = 2 - \sqrt{2}$

$$y = \sin 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = a \sin x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

とおく。

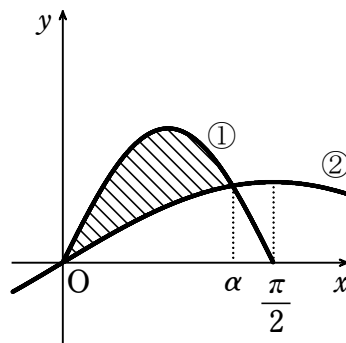
曲線 ② が、曲線 ① と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するとき、①、② の原点以外の交点の  $x$  座標を  $\alpha$  とすると、 $\sin 2\alpha = a \sin \alpha$  から

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = a \sin \alpha$$

$$\sin \alpha > 0 \text{ であるから} \quad \cos \alpha = \frac{a}{2}$$

$$\text{ここで、} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ であるから} \quad 0 < \frac{a}{2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

曲線 ② が、曲線 ① と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するから



$$\int_0^{\alpha} (\sin 2x - a \sin x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad \int_0^{\alpha} (\sin 2x - a \sin x) dx &= \left[ -\frac{\cos 2x}{2} + a \cos x \right]_0^{\alpha} \\ &= -\frac{\cos 2\alpha - 1}{2} + a(\cos \alpha - 1) \\ &= -\frac{(2\cos^2 \alpha - 1) - 1}{2} + a \cos \alpha - a \\ &= \frac{a^2}{4} - a + 1 \quad \left( \cos \alpha = \frac{a}{2} \text{ から} \right) \end{aligned}$$

$$\text{一方} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[ -\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{a^2}{4} - a + 1 = \frac{1}{2} \times 1 \quad \text{よって} \quad a^2 - 4a + 2 = 0$$

$$\text{これを解くと} \quad a = 2 \pm \sqrt{2} \quad \textcircled{3} \text{ を満たすものは} \quad a = 2 - \sqrt{2}$$

### B 33 - 6

次の定積分を計算せよ。ただし、 $n$  は自然数、 $a, b$  は実数の定数とする。

$$\int_0^{\pi} |a \sin nx + b \cos nx| dx$$

**B 33 - 7**

実数  $t$  が  $1 \leq t \leq e$  の範囲を動くとき、 $S(t) = \int_0^1 |e^x - t| dx$  の最大値と最小値を求めよ。

**解答**  $t=e$  のとき最大値 1,  $t=\sqrt{e}$  のとき最小値  $e-2\sqrt{e}+1$

$e^x = t$  とおくと、 $x = \log t$  であるから

区間  $0 \leq x \leq \log t$  において  $|e^x - t| = -e^x + t$

区間  $\log t \leq x \leq 1$  において  $|e^x - t| = e^x - t$

したがって

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{\log t} (-e^x + t) dx + \int_{\log t}^1 (e^x - t) dx = \left[ -e^x + tx \right]_0^{\log t} + \left[ e^x - tx \right]_{\log t}^1 \\ &= (-t + t \log t + 1) + (e - t - t + t \log t) = 2t \log t - 3t + e + 1, \end{aligned}$$

$$S'(t) = 2 \log t + 2 - 3 = 2 \log t - 1$$

よって、 $S(t)$  の増減表は次のようになる。

|         |       |            |                 |            |     |
|---------|-------|------------|-----------------|------------|-----|
| $t$     | 1     | ...        | $\sqrt{e}$      | ...        | $e$ |
| $S'(t)$ |       | -          | 0               | +          |     |
| $S(t)$  | $e-2$ | $\searrow$ | $e-2\sqrt{e}+1$ | $\nearrow$ | 1   |

したがって、 $t=e$  のとき最大値 1,  $t=\sqrt{e}$  のとき最小値  $e-2\sqrt{e}+1$  をとる。

**B 33 - 8**

曲線  $y = \log x$  と  $x$  軸, 直線  $x = e$  で囲まれた図形を  $F$  とする。 $F$  を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を  $V_1$ ,  $F$  を直線  $x = e$  の周りに 1 回転してできる立体の体積を  $V_2$  とする。

(1)  $V_1$  と  $V_2$  を求めよ。

(2)  $V_1$  と  $V_2$  の大小を比べよ。

**解答** (1)  $V_1 = \pi(e-2)$ ,  $V_2 = \frac{\pi}{2}(-e^2 + 4e - 1)$  (2)  $V_1 < V_2$

(1) 図形  $F$  は右の図の斜線部分のようになる。

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_1^e (\log x)^2 dx \\ &= \pi \left( \left[ x(\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \pi \left( e - 2 \left[ x \log x - x \right]_1^e \right) = \pi(e-2) \end{aligned}$$

また  $y = \log x \iff x = e^y$

曲線  $y = \log x$  上の点  $P(x, y)$  ( $0 \leq y \leq 1$ ) から

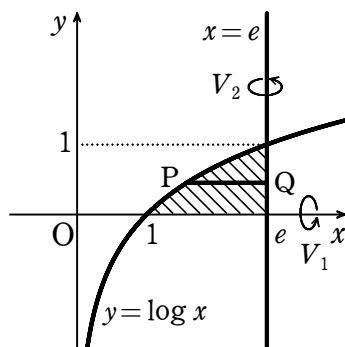
直線  $x = e$  に垂線  $PQ$  を引くと

$$PQ = e - e^y$$

$$\begin{aligned} \text{よって } V_2 &= \pi \int_0^1 PQ^2 dy = \pi \int_0^1 (e^2 - 2e \cdot e^y + e^{2y}) dy \\ &= \pi \left[ e^2 \cdot y - 2e \cdot e^y + \frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} (-e^2 + 4e - 1) \end{aligned}$$

$$(2) \quad V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 2e - 3) = \frac{\pi}{2} (e+1)(e-3)$$

$e < 3$  であるから  $V_1 - V_2 < 0$       よって  $V_1 < V_2$



### B 33 - 9

曲線  $C: y = \log x$  に原点から接線  $\ell$  を引く。曲線  $C$  と接線  $\ell$  および  $x$  軸で囲まれた図形を  $D$  とするとき、次の回転体の体積を求めよ。

(1)  $D$  を  $x$  軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積  $V_x$

(2)  $D$  を  $y$  軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積  $V_y$

**解答** (1)  $\frac{2(3-e)}{3}\pi$       (2)  $\frac{(e^2-3)\pi}{6}$

曲線  $C$  上の点  $(a, \log a)$  における接線の方程式は、

$$y' = \frac{1}{x} \text{ であるから}$$

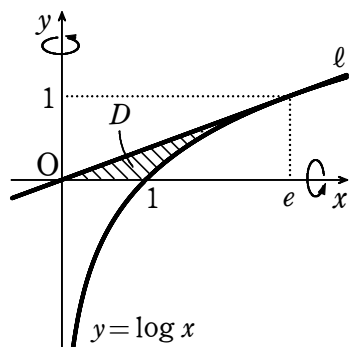
$$y - \log a = \frac{1}{a}(x - a)$$

この直線が原点を通るから  $\log a = 1$

ゆえに  $a = e$

よって、接線  $\ell$  の方程式は  $y = \frac{x}{e}$

また、接点の座標は  $(e, 1)$



$$\begin{aligned}
 (1) \quad V_x &= \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot e - \pi \int_1^e (\log x)^2 dx = \frac{e\pi}{3} - \pi \int_1^e (x)'(\log x)^2 dx \\
 &= \frac{e\pi}{3} - \pi \left\{ \left[ x(\log x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \log x dx \right\} \\
 &= \frac{e\pi}{3} - \pi \left( e - 2 \left[ x \log x - x \right]_1^e \right) = \frac{2(3-e)\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad y = \log x \text{ から } x = e^y$$

$$V_y = \pi \int_0^1 (e^y)^2 dy - \frac{1}{3}\pi \cdot e^2 \cdot 1 = \pi \left[ \frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 - \frac{e^2\pi}{3} = \frac{(e^2-3)\pi}{6}$$

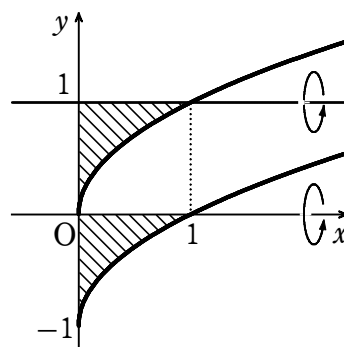
**B 33 - 10**

曲線  $y = \sqrt{x}$  と直線  $y = 1$  および  $y$  軸で囲まれた部分が、 $y = 1$  の周りに 1 回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

**解答**  $\frac{\pi}{6}$

求める回転体の体積は、曲線  $y = \sqrt{x}$  を  $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動した曲線が、 $x$  軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積と同じであるから

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx \\
 &= \pi \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + x \right]_0^1 = \pi \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 \right) - 0 \right\} \\
 &= \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$



**別解** 回転体の断面は、半径  $(1 - \sqrt{x})$  の円であるから

$$V = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \frac{\pi}{6}$$

**B 33 - 11**

曲線  $y^2 - 2y + x = 0$  と  $y$  軸で囲まれる図形を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

**解答**  $\frac{8}{3}\pi$

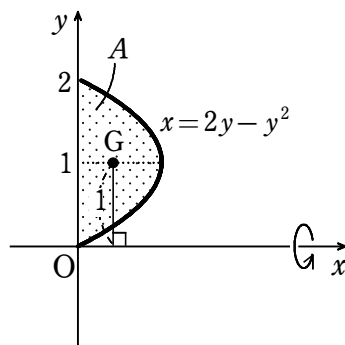
$$y^2 - 2y + x = 0 \text{ から } x = 2y - y^2 = y(2 - y)$$

右の図形  $A$  の面積は

$$\int_0^2 (2y - y^2) dy = \left[ y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

図形  $A$  の重心  $G$  は、直線  $y=1$  上にあるから、パップス - ギュルダンの定理により、求める体積  $V$  は

$$V = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi$$



**別解**  $x = -y^2 + 2y = -(y-1)^2 + 1$  から  $y = 1 \pm \sqrt{1-x}$

$$\text{よって } V = \pi \int_0^1 \{(1 + \sqrt{1-x})^2 - (1 - \sqrt{1-x})^2\} dx$$

$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = 4\pi \left[ -\frac{2}{3} \sqrt{(1-x)^3} \right]_0^1 = 4\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

### B 33 - 12

座標平面上の 2 点  $P(x, 0)$ ,  $Q(x, \sin x)$  を結ぶ線分を 1 辺とし、この平面に垂直な正方形を作る。P が原点  $O$  から  $A(\pi, 0)$  まで動くとき、この正方形が通過してできる立体の体積  $V$  を求めよ。

**解答**  $\frac{\pi}{2}$

$0 \leq x \leq \pi$  では  $PQ = \sin x$

PQ を 1 辺とする正方形の面積  $S(x)$  は  $S(x) = \sin^2 x$

$$\text{よって } V = \int_0^\pi S(x) dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx$$

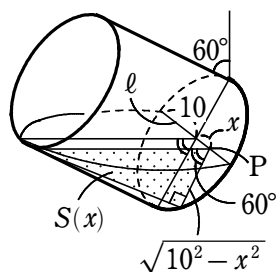
$$= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{1}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi}{2}$$

### B 33 - 13

底面の半径が 10 の円筒状の容器に水が入っている。水がこぼれ始めるぎりぎりまで容器を傾けたところ、容器は鉛直方向に対し  $60^\circ$  傾き、水面は底面の中心を通った。水の量  $V$  を求めよ。

**解答**  $\frac{2000\sqrt{3}}{3}$

水面と底面が交わる直線を  $\ell$  とし,  $\ell$  上の点で, 底面の中心からの距離が  $x$  の点を  $P$  とする。点  $P$  を通り  $\ell$  に垂直な平面で切ったとき, 水が入っている部分の立体の切り口は  $\angle P = 60^\circ$  の直角三角形で, その面積を  $S(x)$  とすると



$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{10^2 - x^2} \cdot \sqrt{3} \sqrt{10^2 - x^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (10^2 - x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} (100 - x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad V &= 2 \int_0^{10} S(x) dx = \sqrt{3} \int_0^{10} (100 - x^2) dx \\ &= \sqrt{3} \left[ 100x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{2000\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

### B 33 - 14

半径  $r$  の半球形の容器に水が満たされている。この容器を静かに  $30^\circ$  だけ傾けると, どれだけの水が流れ出るかを求めよ。

【解答】  $\frac{11}{24} \pi r^3$

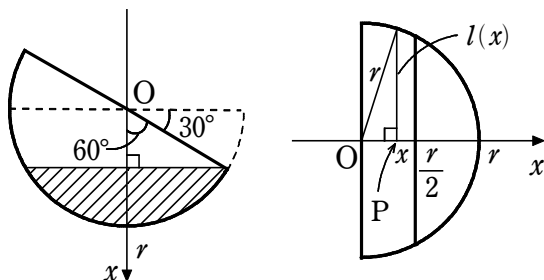
容器を  $30^\circ$  だけ傾けたときの水面の中心を通り, 水面に垂直な直線上に  $x$  軸をとり, 半球の中心を原点  $O$  とする。また,  $x$  軸上の点  $P(x)$  を通り,  $x$  軸に垂直な平面による半球の断面の半径を  $l(x)$  とする。

原点  $O$  から水面までの距離は

$$r \cos 60^\circ = \frac{1}{2} r$$

$$\text{また} \quad \{l(x)\}^2 = r^2 - x^2$$

よって, 流れ出た水の体積は



$$\int_0^{\frac{r}{2}} \pi \{l(x)\}^2 dx = \pi \int_0^{\frac{r}{2}} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{r}{2}} = \frac{11}{24} \pi r^3$$

### C 33 - 1

曲線  $5x^2 + 2xy + y^2 = 16$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。

**解答**  $8\pi$

$$5x^2 + 2xy + y^2 = 16 \text{ から } y^2 + 2xy + 5x^2 - 16 = 0$$

$$\text{これを } y \text{ について解くと } y = -x \pm \sqrt{x^2 - (5x^2 - 16)} = -x \pm 2\sqrt{4 - x^2}$$

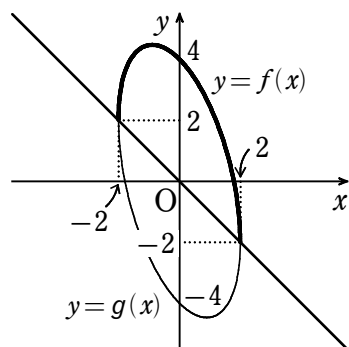
$4 - x^2 \geq 0$  であるから、曲線は  $-2 \leq x \leq 2$  で定義されている。

$$f(x) = -x + 2\sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = -x - 2\sqrt{4 - x^2} \text{ とすると、定義域内で } f(x) \geq g(x)$$

$$\text{よって } S = \int_{-2}^2 \{f(x) - g(x)\} dx = 4 \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$  は半径 2 の半円の面積を表すから

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = 8\pi$$



### C 33 - 2

$F(a) = \int_1^e |\log x - a| dx$  とする。 $F(1)$  の値を求めよ。また、 $F(a)$  が最小値をとる  $a$  の値と最小値を求めよ。

**解答**  $F(1) = e - 2$ ,  $a = \log \frac{e+1}{2}$  で最小値  $e - (e+1) \log \frac{e+1}{2}$

$$1 \leq x \leq e \text{ のとき } 0 \leq \log x \leq 1$$

$$\text{よって } F(1) = \int_1^e |\log x - 1| dx = \int_1^e (1 - \log x) dx$$

$$= \left[ x - (x \log x - x) \right]_1^e = \left[ 2x - x \log x \right]_1^e = e - 2$$

次に、 $F(a)$  について考える。

$$\log x \geq a \text{ すなわち } x \geq e^a \text{ のとき } |\log x - a| = \log x - a$$

$$\log x < a \text{ すなわち } 0 < x < e^a \text{ のとき } |\log x - a| = a - \log x$$

[1]  $e^a \leq 1$  すなわち  $a \leq 0$  のとき

$$F(a) = \int_1^e (\log x - a) dx = \left[ x \log x - x - ax \right]_1^e = -ae + a + 1 = a(1 - e) + 1 \geq 1$$

[2]  $e^a \geq e$  すなわち  $a \geq 1$  のとき

$$F(a) = \int_1^e (a - \log x) dx = a(e - 1) - 1 \geq e - 2$$

[3]  $1 \leq e^a \leq e$  すなわち  $0 \leq a \leq 1$  のとき

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_1^{e^a} (a - \log x) dx + \int_{e^a}^e (\log x - a) dx \\ &= \left[ ax - x \log x + x \right]_1^{e^a} + \left[ x \log x - x - ax \right]_{e^a}^e \\ &= e^a - a - 1 - ae + e^a = 2e^a - (e+1)a - 1 \end{aligned}$$

$$F'(a) = 2e^a - (e+1) \text{ で, } F'(a) = 0 \text{ とすると } a = \log \frac{e+1}{2}$$

$0 \leq a \leq 1$  における  $F(a)$  の増減表は, 次のようになる。

|         |   |            |                      |            |       |
|---------|---|------------|----------------------|------------|-------|
| $a$     | 0 | ...        | $\log \frac{e+1}{2}$ | ...        | 1     |
| $F'(a)$ |   | -          | 0                    | +          |       |
| $F(a)$  | 1 | $\searrow$ | 極小                   | $\nearrow$ | $e-2$ |

[1] ~ [3] から,  $a = \log \frac{e+1}{2}$  で最小値  $e - (e+1) \log \frac{e+1}{2}$

### C 33 - 3

次の曲線で囲まれた部分を,  $x$  軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(1)  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$  において,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$

(2)※  $0 \leq x \leq \pi$  において,  $y = \sin \left| x - \frac{\pi}{2} \right|$ ,  $y = \cos 2x$

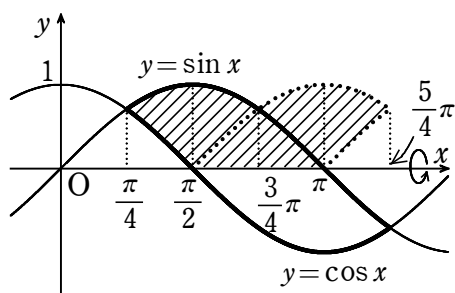
**解答** (1)  $\frac{\pi}{4}(\pi+6)$  (2)  $\frac{\pi}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$

(1) 2つの曲線で囲まれた部分について,  $x$  軸より下側の部分を  $x$  軸に関して折り返すと, 右の図の斜線部分になる。

この部分は直線  $x = \frac{3}{4}\pi$  に関して対称である。

よって, 求める体積  $V$  は

$$V = 2\pi \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2 x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \pi \left\{ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (1 - \cos 2x) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \right\} \\
 &= \pi \left\{ \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} - \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \\
 &= \pi \left\{ \frac{\pi}{2} + 1 - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{\pi}{4} (\pi + 6)
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \sin \left| x - \frac{\pi}{2} \right| = \begin{cases} \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos x & (\frac{\pi}{2} < x \leq \pi) \end{cases}$$

よって、囲まれた部分は右の図の斜線部分で、直線

$x = \frac{\pi}{2}$  に関して対称である。

$$\cos x = -\cos 2x \text{ とおくと } 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\text{よって } (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \cos x + 1 > 0 \text{ から } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } x = \frac{\pi}{3}$$

したがって、回転体は右の図の斜線部分を  $x$  軸の周りに 1 回転させたものであり、求める体積  $V$  は

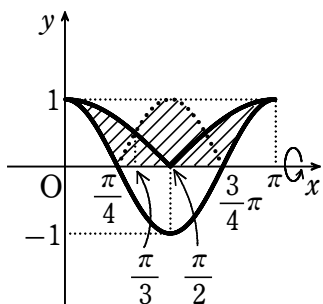
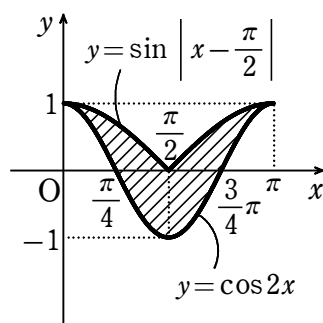
$$V = 2\pi \left( \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx \right)$$

$$= \pi \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4x) dx \right\}$$

$$= \pi \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \pi \left[ x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \pi \left[ x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{\pi^2}{4} + \pi \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$= \pi \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{8} (2\pi + 3\sqrt{3})$$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲で、2 曲線  $y = \tan x$ ,  $y = a \sin 2x$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積が 1 となるように、正の実数  $a$  の値を定めよ。

**解答**  $a = \frac{e}{2}$

2 曲線の交点の  $x$  座標は、方程式  $\tan x = a \sin 2x$  …… ① の解である。

$x = 0$  は ① の解であり、 $x = \frac{\pi}{2}$  は ① の解ではない。

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき、① から  $\frac{\sin x}{\cos x} = 2a \sin x \cos x$

ゆえに  $2a \cos^2 x = 1$  よって  $\cos^2 x = \frac{1}{2a}$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  であるから  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$  …… ②

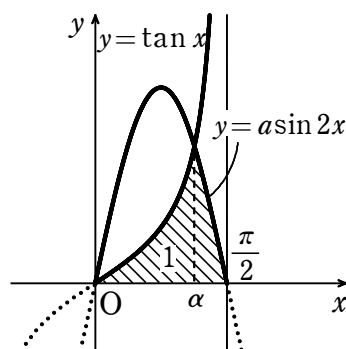
等式 ② を満たす  $x$  の値を  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) とおく。

このとき、2 曲線と  $x$  軸で囲まれた図形の面積  $S$  は

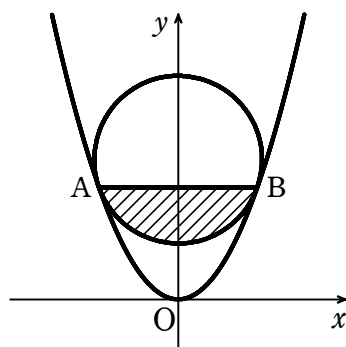
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\alpha} \tan x \, dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a \sin 2x \, dx \\ &= \left[ -\log(\cos x) \right]_0^{\alpha} - \frac{a}{2} \left[ \cos 2x \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\log(\cos \alpha) - \frac{a}{2} \{-1 - (2\cos^2 \alpha - 1)\} \\ &= -\log \frac{1}{\sqrt{2a}} + a \left( \frac{1}{\sqrt{2a}} \right)^2 = \frac{1}{2} \log 2a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$S = 1$  となるための条件は  $\frac{1}{2} \log 2a + \frac{1}{2} = 1$  整理して  $\log 2a = 1$

ゆえに  $2a = e$  したがって  $a = \frac{e}{2}$



$xy$  平面上において、 $y$  軸上に中心をもつ半径  $r$  の円が、放物線  $y=x^2$  と図のように、点  $A$  と点  $B$  で接しているとする。線分  $AB$  と円弧  $AB$  とで囲まれた部分 (図の斜線部分) を  $y$  軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ。ただし、 $r > \frac{1}{2}$  とする。



**解答**  $\pi\left(\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{24}\right)$

$\alpha > 0$  とし、 $A(-\alpha, \alpha^2)$ ,  $B(\alpha, \alpha^2)$  とする。また、円の中心を  $C(0, k)$  とする。点  $B$  における放物線の接線の傾きは  $2\alpha$  であり、この接線は直線  $BC$  に垂直である。

よって  $\frac{\alpha^2 - k}{\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}$  ゆえに  $k = \alpha^2 + \frac{1}{2}$  ..... ①

また、接点  $B$  は円  $x^2 + (y - k)^2 = r^2$  の周上にあるから

$$\alpha^2 + (\alpha^2 - k)^2 = r^2$$

よって、① から  $\alpha^2 = r^2 - \frac{1}{4}$

ゆえに  $\alpha = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}$ ,  $k = r^2 + \frac{1}{4}$

求める回転体の体積  $V$  は

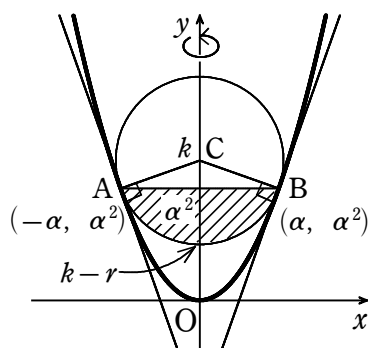
$$V = \pi \int_{k-r}^{\alpha^2} x^2 dy = \pi \int_{k-r}^{\alpha^2} \{r^2 - (y-k)^2\} dy$$

ここで、 $y - k = t$  とおくと  $dy = dt$

$y$  と  $t$  の対応は右のようになる。

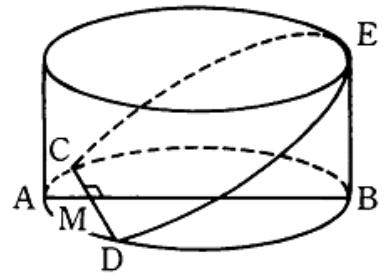
よって  $V = \pi \int_{-r}^{-\frac{1}{2}} (r^2 - t^2) dt = \pi \int_{\frac{1}{2}}^r (r^2 - t^2) dt$

$$= \pi \left[ r^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{\frac{1}{2}}^r = \pi \left( \frac{2}{3} r^3 - \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{24} \right)$$



|     |                               |
|-----|-------------------------------|
| $y$ | $k - r \rightarrow \alpha^2$  |
| $t$ | $-r \rightarrow -\frac{1}{2}$ |

右の図のように、底円の半径 1、高さ 1 の直円柱がある。底円の直径  $AB$  上に点  $M$  を  $AM = \frac{1}{2}$  となるように選び、底円の周上に 2 点  $C, D$  を線分  $CD$  が点  $M$  を通り、かつ  $CD \perp AB$  となるように選ぶ。さらに、この直円柱上に点  $E$  を、 $BE = 1$  かつ  $BE \perp BA$  となるように選ぶ。3 点  $C, D, E$  を通る平面  $\alpha$  でこの直円柱を切るとき、平面  $\alpha$  の下側にある部分の体積を求めよ。



**C 33 - 7**

$a, b$  を正の実数とする。空間内の 2 点  $A(0, a, 0)$ ,  $B(1, 0, b)$  を通る直線を  $\ell$  とし、直線  $\ell$  を  $x$  軸の周りに 1 回転して得られる図形を  $M$  とする。

- (1)  $x$  座標の値が  $t$  であるような直線  $\ell$  上の点  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 図形  $M$  と 2 つの平面  $x=0$  と  $x=1$  で囲まれた立体の体積を求めよ。

**解答** (1)  $P(t, a(1-t), bt)$  (2)  $\frac{\pi}{3}(a^2 + b^2)$

- (1) 直線  $\ell$  上の点  $C$  は、 $s$  を実数として、 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB}$  と表され

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= (0, a, 0) + s(1, -a, b) \\ &= (s, a(1-s), bs)\end{aligned}$$

よって、 $x$  座標が  $t$  である点  $P$  の座標は、 $s=t$  として

$$P(t, a(1-t), bt)$$

- (2) 図形  $M$  を平面  $x=t$  で切ったときの断面は、中心が

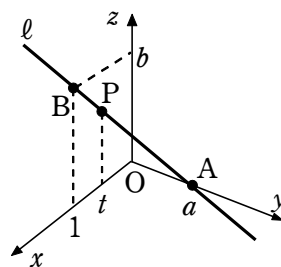
$(t, 0, 0)$ , 半径  $\sqrt{a^2(1-t)^2 + b^2t^2}$  の円である。

ゆえに、その断面積を  $S(t)$  とすると

$$S(t) = \pi\{a^2(1-t)^2 + b^2t^2\}$$

よって、求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^1 \{a^2(1-t)^2 + b^2t^2\} dt = \pi \int_0^1 \{(a^2 + b^2)t^2 - 2a^2t + a^2\} dt \\ &= \pi \left[ \frac{a^2 + b^2}{3} t^3 - a^2t^2 + a^2t \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}(a^2 + b^2)\end{aligned}$$

**C 33 - 8**

$xyz$  空間に 3 点  $P(1, 1, 0)$ ,  $Q(-1, 1, 0)$ ,  $R(-1, 1, 2)$  をとる。

- (1)  $t$  を  $0 \leq t < 2$  を満たす実数とすると、平面  $z=t$  と  $\triangle PQR$  の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。
- (2)  $\triangle PQR$  を  $z$  軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

**解答** (1)  $(1-t, 1, t)$ ,  $(-1, 1, t)$  (2)  $\frac{5}{3}\pi$

- (1) 平面  $z=t$  と線分 RP, RQ との交点をそれぞれ

A, B とする。

A は線分 PR 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PR} \quad (k \text{ は実数}) \\ &= (1, 1, 0) + k(-2, 0, 2) \\ &= (1-2k, 1, 2k)\end{aligned}$$

A は平面  $z=t$  上の点であるから  $2k=t$

ゆえに  $\overrightarrow{OA} = (1-t, 1, t)$

また, B は線分 QR 上にあり, 直線 QR は  $z$  軸に平行であるから

$$\overrightarrow{OB} = (-1, 1, t)$$

よって, 求める 2 つの端点の座標は  $(1-t, 1, t), (-1, 1, t)$

- (2) 平面  $z=t$  による回転体の切り口の図形は, 線分 AB を  $z$  軸の周りに 1 回転したもので, この切り口の図形の面積を  $S(t)$  とする。

平面  $z=t$  と  $z$  軸の交点を C とすると, 点 C の座標は  $(0, 0, t)$  であるから

$$AC = \sqrt{(1-t)^2 + 1^2}, \quad BC = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$0 \leq t < 2$  の範囲において,  $1 \leq (1-t)^2 + 1 \leq 2$  であるから

$$1 \leq AC \leq \sqrt{2} \quad \text{すなわち} \quad AC \leq BC$$

また, 点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと  $CH=1$

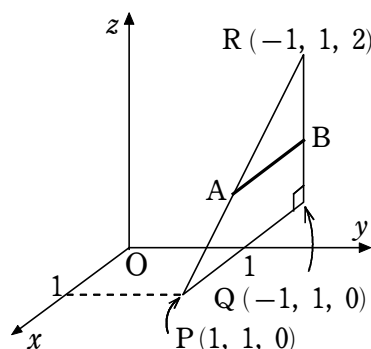
H が線分 AB 上にあるのは,  $0 \leq 1-t \leq 1$  すなわち  $0 \leq t \leq 1$  のときである。

[1]  $0 \leq t \leq 1$  のとき

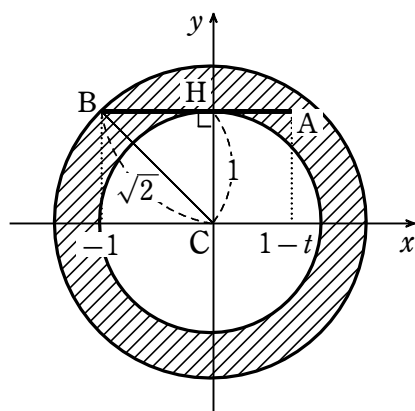
$$S(t) = \pi \cdot BC^2 - \pi \cdot CH^2 = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi$$

[2]  $1 < t < 2$  のとき

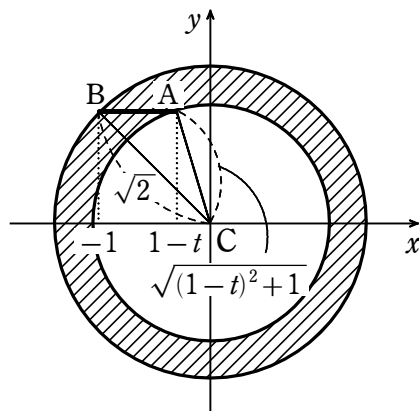
$$\begin{aligned}S(t) &= \pi \cdot BC^2 - \pi \cdot AC^2 = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 - \pi \cdot \{(1-t)^2 + 1\}^2 \\ &= (-t^2 + 2t)\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$



[1]



[2]



$t=2$  の場合, 平面  $z=2$  と  $\triangle PQR$  は点  $R$  で交わり, このときの切り口の面積は  $0$  となるが, これは ① で  $t=2$  を代入したものと同じである。したがって

$$0 \leq t \leq 1 \text{ のとき } S(t) = \pi, \quad 1 < t \leq 2 \text{ のとき } S(t) = (-t^2 + 2t)\pi$$

以上から, 求める体積  $V$  は

$$V = \int_0^2 S(t) dt = \pi \int_0^1 dt + \pi \int_1^2 (-t^2 + 2t) dt = \pi \left[ t \right]_0^1 + \pi \left[ -\frac{t^3}{3} + t^2 \right]_1^2 = \frac{5}{3} \pi$$

### C 33 - 9

関数  $f(x) = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) について, 関数  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた部分を  $y$  軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積  $V$  は,  $V = 2\pi \int_0^\pi x f(x) dx$  で与えられることを示せ。また, この体積を求めよ。

**解答** 証明略,  $2\pi^2$

$y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) のグラフの  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の部分の  $x$  座標

を  $x_1$  とし,  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  の部分の  $x$  座標を  $x_2$  とする。

このとき, 体積  $V$  は 
$$V = \pi \int_0^1 x_2^2 dy - \pi \int_0^1 x_1^2 dy$$

ここで,  $y = \sin x$  から  $dy = \cos x dx$

積分区間の対応は

$x_1$  については [1],

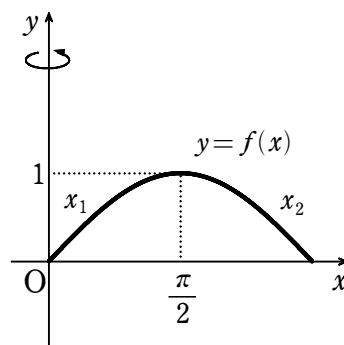
$x_2$  については [2]

のようになる。

よって

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = -\pi \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx \\ &= -\pi \left( \left[ x^2 \sin x \right]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx \right) = 2\pi \int_0^{\pi} x f(x) dx \end{aligned}$$

また 
$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = 2\pi \left( \left[ -x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = 2\pi \left( \pi + \left[ \sin x \right]_0^{\pi} \right) = 2\pi^2$$



**C 33 - 10**

放物線  $y = x^2 - x$  と直線  $y = x$  との原点  $O$  以外の交点を  $A$  とする。この直線と放物線によって囲まれる部分を、直線  $OA$  を軸として回転して得られる立体の体積を求めよ。

**解答**  $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$

右の図のように、放物線上の点  $P(x, x^2 - x)$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) から直線  $y = x$  に垂線  $PQ$  を引き、 $PQ = h$ ,  $OQ = t$  ( $0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ ) とする。

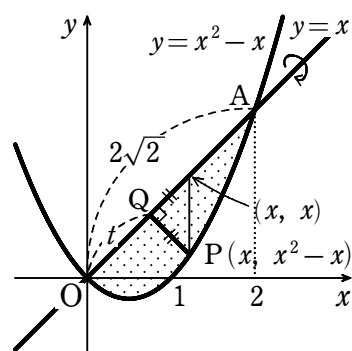
このとき 
$$h = \frac{|x - (x^2 - x)|}{\sqrt{2}} = \frac{2x - x^2}{\sqrt{2}}$$

$$t = \sqrt{2}x - h = \sqrt{2}x - \frac{2x - x^2}{\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

よって  $dt = \sqrt{2}x dx$

求める体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} h^2 dt = \pi \int_0^2 \frac{(x^2 - 2x)^2}{2} \cdot \sqrt{2}x dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^2 (x^5 - 4x^4 + 4x^3) dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[ \frac{x^6}{6} - \frac{4}{5}x^5 + x^4 \right]_0^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi \end{aligned}$$



## 第 34 章 数学Ⅲの積分の応用(2)

### A 34 - 1

次の等式を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。(2) では、定数  $a$  の値も求めよ。

$$(1) \quad f(x) = 3x + \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt$$

$$(2) \quad \int_a^x (x-t)f(t) \, dt = \log x - x + 1$$

**解答** (1)  $f(x) = 3x - 3\pi$       (2)  $a = 1, \quad f(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$(1) \quad \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt = k \quad \text{とおくと} \quad f(x) = 3x + k$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt &= \int_0^{\pi} (3t + k) \sin t \, dt = \int_0^{\pi} (3t + k)(-\cos t)' \, dt \\ &= \left[ (3t + k)(-\cos t) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (3t + k)'(-\cos t) \, dt \\ &= 3\pi + 2k + 3 \int_0^{\pi} \cos t \, dt = 3\pi + 2k + 3 \left[ \sin t \right]_0^{\pi} \\ &= 3\pi + 2k \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad k = 3\pi + 2k \quad \text{よって} \quad k = -3\pi$$

$$\text{したがって} \quad f(x) = 3x - 3\pi$$

(2) 与えられた等式を ① とする。

$$\text{① から} \quad x \int_a^x f(t) \, dt - \int_a^x t f(t) \, dt = \log x - x + 1$$

この両辺を  $x$  で微分すると

$$1 \cdot \int_a^x f(t) \, dt + x f(x) - x f(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$\text{ゆえに} \quad \int_a^x f(t) \, dt = \frac{1}{x} - 1 \quad \dots\dots \text{②}$$

$$\text{② の両辺を } x \text{ で微分すると} \quad f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{② の両辺に } x = a \text{ を代入して} \quad 0 = \frac{1}{a} - 1$$

$$\text{よって} \quad a = 1 \quad f(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad a = 1 \text{ は ① を満たす。}$$

**A 34 - 2**

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2}$$

**解答** (1)  $\frac{1}{2} \log 2$  (2)  $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \log(x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

**参考** 定積分  $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$  は半径 1 の四分円の面積を表す。または、 $x = \cos \theta$  において置換積分法で求める。

**A 34 - 3**

次の曲線の長さ  $L$  を求めよ。

$$(1) x = \frac{2}{3}t^3, y = t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$(2) x = 3t^2, y = 3t - t^3 \quad (0 \leq t \leq \sqrt{3})$$

$$(3) x = e^\theta \cos \theta, y = e^\theta \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$(4) x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

**解答** (1)  $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$  (2)  $6\sqrt{3}$  (3)  $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

$$(1) \frac{dx}{dt} = 2t^2, \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\text{よって } L = \int_0^1 \sqrt{(2t^2)^2 + (2t)^2} dt = \int_0^1 2t\sqrt{t^2 + 1} dt = \left[ \frac{2}{3}(t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = 6t, \quad \frac{dy}{dt} = 3 - 3t^2$$

$$\text{よって} \quad L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(6t)^2 + (3 - 3t^2)^2} dt = 3 \int_0^{\sqrt{3}} (1 + t^2) dt = 3 \left[ t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

$$(3) \quad \frac{dx}{d\theta} = e^\theta (\cos \theta - \sin \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = e^\theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad L &= \int_0^\pi \sqrt{e^{2\theta}(\cos \theta - \sin \theta)^2 + e^{2\theta}(\sin \theta + \cos \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2} e^\theta d\theta = \sqrt{2} \left[ e^\theta \right]_0^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1) \end{aligned}$$

### A 34 - 4

次の曲線の長さ  $L$  を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x} \quad (1 \leq x \leq 2)$$

$$(2) \quad y = \frac{3}{2} \left( e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right) \quad (-6 \leq x \leq 6)$$

$$(3) \quad y = \sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

**解答** (1)  $\frac{59}{24}$  (2)  $3 \left( e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$  (3)  $\frac{\pi}{2}$

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2}, \quad 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \left( x^2 - \frac{1}{4x^2} \right)^2 = \left( x^2 + \frac{1}{4x^2} \right)^2$$

$$\text{よって} \quad L = \int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{4x^2} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x} \right]_1^2 = \frac{59}{24}$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}} \right), \quad 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} \left( e^{\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right)^2$$

$$\text{よって} \quad L = \int_{-6}^6 \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right) dx = \int_0^6 \left( e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right) dx$$

$$= \left[ 3e^{\frac{x}{3}} - 3e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^6 = 3 \left( e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\text{よって} \quad L = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$x = \sin \theta \quad \text{とおくと} \quad dx = \cos \theta d\theta$$

$x$  と  $\theta$  の対応は右のようになる。

|          |   |   |                 |
|----------|---|---|-----------------|
| $x$      | 0 | → | 1               |
| $\theta$ | 0 | → | $\frac{\pi}{2}$ |

$$\text{よって} \quad L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

### B 34 - 1

次の極限値を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \cdots + \frac{n^3}{n^3} \right)$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{n^2}{(n+n)^3} \right\}$$

**解答** (3)  $\frac{1}{4}$     (4)  $2\sqrt{2} - 2$     (5)  $\frac{3}{8}$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left( \frac{1}{n} \right)^3 + \left( \frac{2}{n} \right)^3 + \cdots + \left( \frac{n}{n} \right)^3 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} \right)^3 = \int_0^1 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$(4) \quad (\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = \left[ 2\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

$$(5) \quad (\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^3}{(n+k)^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left( 1+\frac{k}{n} \right)^3} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3} dx = \left[ -\frac{1}{2(1+x)^2} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

**B 34 - 2**

O を中心とする半径 1 の円  $C$  の内部に中心と異なる定点  $A$  がある。半直線  $OA$  と  $C$  との交点を  $P_0$  とし、 $P_0$  を起点として  $C$  の周を  $n$  等分する点を反時計回りに順に  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = P_0$  とする。

$A$  と  $P_k$  の距離を  $\overline{AP_k}$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overline{AP_k}^2$  を求めよ。

ただし、 $\overline{OA} = a$  とする。

**解答**  $a^2 + 1$

O を原点、直線  $OA$  を  $x$  軸とし、定点  $A$  の座標を  $A(a, 0)$  とする。反時計方向に  $P_0$  から  $P_k$  まで測

った角は  $\angle P_0OP_k = \frac{2k\pi}{n}$  であるから、 $P_k$  の座標は

$$\left( \cos \frac{2k\pi}{n}, \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

よって  $\overline{AP_k}^2 = \left( \cos \frac{2k\pi}{n} - a \right)^2 + \left( \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^2$

$$= a^2 - 2a \cos \frac{2k\pi}{n}$$

$$+ \cos^2 \frac{2k\pi}{n} + \sin^2 \frac{2k\pi}{n}$$

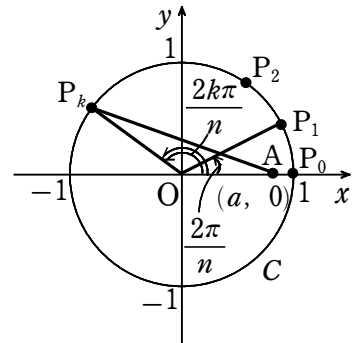
$$= a^2 + 1 - 2a \cos \frac{2k\pi}{n}$$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overline{AP_k}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( a^2 + 1 - 2a \cos \frac{2k\pi}{n} \right)$

$$= a^2 + 1 - 2a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left( 2\pi \cdot \frac{k}{n} \right)$$

$$= a^2 + 1 - 2a \int_0^1 \cos 2\pi x dx$$

$$= a^2 + 1 - 2a \left[ \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \right]_0^1 = a^2 + 1$$

**B 34 - 3**

関数  $f(x)$  は  $f(x) = x + 2 \int_0^\pi \sin(x-t) f(t) dt$  を満たすとする。このとき、 $f(x)$  を求めよ。

$$\boxed{\text{解答}} \quad f(x) = x - \frac{2(\pi^2 + 2)}{\pi^2 + 1} \sin x + \frac{2\pi}{\pi^2 + 1} \cos x$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 \int_0^\pi (\sin x \cos t - \cos x \sin t) f(t) dt \\ &= x + 2 \sin x \int_0^\pi f(t) \cos t dt - 2 \cos x \int_0^\pi f(t) \sin t dt \end{aligned}$$

このとき,  $2 \int_0^\pi f(t) \cos t dt = A$ ,  $-2 \int_0^\pi f(t) \sin t dt = B$  ( $A, B$  は定数) とおくと,

$f(x) = x + A \sin x + B \cos x$  と表されるから

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi f(t) \cos t dt &= 2 \int_0^\pi (t + A \sin t + B \cos t) \cos t dt \\ &= 2 \int_0^\pi t \cos t dt + A \int_0^\pi 2 \sin t \cos t dt + B \int_0^\pi 2 \cos^2 t dt \\ &= 2 \left( \left[ t \sin t \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t dt \right) + A \int_0^\pi \sin 2t dt + B \int_0^\pi (1 + \cos 2t) dt \\ &= 2 \left[ \cos t \right]_0^\pi + A \left[ -\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^\pi + B \left[ t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^\pi \\ &= 2(-1 - 1) - \frac{A}{2}(1 - 1) + B\pi = B\pi - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \int_0^\pi f(t) \sin t dt &= -2 \int_0^\pi (t + A \sin t + B \cos t) \sin t dt \\ &= -2 \int_0^\pi t \sin t dt - A \int_0^\pi 2 \sin^2 t dt - B \int_0^\pi 2 \sin t \cos t dt \\ &= 2 \left( \left[ t \cos t \right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos t dt \right) - A \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt - B \int_0^\pi \sin 2t dt \\ &= 2 \left( -\pi - \left[ \sin t \right]_0^\pi \right) - A \left[ t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^\pi + B \left[ \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^\pi \\ &= -2\pi - A\pi \end{aligned}$$

ゆえに  $A = B\pi - 4$ ,  $B = -A\pi - 2\pi$

よって,  $(\pi^2 + 1)A = -2\pi^2 - 4$  から  $A = \frac{-2\pi^2 - 4}{\pi^2 + 1}$

$(\pi^2 + 1)B = 2\pi$  から  $B = \frac{2\pi}{\pi^2 + 1}$

したがって  $f(x) = x - \frac{2(\pi^2 + 2)}{\pi^2 + 1} \sin x + \frac{2\pi}{\pi^2 + 1} \cos x$

**B 34 - 4**

次の等式を満たす関数  $f(x)$  と定数  $a$  の値を求めよ。

$$(1) \int_{\frac{\pi}{2}}^x (x-t)f(t)dt = \sin x - a \qquad (2) \int_a^x (x-t)f(t)dt = e^x - 1$$

**解答** (1)  $f(x) = -\sin x$ ,  $a = 1$     (2)  $f(x) = e^x$ ,  $a = 0$

$$(1) \int_{\frac{\pi}{2}}^x (x-t)f(t)dt = \sin x - a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } x \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^x tf(t)dt = \sin x - a$$

$$\text{両辺を } x \text{ について微分すると } 1 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \cos x$$

$$\text{よって } \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt = \cos x$$

$$\text{両辺を } x \text{ について微分すると } f(x) = -\sin x$$

$$\text{また, } \textcircled{1} \text{ で } x = \frac{\pi}{2} \text{ とおくと } 0 = 1 - a \qquad \text{ゆえに } a = 1$$

$$(2) \int_a^x (x-t)f(t)dt = e^x - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt = e^x - 1$$

$$\text{両辺を } x \text{ について微分すると } 1 \cdot \int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = e^x$$

$$\text{よって } \int_a^x f(t)dt = e^x$$

$$\text{両辺を } x \text{ について微分すると } f(x) = e^x$$

$$\text{また, } \textcircled{1} \text{ で } x = a \text{ とおくと } 0 = e^a - 1 \qquad \text{ゆえに } a = 0$$

**B 34 - 5**

次の等式を満たす関数  $f(x)$  と定数  $a$  の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{2x} f(t)dt = xe^{-x} + a$$

$$(2) \int_a^{3x+2} f(t)dt = x^2 + 3x$$

**解答** (1)  $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)e^{-\frac{x}{2}}$ ,  $a=0$     (2)  $f(x) = \frac{2}{9}x + \frac{5}{9}$ ;  $a=-7, 2$

(1) 等式の両辺を  $x$  で微分すると

$$(\text{左辺}) = f(2x) \cdot 2, (\text{右辺}) = e^{-x} - xe^{-x}$$

ゆえに,  $f(2x) = \frac{1}{2}(1-x)e^{-x}$  となり, この式において  $x$  を  $\frac{x}{2}$  におき換えて

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

よって  $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)e^{-\frac{x}{2}}$

また, 等式で  $x=0$  とすると  $0=0+a$  から  $a=0$

(2) 等式の両辺を  $x$  で微分すると

$$(\text{左辺}) = f(3x+2) \cdot 3, (\text{右辺}) = 2x+3$$

よって  $f(3x+2) = \frac{2}{3}x+1$

$3x+2=u$  とおくと  $f(u) = \frac{2}{3} \cdot \frac{u-2}{3} + 1$

すなわち  $f(u) = \frac{2}{9}u + \frac{5}{9}$

$u$  を  $x$  におき換えて  $f(x) = \frac{2}{9}x + \frac{5}{9}$

また, 等式で  $3x+2=a$  とすると  $0 = \left(\frac{a-2}{3}\right)^2 + a - 2$

整理すると  $(a+7)(a-2)=0$  したがって  $a=-7, 2$

### C 34 - 1

関数  $f(x) = \int_x^{2x+1} \frac{1}{t^2+1} dt$  について, 次の問いに答えよ。

(1)  $f(x)=0$  となる  $x$  を求めよ。

(2)  $f'(x)=0$  となる  $x$  を求めよ。

(3)  $f(x)$  の最大値を求めよ。

**解答** (1)  $x=-1$     (2)  $x=0, -2$     (3)  $x=0$  のとき最大値  $\frac{\pi}{4}$

(1) 常に  $\frac{1}{t^2+1} > 0$  であるから

$x < 2x+1$  のとき  $f(x) > 0$ ,  $x > 2x+1$  のとき  $f(x) < 0$   
 ゆえに  $f(x) = 0$  とすると  $x = 2x+1$  よって  $x = -1$  答

$$(2) f(x) = \int_0^{2x+1} \frac{1}{t^2+1} dt - \int_0^x \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } f'(x) &= \frac{2}{(2x+1)^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) - (2x^2+2x+1)}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{-x(x+2)}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

よって  $f'(x) = 0$  とすると  $x = 0, -2$  答

(3) (1) から  $x \leq -1$  では  $f(x) \leq 0$ ,  $-1 < x$  では  $f(x) > 0$  であるから,  $f(x)$  の最大値は  $x > -1$  の範囲にある. このとき, (2) から  $-1 < x < 0$  で  $f'(x) > 0$ ,  $0 < x$  で  $f'(x) < 0$

よって,  $f(x)$  は  $x = 0$  で極大かつ最大である. 最大値は  $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt$

$$t = \tan \theta \text{ とおくと } dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}, \frac{1}{t^2+1} = \cos^2 \theta, 0 \leq t \leq 1 \text{ から } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{よって } f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4} \text{ 答}$$

$$\text{参考) } \frac{d}{dx} \int_a^{h(x)} g(t) dt = g(h(x)) h'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{k(x)}^{h(x)} g(t) dt = g(h(x)) h'(x) - g(k(x)) k'(x)$$

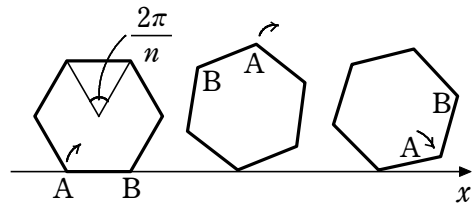
## C 34 - 2

半径 1 の円に内接する正  $n$  角形が  $xy$  平面上にある. 1 つの辺  $AB$  が  $x$  軸に含まれている状態から始めて, 正  $n$  角形を図のように  $x$  軸上をすべらないように転がし, 再び点  $A$  が  $x$  軸に含まれる状態まで続ける.

点  $A$  が描く軌跡の長さを  $L(n)$  とする.

(1)  $L(6)$  を求めよ.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n)$  を求めよ.



図は  $n=6$  の場合

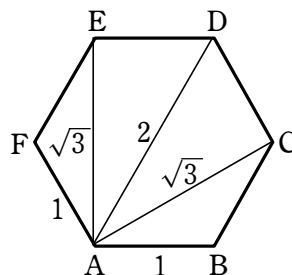
**解答** (1)  $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi$  (2) 8

(1) 右の図の正六角形について

$$AB=1, AC=\sqrt{3}, AD=2, AE=\sqrt{3}, AF=1$$

また、正六角形の 1 つの外角の大きさは  $\frac{\pi}{3}$  である。

$$\begin{aligned} \text{よって } L(6) &= \frac{\pi}{3}(1+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+1) \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$



(2) 右の図の正  $n$  角形  $A_1A_2\cdots A_n$  について

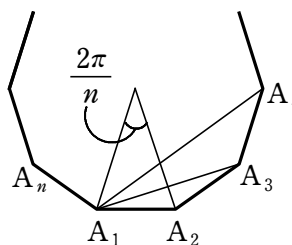
$$A_1A_k = 2\sin \frac{k-1}{n}\pi \quad (k=2, 3, \dots, n)$$

また、正  $n$  角形の 1 つの外角の大きさは  $\frac{2\pi}{n}$  である。

$\sin \pi = 0$  であるから

$$\begin{aligned} L(n) &= \frac{2\pi}{n} \sum_{k=2}^n 2\sin \frac{k-1}{n}\pi \\ &= \frac{4\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k}{n}\pi = \frac{4\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n}\pi \end{aligned}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n}\pi = 4\pi \int_0^1 \sin \pi x dx = 4 \left[ -\cos \pi x \right]_0^1 = 8$$



### C 34 - 3

極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$  を求めよ。

**解答**  $\frac{256}{27e}$

$$P = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cdots(3n+n)} \\ &= \sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(3+\frac{n}{n}\right)} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\log P &= \frac{1}{n} \left\{ \log \left( 3 + \frac{1}{n} \right) + \log \left( 3 + \frac{2}{n} \right) + \log \left( 3 + \frac{3}{n} \right) + \cdots + \log \left( 3 + \frac{n}{n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left( 3 + \frac{k}{n} \right)\end{aligned}$$

ゆえに  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log P = \int_0^1 \log(3+x) dx = \int_0^1 (3+x)' \log(3+x) dx$

$$\begin{aligned}&= \left[ (3+x) \log(3+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx \\ &= 4 \log 4 - 3 \log 3 - 1 = \log \frac{4^4}{3^3 e}\end{aligned}$$

したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} P = \frac{256}{27e}$



## 第 35 章 数学Ⅲの積分の応用 (3)

### B 35 - 1

$\tan \frac{x}{2} = t$  とするとき、次の問いに答えよ。

(1)  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\frac{dx}{dt}$  をそれぞれ  $t$  の式で表せ。

(2) 不定積分  $\int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x} dx$  を求めよ。

**解答** (1)  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

$$(2) \log \left| \frac{2\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 2} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(1) \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \tan x \cos x = \frac{2\tan \frac{x}{2}}{1-\tan^2 \frac{x}{2}} \cos x = \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dx}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = 2\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$(2) \int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x} dx = \int \frac{5}{3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{10}{6t + 4(1-t^2)} dt = \int \frac{-5}{2t^2 - 3t - 2} dt = \int \left( \frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t-2} \right) dt$$

$$= \log |2t+1| - \log |t-2| + C = \log \left| \frac{2t+1}{t-2} \right| + C = \log \left| \frac{2\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 2} \right| + C$$

( $C$  は積分定数)

**B 35 - 2**

$\sqrt{x^2+4}+x=t$  ( $A$  は定数) のおき換えを利用して, 次の不定積分を求めよ。

(1)  $\int \sqrt{x^2+4} dx$

(2)  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

**解答**  $C$  は積分定数を表す。

(1)  $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\log(\sqrt{x^2+4}+x) + C$

(2)  $\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}| + \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2-1})^2} + C$

$C$  は積分定数を表す。

(1)  $\sqrt{x^2+4}+x=t$  とおく。

$t > |x| + x \geq 0$  より  $t > 0$

$x^2+4=(t-x)^2=t^2-2tx+x^2$  であるから  $x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{4}{t}\right)$ ,  $dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{t^2}\right)dt$

また  $\sqrt{x^2+4}=t-\frac{1}{2}\left(t-\frac{4}{t}\right)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{4}{t}\right)$

よって  $\int \sqrt{x^2+4} dx = \int \frac{1}{2}\left(t+\frac{4}{t}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{t^2}\right) dt = \frac{1}{4} \int \left(t+\frac{8}{t}+\frac{16}{t^3}\right) dt$

$= \frac{t^2}{8} + 2\log t - \frac{2}{t^2} + C = \frac{1}{8}\left(t^2 - \frac{16}{t^2}\right) + 2\log t + C$

$= \frac{1}{8} \cdot 4x\sqrt{x^2+4} + 2\log(\sqrt{x^2+4}+x) + C$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\log(\sqrt{x^2+4}+x) + C$

(2)  $x+\sqrt{x^2-1}=t$  とおくと  $t \neq 0$

$x^2-1=(t-x)^2=t^2-2tx+x^2$  であるから  $x=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$ ,  $dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$

よって  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) dt$

$= \frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{4t^2} + C = \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}| + \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2-1})^2} + C$

**B 35 - 3**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx \text{ とおく。}$$

(1)  $x = \frac{\pi}{2} - t$  とおくことにより,  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$  を示せ。

(2)  $I$  の値を求めよ。

**解答** (1) 略 (2)  $I = \frac{\pi-1}{4}$

(1)  $x = \frac{\pi}{2} - t$  とおくと  $dx = -dt$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \cdot (-1) dt$$

|     |                 |     |                 |
|-----|-----------------|-----|-----------------|
| $x$ | 0               | ... | $\frac{\pi}{2}$ |
| $t$ | $\frac{\pi}{2}$ | ... | 0               |

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$$

(2)  $I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin 2x}{2}\right) dx = \left[x + \frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi-1}{2}$$

したがって  $I = \frac{\pi-1}{4}$

### B 35 - 4

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\} dx \text{ であることを示し, これを利用して, 定積分}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 + e^{-x}} dx \text{ を求めよ。}$$

**解答**  $\frac{2}{3}$ , 証明は略

$$(\text{前半}) \quad (\text{右辺}) = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(-x) dx$$

$$-x=t \text{ とおくと } \quad -dx=dt$$

$$\text{よって} \quad \int_0^a f(-x) dx = \int_0^{-a} f(t) \cdot (-1) dt$$

$$= \int_{-a}^0 f(t) dt = \int_{-a}^0 f(x) dx$$

$$\text{ゆえに} \quad (\text{右辺}) = \int_0^a f(x) dx + \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx = (\text{左辺})$$

$$(\text{後半}) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}} + \frac{\cos^3(-x)}{1+e^x} \right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{e^x \cos^3 x}{e^x + 1} + \frac{\cos^3 x}{1+e^x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^x + 1) \cos^3 x}{e^x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{\sin 3x}{3} + 3 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

**注意** 3 倍角の公式  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$  から

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \quad \text{が得られる。}$$

## B 35 - 5

定積分  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) について、次の問いに答えよ。

- (1)  $I_1, I_2$  を求めよ。
- (2)  $I_{n+2}$  を  $I_n$  で表せ。
- (3)  $I_6$  を求めよ。

**解答** (1)  $I_1 = \frac{1}{2} \log 2, I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$  (2)  $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$  (3)  $I_6 = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$

$$(1) \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[ -\log(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left[ \tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left[ \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n \\
 &= \frac{1}{n+1} - I_n
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad (1), (2) \text{ から } I_6 = \frac{1}{5} - I_4 = \frac{1}{5} - \left( \frac{1}{3} - I_2 \right) = -\frac{2}{15} + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$$

**B 35 - 6**

$I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$  ( $n$  は自然数) とする。  $n \geq 2$  のとき  $I_n$  を  $I_{n-1}$  を用いて表せ。更に、 $I_4$  の値を求めよ。

**解答**  $I_n = e - n I_{n-1}$ ,  $I_4 = 9e - 24$

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_1^e (\log x)^n dx = \left[ x (\log x)^n \right]_1^e - \int_1^e x \cdot n (\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= e - n \int_1^e (\log x)^{n-1} dx \\
 &= e - n I_{n-1} \quad (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } I_1 = \int_1^e \log x dx = \left[ x \log x - x \right]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

$$I_2 = e - 2I_1 = e - 2$$

$$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 2) = -2e + 6$$

$$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(-2e + 6) = 9e - 24$$

**B 35 - 7**

$n$  を 0 以上の整数とし、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  とおく。すると、 $I_2 = \text{ア}$   である。また、 $I_{n+2} = \text{イ}$    $I_n$  だから、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx = \text{ウ}$   となる。ただし、 $\text{イ}$   は  $n$  を用いた式でうめよ。

**解答** (ア)  $\frac{\pi}{4}$  (イ)  $\frac{n+1}{n+2}$  (ウ)  $\frac{35}{256}\pi$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \text{ア} \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n+1} x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n+1} x dx = \left[ -\cos x \sin^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x dx \\
&= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^n x dx \\
&= (n+1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx \right) = (n+1)(I_n - I_{n+2})
\end{aligned}$$

すなわち  $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$

よって  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$

$n+2 \neq 0$  であるから  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

$$\begin{aligned}
\text{したがって} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx &= I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} I_4 = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} I_2 \\
&= \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{35}{256} \pi
\end{aligned}$$

### B 35 - 8

$m, n$  を正の整数とする。定積分  $I(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$  に関して

- (1)  $I(m, 1)$  を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  のとき,  $I(m, n)$  を  $I(m+1, n-1)$  を用いて表せ。
- (3)  $I(m, n)$  を  $m$  と  $n$  を用いて表せ。

**解答** (1)  $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$  (2)  $I(m, n) = \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$

(3)  $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

$$\begin{aligned}
(1) \quad I(m, 1) &= \int_0^1 x^m (1-x) dx = \int_0^1 (x^m - x^{m+1}) dx \\
&= \left[ \frac{1}{m+1} x^{m+1} - \frac{1}{m+2} x^{m+2} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} = \frac{1}{(m+1)(m+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad I(m, n) &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \\
 &= \left[ \frac{1}{m+1} x^{m+1} (1-x)^n \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot n(1-x)^{n-1} dx \\
 &= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)
 \end{aligned}$$

(3) (2) から,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned}
 I(m, n) &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{m+n-1} I(m+n-1, 1) \\
 &= \frac{m!n!}{(m+n-1)!} \cdot \frac{1}{\{(m+n-1)+1\}\{(m+n-1)+2\}} \\
 &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}
 \end{aligned}$$

これは  $n=1$  のときも成り立つ。

### C 35 - 1

(1)  $f(x)$  を連続関数とすると,  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$  が成り立つことを示せ。

(2) 定積分  $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$  の値を求めよ。

**解答** (1) 略 (2)  $\pi \left( 1 - \frac{4}{3} \log 2 \right)$

(1)  $I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx$  とおく。

$f(\sin x) = f(\sin(\pi - x))$  であることに着目して,  $t = \pi - x$  とおく。

このとき  $dx = -dt$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad I &= \int_0^\pi x f(\sin x) dx \\
 &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) \cdot (-dt) \\
 &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt \\
 &= \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - I
 \end{aligned}$$

ゆえに 
$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

|     |                     |
|-----|---------------------|
| $x$ | $0 \rightarrow \pi$ |
| $t$ | $\pi \rightarrow 0$ |

(2)  $J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$  とおく。

関数  $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 8}$  は連続関数であるから, (1) より

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x (\sin^2 x + 8) - 8 \sin x}{\sin^2 x + 8} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \left( \sin x - \frac{8 \sin x}{\sin^2 x + 8} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_0^{\pi} \frac{8 \sin x}{9 - \cos^2 x} dx \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

$\int_0^{\pi} \frac{8 \sin x}{9 - \cos^2 x} dx$  について,  $u = \cos x$  とおく。

$du = -\sin x dx$  であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{8 \sin x}{9 - \cos^2 x} dx &= 8 \int_1^{-1} \frac{1}{9 - u^2} \cdot (-du) \\ &= 8 \int_{-1}^1 \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3+u} + \frac{1}{3-u} \right) du \\ &= \frac{4}{3} \left[ \log |3+u| - \log |3-u| \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{4}{3} (\log 4 - \log 2 - \log 2 + \log 4) = \frac{8}{3} \log 2 \end{aligned}$$

よって  $J = \frac{\pi}{2} \left( 2 - \frac{8}{3} \log 2 \right) = \pi \left( 1 - \frac{4}{3} \log 2 \right)$

|     |                     |
|-----|---------------------|
| $x$ | $0 \rightarrow \pi$ |
| $u$ | $1 \rightarrow -1$  |

## C 35 - 2

$m, n, N$  は正の整数である。

(1)  $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$  を証明せよ。

(2)  $\int_0^{\pi} x \sin mx dx = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{m}$  を証明せよ。

(3) 区間  $0 \leq x \leq \pi$  において, 曲線  $y = |x - a_1 \sin x - a_2 \sin 2x - \cdots - a_N \sin Nx|$  と  $x$  軸で囲まれた領域を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を最小にする係数

$a_1, a_2, \dots, a_N$  を求めよ。

**解答** (1) 略 (2) 略 (3)  $a_m = (-1)^{m+1} \frac{2}{m} \quad (m=1, 2, \dots, N)$

$$(1) \quad I = \int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\} dx$$

$$m=n \text{ のとき} \quad I = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos 2mx - 1) dx = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 2mx}{2m} - x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$m \neq n \text{ のとき} \quad I = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_0^\pi = 0$$

$$(2) \quad \int_0^\pi x \sin mx dx = \left[ x \left( -\frac{1}{m} \cos mx \right) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{m} \cos mx dx$$

$$= (-1)^{m+1} \frac{\pi}{m} + \frac{1}{m^2} \left[ \sin mx \right]_0^\pi = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{m}$$

$$(3) \quad V = \pi \int_0^\pi (x - a_1 \sin x - a_2 \sin 2x - \dots - a_N \sin Nx)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^\pi (x^2 + a_1^2 \sin^2 x + a_2^2 \sin^2 2x + \dots + a_N^2 \sin^2 Nx) dx$$

$$- 2\pi \int_0^\pi x(a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_N \sin Nx) dx$$

$$+ 2\pi \int_0^\pi \{a_1 a_2 \sin x \sin 2x + \dots + a_{N-1} a_N \sin(N-1)x \sin Nx\} dx$$

(1), (2) より

$$V = \pi \cdot \frac{\pi^3}{3} + \pi \cdot \frac{\pi}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2) - 2\pi \sum_{m=1}^N a_m (-1)^{m+1} \frac{\pi}{m} + 2\pi \cdot 0$$

$$= \frac{\pi^4}{3} + \frac{\pi^2}{2} \sum_{m=1}^N \left\{ a_m^2 - (-1)^{m+1} \frac{4}{m} a_m \right\}$$

よって、 $V$  を最小にする係数は  $a_m = (-1)^{m+1} \frac{2}{m} \quad (m=1, 2, \dots, N)$

### C 35 - 3

自然数  $n$  に対して、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  とおく。次の問いに答えよ。

(1) 定積分  $I_1, I_2, I_3$  を求めよ。

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$I_n \geq I_{n+1}$$

(3) 次の漸化式が成り立つことを証明せよ。

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

(4) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

**解答** (1)  $I_1 = 1$ ,  $I_2 = \frac{\pi}{4}$ ,  $I_3 = \frac{2}{3}$  (2) 略 (3) 略 (4) 1

$$(1) \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4},$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos^2 x \sin x) \, dx$$

$$= \left[ -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(2)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき,  $0 \leq \sin x \leq 1$  であるから  $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$

$$\text{よって} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx \quad \text{すなわち} \quad I_n \geq I_{n+1}$$

$$(3) \quad I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n+1} x \, dx$$

$$= \left[ -\cos x \sin^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cos^2 x \sin^n x \, dx$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^n x \, dx$$

$$= (n+1) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx \right)$$

$$= (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

ゆえに,  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$  から  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$

(4) (2) から  $I_{2n-1} \geq I_{2n} \geq I_{2n+1}$

すべての自然数  $k$  に対して,  $I_k > 0$  であるから

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \geq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

(3) から  $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \cdot \frac{1}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1}$

よって  $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{n}} = 1$  であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$$

### C 35 - 4

$I(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$  であることを用いて,

$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (\beta-x)^m dx$  を計算せよ。ただし,  $n, m$  は自然数,  $\alpha, \beta$  は実数とする。

**解答** (1) 略 (2) 略 (3) 略

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx &= \left[ \frac{1}{2} (x-\alpha)^2 (x-\beta) \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} (x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} = -\frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta) dx &= \left[ \frac{1}{n+1} (x-\alpha)^{n+1} (x-\beta) \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n+1} dx \\ &= -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \left[ (x-\alpha)^{n+2} \right]_{\alpha}^{\beta} = -\frac{n!}{(n+2)!} (\beta-\alpha)^{n+2} \end{aligned}$$

(3)  $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^n (x-\beta)^m dx = I(n, m)$  とおくと

$$\begin{aligned}
 I(n, m) &= \left[ \frac{1}{n+1} (x-\alpha)^{n+1} (x-\beta)^m \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{n+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n+1} \cdot m(x-\beta)^{m-1} dx \\
 &= -\frac{m}{n+1} I(n+1, m-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ゆえに } I(n, m) &= -\frac{m}{n+1} I(n+1, m-1) \\
 &= (-1)^2 \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} I(n+2, m-2) \\
 &= \dots\dots \\
 &= (-1)^m \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} \cdot \dots\dots \cdot \frac{1}{n+m} I(n+m, 0) \\
 &= (-1)^m \frac{n!m!}{(n+m)!} I(n+m, 0) \\
 &= (-1)^m \frac{n!m!}{(n+m)!} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{n+m} dx \\
 &= (-1)^m \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \left[ (x-\alpha)^{n+m+1} \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= (-1)^m \frac{n!m!}{(n+m+1)!} (\beta-\alpha)^{n+m+1}
 \end{aligned}$$

**参考** まず初めに (3) を証明し、その結果において

- (1)  $n=m=1$       (2)  $m=1$  を代入してもよい。

## 第 36 章 有名曲線

### B 36 - 1

曲線  $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) と  $x$  軸および直線  $x=\pi$  とで囲まれる部分の面積  $S$  を求めよ。

**解答**  $S = \frac{3}{2}\pi$

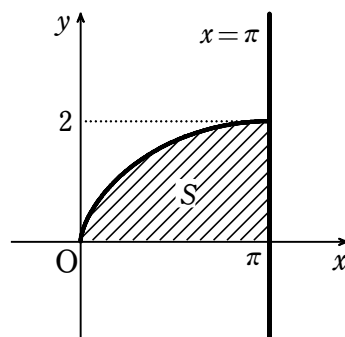
$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases} \text{ から } \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

よって、 $t \neq 0$  のとき  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

$$0 < t < \pi \text{ で } \frac{dx}{dt} > 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0, \quad \frac{dy}{dx} > 0$$

したがって、曲線は右の図のようになる。

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= \int_0^\pi y \, dx = \int_0^\pi y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^\pi (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^\pi (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^\pi \left( 1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \left[ \frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$



### B 36 - 2

次の曲線の長さを求めよ。(1) では  $a > 0$  とする。

(1)  $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

(2)  $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (\sqrt{2} \leq x \leq 4)$

**解答** (1)  $6a$  (2)  $\sqrt{15} - 1$

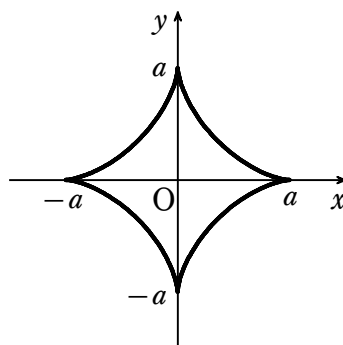
$$(1) \frac{dx}{dt} = 3a \cos^2 t (-\sin t), \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$$

ゆえに

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$$

よって、曲線の長さは

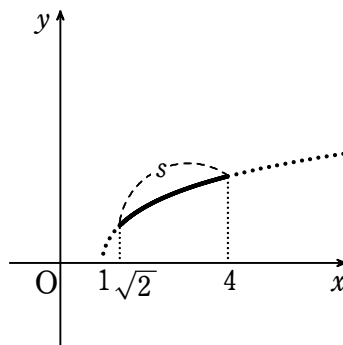
$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t} dt \\ &= \frac{3}{2}a \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 4 \cdot \frac{3}{2}a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= 3a \left[ -\cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \end{aligned}$$



$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

よって、曲線の長さは

$$\begin{aligned} s &= \int_{\sqrt{2}}^4 \sqrt{1 + \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)^2} dx \\ &= \int_{\sqrt{2}}^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \left[ \sqrt{x^2 - 1} \right]_{\sqrt{2}}^4 \\ &= \sqrt{15} - 1 \end{aligned}$$



### B 36 - 3

$a > 0$  とする。 $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) について、次の問いに答えよ。

(1) 曲線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(2) 曲線で囲まれる部分を  $x$  軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

解答  $\frac{32}{105} \pi a^3$

曲線  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  は  $x$  軸,  $y$  軸に関して対称であり, 曲線の概形は右の図のようになる。

$$x = a \cos^3 t \text{ から } dx = -3a \cos^2 t \sin t dt$$

よって, 求める体積  $V$  は

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a \sin^3 t)^2 (-3a \cos^2 t \sin t) dt$$

$$= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt$$

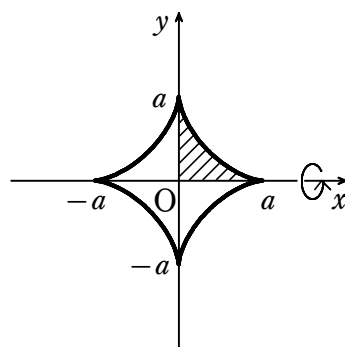
$$= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt$$

ここで,  $\cos t = u$  とおくと  $-\sin t dt = du$

$t$  と  $u$  の対応は右のようになる。したがって

$$V = 6\pi a^3 \int_0^1 (1 - u^2)^3 u^2 du = 6\pi a^3 \int_0^1 (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8) du$$

$$= 6\pi a^3 \left[ \frac{u^3}{3} - \frac{3}{5} u^5 + \frac{3}{7} u^7 - \frac{u^9}{9} \right]_0^1 = 6\pi a^3 \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{32}{105} \pi a^3$$



|     |                               |
|-----|-------------------------------|
| $t$ | $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ |
| $u$ | $1 \rightarrow 0$             |

### B 36 - 4

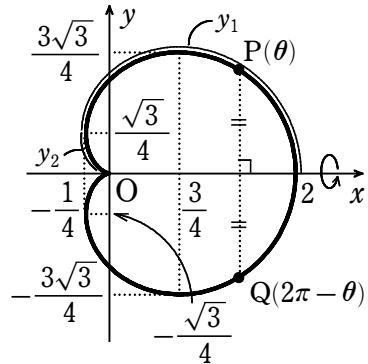
曲線  $\begin{cases} x = (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = (1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$  で囲まれる図形で囲まれる部分の面積  $S$  を求めよ。

**解答**  $\frac{8}{3}\pi$

$\theta$  と  $2\pi - \theta$  に対応する点が  $x$  軸に関して対称であるから, 曲線は  $x$  軸に関して対称である。よって,  $0 \leq \theta \leq \pi$  ( $y \geq 0$ ) で考える。

$\begin{cases} x' = -\sin \theta (2 \cos \theta + 1) \\ y' = (\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) \end{cases}$  であるから,  $x$  と  $y$  の値の変化は次のようになる。

|          |   |            |                       |            |                      |            |       |
|----------|---|------------|-----------------------|------------|----------------------|------------|-------|
| $\theta$ | 0 | ...        | $\frac{\pi}{3}$       | ...        | $\frac{2}{3}\pi$     | ...        | $\pi$ |
| $x$      | 2 | $\searrow$ | $\frac{3}{4}$         | $\searrow$ | $-\frac{1}{4}$       | $\nearrow$ | 0     |
| $y$      | 0 | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | 0     |



曲線は右の図のようになる。体積  $V$  は

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{4}}^2 y_1^2 dx - \pi \int_{-\frac{1}{4}}^0 y_2^2 dx$$

ここで,  $x, y$  を  $\theta$  で表すと,  $y_1, y_2$  を区別することなく

$$V = \pi \int_{\pi}^0 \{y(\theta)\}^2 x'(\theta) d\theta \text{ となる.}$$

$$y^2 dx = (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \cdot \{-\sin \theta (2 \cos \theta + 1)\} d\theta$$

$$\cos \theta = t \text{ とおくと } -\sin \theta d\theta = dt$$

$x, \theta, t$  の対応は右の表のようになる。

$$\text{よって } V = \pi \int_{-1}^1 (1+t)^2 (1-t^2) (2t+1) dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 (-5t^4 + 4t^2 + 1) dt = 2\pi \left[ -t^5 + \frac{4}{3}t^3 + t \right]_0^1 = \frac{8}{3}\pi$$

|          |   |     |       |
|----------|---|-----|-------|
| $x$      | 2 | ... | 0     |
| $\theta$ | 0 | ... | $\pi$ |
| $t$      | 1 | ... | -1    |

### B 36 - 5

座標平面上を運動する点  $P$  がある。点  $P$  は点  $(0, 1)$  を出発して, 曲線  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  ( $x \geq 0$ ) 上を毎秒 1 の速さで動いている。点  $P$  の  $t$  秒後の座標を  $(f(t), g(t))$  で表すとき,  $f(t), g(t)$  を求めよ。

**解答**  $f(t) = \log(t + \sqrt{t^2 + 1}), g(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

$(x, y) = (f(t), g(t))$  とする。条件から

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \geq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① の両辺を  $t$  について微分すると  $\frac{dy}{dt} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{dx}{dt}$

これを ② に代入して  $\left\{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2\right\} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1$  から  $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1$

$$\frac{dx}{dt} > 0, \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \text{ であるから } \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\text{両辺を } t \text{ について積分すると } \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \int dt$$

$$\text{ゆえに } \frac{e^x - e^{-x}}{2} = t + C \text{ (} C \text{ は積分定数)}$$

$$t=0 \text{ のとき } x=0 \text{ であるから } C=0 \quad \text{よって } \frac{e^x - e^{-x}}{2} = t$$

$$e^x \text{ について整理すると } (e^x)^2 - 2te^x - 1 = 0$$

$$e^x > 0 \text{ であるから } e^x = t + \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\text{ゆえに } x = \log(t + \sqrt{t^2 + 1}) \quad \text{また} \quad e^{-x} = e^x - 2t = \sqrt{t^2 + 1} - t$$

$$\text{よって } y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\text{したがって } f(t) = \log(t + \sqrt{t^2 + 1}), \quad g(t) = \sqrt{t^2 + 1}$$

### B 36 - 6

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ とする。媒介変数 } t \text{ で表された曲線 } \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 3t \end{cases} \text{ を } C \text{ とする。}$$

曲線  $C$  で囲まれた部分を  $x$  軸の周りに 1 回転して得られる図形の体積を求めよ。

$$\text{【解答】 (1) } y = \pm \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} \quad (2) \frac{27}{32}\pi$$

$$(1) \quad x = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad y = \sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } \sin^2 t = \frac{1-x}{2} \quad \text{ゆえに } \sin t = \pm \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

これを  $\textcircled{2}$  に代入すると (以下、複号同順)

$$y = \pm \left\{ 3\sqrt{\frac{1-x}{2}} - 4\sqrt{\left(\frac{1-x}{2}\right)^3} \right\} = \pm \sqrt{\frac{1-x}{2}} \left( 3 - 4 \cdot \frac{1-x}{2} \right) = \pm \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } -\pi \leq 2t \leq \pi \text{ であるから}$$

$$-1 \leq \cos 2t \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$(1) \text{ の式で } y=0 \text{ とすると } x = -\frac{1}{2}, 1$$

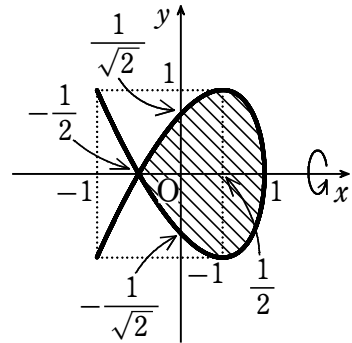
$$y = \frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}} \text{ から } y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3(1-2x)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$y'=0 \text{ とすると } x=\frac{1}{2}$$

$-1 \leq x \leq 1$  の範囲における増減表は左下のようになり、 $y=\frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}$  のグラフ

と  $y=-\frac{(2x+1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}$  のグラフは  $x$  軸に関して対称であるから、曲線  $C$  の概形は右下の図のようになる。

|      |    |     |               |     |   |
|------|----|-----|---------------|-----|---|
| $x$  | -1 | ... | $\frac{1}{2}$ | ... | 1 |
| $y'$ |    | +   | 0             | -   |   |
| $y$  | -1 | ↗   | 1             | ↘   | 0 |



したがって、求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 y^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x+1)^2 (1-x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^1 (-4x^3 + 3x + 1) dx = \frac{\pi}{2} \left[ -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \left( -1 + \frac{3}{2} + 1 \right) - \left( -\frac{1}{16} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{27}{32} \pi \end{aligned}$$

**別解** [媒介変数のまま体積を求める]

$$x = \cos 2t \text{ から } dx = -2 \sin 2t dt$$

$x$  と  $t$  の対応は右のようになる。

|     |                               |
|-----|-------------------------------|
| $x$ | $-\frac{1}{2} \rightarrow 1$  |
| $t$ | $\frac{\pi}{3} \rightarrow 0$ |

$$\text{よって } V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 y^2 dx = \pi \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \sin^2 3t (-2 \sin 2t) dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 \sin t - 4 \sin^3 t)^2 \cdot 2 \sin t \cos t dt$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (9 \sin^3 t - 24 \sin^5 t + 16 \sin^7 t) (\sin t)' dt$$

$$= 4\pi \left[ \frac{9}{4} \sin^4 t - 4 \sin^6 t + 2 \sin^8 t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{27}{32} \pi$$

## B 36 - 7

$a > 0$  とする。長さ  $2\pi a$  のひもの一方の端が半径  $a$  の円  $x^2 + y^2 = a^2$  上の点  $A(a, 0)$  に固定してあり、その円に時計回りに巻きつけてある。このひものをピンと伸ばしながら円

からはずしていくとき、ひもの他方の端  $P$  が描く曲線の長さを求めよ。

**解答**  $2\pi^2 a$

点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とし、右の図のように点  $Q$  をとる。

$\angle QOA = \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) とすると

$$Q(a\cos\theta, a\sin\theta), \quad PQ = \widehat{AQ} = a\theta,$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} &= \left( a\theta \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), a\theta \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= (a\theta \sin\theta, -a\theta \cos\theta) \end{aligned}$$

よって、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$  から

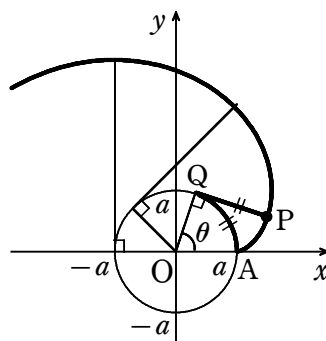
$$x = a\cos\theta + a\theta \sin\theta, \quad y = a\sin\theta - a\theta \cos\theta$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta) + a\sin\theta + a\theta \cos\theta = a\theta \cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta \sin\theta = a\theta \sin\theta$$

したがって、曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(a\theta \cos\theta)^2 + (a\theta \sin\theta)^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \theta d\theta = a \left[ \frac{\theta^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 a$$



### B 36 - 8

円  $C: x^2 + y^2 = 9$  の内側を半径 1 の円  $D$  が滑らずに転がる。時刻  $t$  において  $D$  は点  $(3\cos t, 3\sin t)$  で  $C$  に接している。

(1) 時刻  $t=0$  において点  $(3, 0)$  にあった  $D$  上の点  $P$  の時刻  $t$  における座標  $(x(t), y(t))$  を求めよ。 $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$  とする。

(2) (1) の範囲で点  $P$  の描く曲線の長さを求めよ。

**解答** (1)  $(2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$  (2)  $\frac{16}{3}$

- (1)  $A(3, 0)$ ,  $T(3\cos t, 3\sin t)$  とする。

$D$  と  $C$  が  $T$  で接しているとき、 $D$  の中心  $Q$  の座標は  $(2\cos t, 2\sin t)$  である。また、

$\widehat{TP} = \widehat{TA} = 3t$  であるから、半直線  $QP$  が  $x$  軸の正の向きとなす角は  $t - 3t = -2t$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= (2\cos t, 2\sin t) + (\cos(-2t), \sin(-2t))$$

$$= (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$$

- (2)  $x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = -2\sin t(1 + 2\cos t)$

$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$$

よって  $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2$

$$= 4(\sin^2 t + 2\sin t \sin 2t + \sin^2 2t)$$

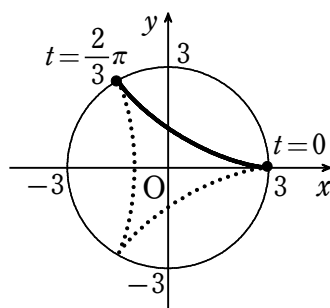
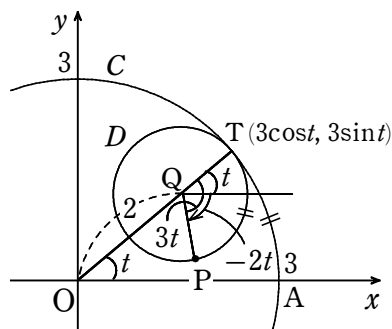
$$+ 4(\cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos^2 2t)$$

$$= 4(2 - 2\cos 3t) = 16\sin^2 \frac{3}{2}t$$

$0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$  であるから  $\sin \frac{3}{2}t \geq 0$  であり、また  $x'(t) \leq 0$

よって、 $x$  座標が単調に減少するから、 $P$  が曲線上の同じ部分を 2 度通ることはない。したがって、求める曲線の長さは

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} 4\sin \frac{3}{2}t dt = 4 \cdot \frac{2}{3} \left[ -\cos \frac{3}{2}t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{16}{3}$$



## B 36 - 9

$xy$  平面上に原点  $O$  を中心とする半径 1 の円  $C$  がある。半径  $\frac{1}{n}$  ( $n$  は自然数) の円  $C_n$  が  $C$  に外接しながらすべることなく反時計回りに転がるとき、 $C_n$  上の点  $P$  の軌跡を考える。ただし、最初  $P$  は点  $A(1, 0)$  に一致していたとする。

- (1)  $O$  を端点とし  $C_n$  の中心を通る半直線が  $x$  軸の正の向きとなす角が  $\theta$  となるときの  $P$  の座標を  $n$  と  $\theta$  で表せ。

- (2)  $P$  が初めて  $A$  に戻るまでの  $P$  の軌跡の長さ  $l_n$  を求めよ。

- (3) (2) で求めた  $l_n$  に対し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$  を求めよ。

【解答】 (1)  $\left(\frac{n+1}{n}\cos\theta - \frac{1}{n}\cos(n+1)\theta, \frac{n+1}{n}\sin\theta - \frac{1}{n}\sin(n+1)\theta\right)$

(2)  $l_n = \frac{8(n+1)}{n}$  (3) 8

(1) 半径  $\frac{1}{n}$  の円の中心を  $B$  とする。

$\angle AOB = \theta$  のとき

$$\overrightarrow{OB} = \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos\theta, \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin\theta \right)$$

このときの 2 円の接点を  $Q$  とすると,  $\widehat{PQ} = \widehat{AQ}$  で

あるから  $\frac{1}{n}\angle QBP = \theta$

よって  $\angle QBP = n\theta$

したがって,  $\overrightarrow{BP}$  が  $x$  軸の正の向きとなす角は  $-\pi + \theta + n\theta = (n+1)\theta - \pi$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \left( \frac{1}{n}\cos((n+1)\theta - \pi), \frac{1}{n}\sin((n+1)\theta - \pi) \right) \\ &= \left( -\frac{1}{n}\cos(n+1)\theta, -\frac{1}{n}\sin(n+1)\theta \right) \end{aligned}$$

ゆえに  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$

$$= \left( \frac{n+1}{n}\cos\theta - \frac{1}{n}\cos(n+1)\theta, \frac{n+1}{n}\sin\theta - \frac{1}{n}\sin(n+1)\theta \right)$$

よって,  $P$  の座標は

$$\left( \frac{n+1}{n}\cos\theta - \frac{1}{n}\cos(n+1)\theta, \frac{n+1}{n}\sin\theta - \frac{1}{n}\sin(n+1)\theta \right)$$

(2)  $P(x, y)$  とすると

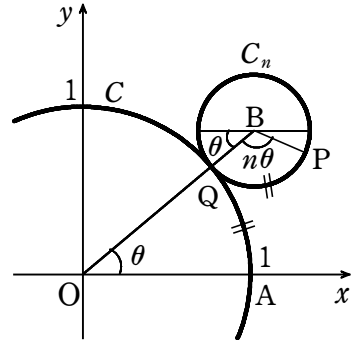
$$x = \frac{n+1}{n}\cos\theta - \frac{1}{n}\cos(n+1)\theta, \quad y = \frac{n+1}{n}\sin\theta - \frac{1}{n}\sin(n+1)\theta$$

$$\text{よって} \quad \frac{dx}{d\theta} = -\frac{n+1}{n}\sin\theta + \frac{n+1}{n}\sin(n+1)\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{n+1}{n}\cos\theta - \frac{n+1}{n}\cos(n+1)\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2} \{2 - 2\sin(n+1)\theta \sin\theta - 2\cos(n+1)\theta \cos\theta\}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2} (2 - 2\cos n\theta) = \frac{4(n+1)^2}{n^2} \sin^2 \frac{n\theta}{2}$$



$$\text{ゆえに} \quad l_n = \frac{2(n+1)}{n} \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{n\theta}{2} \right| d\theta$$

$$\frac{n\theta}{2} = t \text{ とおくと}$$

|          |                      |
|----------|----------------------|
| $\theta$ | $0 \rightarrow 2\pi$ |
| $t$      | $0 \rightarrow n\pi$ |

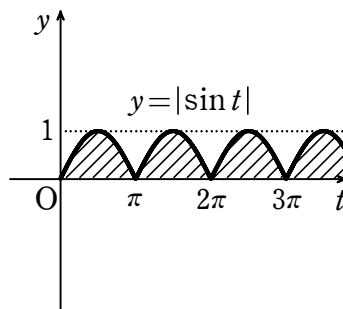
$$n d\theta = 2 dt$$

$$\text{よって} \quad l_n = \frac{2(n+1)}{n} \int_0^{n\pi} |\sin t| \frac{2}{n} dt$$

$$= \frac{4(n+1)}{n^2} \int_0^{n\pi} |\sin t| dt$$

$$= \frac{4(n+1)}{n^2} \cdot n \int_0^{\pi} \sin t dt$$

$$= \frac{4(n+1)}{n} \left[ -\cos t \right]_0^{\pi} = \frac{8(n+1)}{n}$$



$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 8$$

### B 36 - 10

曲線  $y = e^{-x} \sin x$  ( $x \geq 0$ ) と  $x$  軸で囲まれた図形で、 $x$  軸の上側にある部分の面積を  $y$  軸に近い方から順に  $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k$  を求めよ。

**解答**  $\frac{e^\pi}{2(e^\pi - 1)}$

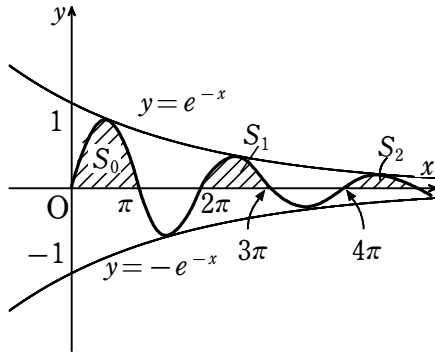
$n = 0, 1, 2, \dots$  とする。

曲線  $y = e^{-x} \sin x$  ( $x \geq 0$ ) と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は、 $e^{-x} \sin x = 0$  から  $\sin x = 0$

ゆえに  $x = n\pi$

また、 $y \geq 0$  となるのは、 $e^{-x} > 0$  であるから、 $\sin x \geq 0$  のときである。

よって  $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$



$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad S_k &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx = \left[ -e^{-x} \cos x \right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \cos x \, dx \\ &= \left[ -e^{-x} \cos x \right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} - \left\{ \left[ e^{-x} \sin x \right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} + \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx \right\} \end{aligned}$$

$$\text{すなわち} \quad S_k = e^{-(2k+1)\pi} + e^{-2k\pi} - S_k$$

$$\text{したがって} \quad S_k = \frac{1}{2} \{ e^{-(2k+1)\pi} + e^{-2k\pi} \}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sum_{k=0}^n S_k &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^n e^{-(2k+1)\pi} + \sum_{k=0}^n e^{-2k\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-\pi} \{ 1 - e^{-2(n+1)\pi} \}}{1 - e^{-2\pi}} + \frac{1 - e^{-2(n+1)\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-\pi} + 1}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{e^{\pi}}{2(e^{\pi} - 1)}$$

### C 36 - 1

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| \, dx$$

**解答**  $\frac{2}{\pi}$

$$\int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| \, dx = I_n \text{ とすると}$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n^2} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} e^{-x} |\sin nx| \, dx = \sum_{k=1}^{n^2} \left| \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} e^{-x} \sin nx \, dx \right|$$

$$\text{ここで} \quad (e^{-x} \sin nx)' = -e^{-x} \sin nx + ne^{-x} \cos nx \quad \dots\dots ①$$

$$(e^{-x}\cos nx)' = -e^{-x}\cos nx - ne^{-x}\sin nx \quad \dots\dots ②$$

①+②× $n$  から

$$(e^{-x}\sin nx + ne^{-x}\cos nx)' = -(n^2+1)e^{-x}\sin nx$$

$$\text{よって} \quad \int e^{-x}\sin nx dx = -\frac{1}{n^2+1}e^{-x}(\sin nx + n\cos nx) + C$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} e^{-x}\sin nx dx &= \left[ -\frac{1}{n^2+1}e^{-x}(\sin nx + n\cos nx) \right]_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} \\ &= -\frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{k}{n}\pi}(-1)^k + \frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}(-1)^{k-1} \\ &= -\frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{k}{n}\pi}(-1)^k(1+e^{\frac{\pi}{n}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad I_n &= \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+1}e^{-\frac{k}{n}\pi}(1+e^{\frac{\pi}{n}}) = \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k}{n}\pi} \\ &= \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}}) \times \frac{e^{-\frac{\pi}{n}}\{1-(e^{-\frac{\pi}{n}})^{n^2}\}}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}(1+e^{\frac{\pi}{n}})e^{-\frac{\pi}{n}}(1-e^{-n\pi}) \cdot \frac{1}{n(1-e^{-\frac{\pi}{n}})} \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{n} = t$  とおくと,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $t \rightarrow 0$  であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1-e^{-\frac{\pi}{n}}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi(e^t-1)}{t} = \pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-e^0}{t-0} = \pi$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{1+0} \times (1+1)(1-0) \times \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

**別解**  $\frac{k-1}{n}\pi \leq x \leq \frac{k}{n}\pi$  において  $e^{-\frac{k}{n}\pi} \leq e^{-x} \leq e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$  であるから

$$e^{-\frac{k}{n}\pi} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| dx \leq \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} e^{-x} |\sin nx| dx \leq e^{-\frac{k-1}{n}\pi} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| dx \quad \dots\dots ①$$

区間  $\frac{k-1}{n}\pi \leq x \leq \frac{k}{n}\pi$  において  $\sin nx$  は符号が変わらないから

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx| dx = \left| \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} \sin nx dx \right| = \left| \left[ -\frac{1}{n} \cos nx \right]_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} \right| = \frac{2}{n}$$

よって, ①は 
$$\frac{2}{n}e^{-\frac{k}{n}\pi} \leq \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} e^{-x} |\sin nx| dx \leq \frac{2}{n}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$$

ゆえに 
$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{2}{n}e^{-\frac{k}{n}\pi} \leq \sum_{k=1}^{n^2} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} e^{-x} |\sin nx| dx \leq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{2}{n}e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$$

すなわち 
$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k}{n}\pi} \leq I_n \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k-1}{n}\pi}$$

ここで 
$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k}{n}\pi} = \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{n}} \{1 - (e^{-\frac{\pi}{n}})^{n^2}\}}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\frac{\pi}{n}}{e^{-\frac{\pi}{n}} - 1} \cdot e^{-\frac{\pi}{n}} (1 - e^{-n\pi})$$

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k-1}{n}\pi} = \frac{2}{n} \cdot \frac{1 \{1 - (e^{-\frac{\pi}{n}})^{n^2}\}}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\frac{\pi}{n}}{e^{-\frac{\pi}{n}} - 1} \cdot (1 - e^{-n\pi})$$

$n \longrightarrow \infty$  のとき, どちらも  $\frac{2}{\pi}$  に収束するから 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{2}{\pi}$$



## 第 37 章 物理的問題

### B 37 - 1

数直線上を運動する点 P の座標  $x$  が、時刻  $t$  の関数として  $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 1$  で表される。次のものを求めよ。

- (1)  $t = 2$  における速度，加速度
- (2) 運動の向きが変わる時刻

**解答** (1) 速度  $-9$ ，加速度  $6$     (2)  $-1, 3$

(1) 時刻  $t$  における速度を  $v$ ，加速度を  $\alpha$  とすると

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9, \quad \alpha = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

$$t = 2 \text{ のとき } \quad v = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 9 = -9, \quad \alpha = 6 \cdot 2 - 6 = 6$$

(2)  $v = 0$  とすると  $3t^2 - 6t - 9 = 0$

$$\text{すなわち } (t+1)(t-3) = 0 \quad \text{よって } t = -1, 3$$

この値の前後で  $v$  の符号が変わる。

ゆえに，運動の向きが変わる時刻は  $-1, 3$

### B 37 - 2

上面の半径が  $5 \text{ cm}$ ，深さが  $15 \text{ cm}$  の直円錐形の容器に水が満ちてある。この下端の口から毎秒  $8 \text{ cm}^3$  の割合で水を排出するとき，水の深さが  $10 \text{ cm}$  になった瞬間における次の速さを求めよ。

- (1) 水面の下降する速さ
- (2) 水面の面積の減少する速さ

**解答** (1)  $\frac{18}{25\pi} \text{ cm/秒}$     (2)  $\frac{8}{5} \text{ cm}^2/\text{秒}$

- (1)  $t$  秒後の水の深さを  $h$  cm, 水面の半径を  $r$  cm とすると

$$r : h = 5 : 15 \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{h}{3}$$

よって,  $t$  秒後の水の量を  $V$  cm<sup>3</sup> とすると

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{27} h^3$$

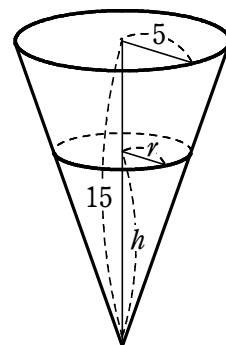
両辺を  $t$  で微分すると  $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

毎秒 8 cm<sup>3</sup> の割合で排出するから  $\frac{dV}{dt} = -8$

ゆえに  $\frac{dh}{dt} = -8 \cdot \frac{9}{\pi h^2} = -\frac{72}{\pi h^2}$

$h = 10$  のとき  $\frac{dh}{dt} = -\frac{72}{\pi \cdot 10^2} = -\frac{18}{25\pi}$

よって, 水面の下降する速さは  $\frac{18}{25\pi}$  cm/秒



- (2)  $t$  秒後の水面の面積を  $S$  cm<sup>2</sup> とすると  $S = \pi r^2 = \frac{\pi}{9} h^2$

両辺を  $t$  で微分すると  $\frac{dS}{dt} = \frac{2}{9} \pi h \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{2}{9} \pi h \left( -\frac{72}{\pi h^2} \right) = -\frac{16}{h}$

$h = 10$  のとき  $\frac{dS}{dt} = -\frac{16}{10} = -\frac{8}{5}$

よって, 水面の面積の減少する速さは  $\frac{8}{5}$  cm<sup>2</sup>/秒

### B 37 - 3

- (1)  $|x|$  が十分小さいとき,  $\sqrt{1-x}$  の 1 次の近似式を作れ。

- (2) (1) を用いて,  $\sqrt{0.9998}$  の近似値を求めよ。

**解答** (1)  $1 - \frac{1}{2}x$  (2) 0.9999

(1)  $f(x) = \sqrt{1-x}$  とおくと  $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

よって  $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x = 1 - \frac{1}{2}x$

(2) (1) から  $\sqrt{0.9998} = \sqrt{1-0.0002} \doteq 1 - \frac{1}{2} \times 0.0002 = 0.9999$

**B 37 - 4**

座標平面上を運動する点 P の時刻  $t$  における座標  $(x, y)$  が、次の式で表されるとき、点 P の速さと加速度の大きさを求めよ。

- (1)  $x=10t, y=6t-3t^2$
- (2)  $x=2t, y=3e^t$
- (3)  $x=3t, y=\log t$
- (4)  $x=\cos t+1, y=\sin t+2$

**解答** 速さ、加速度の大ききの順に

$$(1) \quad 2\sqrt{9t^2-18t+34}, 6 \quad (2) \quad \sqrt{4+9e^{2t}}, 3e^t \quad (3) \quad \frac{\sqrt{9t^2+1}}{t}, \frac{1}{t^2}$$

$$(4) \quad 1, 1$$

速度を  $\vec{v}$ , 加速度を  $\vec{\alpha}$  とする。

$$(1) \quad \frac{dx}{dt}=10, \frac{dy}{dt}=6-6t \text{ であるから } |\vec{v}|=\sqrt{10^2+(6-6t)^2}=2\sqrt{9t^2-18t+34}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=-6 \text{ であるから } |\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+(-6)^2}=6$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt}=2, \frac{dy}{dt}=3e^t \text{ であるから } |\vec{v}|=\sqrt{2^2+(3e^t)^2}=\sqrt{4+9e^{2t}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=3e^t, e^t>0 \text{ であるから } |\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+(3e^t)^2}=3e^t$$

$$(3) \quad \text{対数の真数は正であるから } t>0$$

$$\frac{dx}{dt}=3, \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t} \text{ であるから } |\vec{v}|=\sqrt{3^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{\sqrt{9t^2+1}}{t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{t^2} \text{ であるから } |\vec{\alpha}|=\sqrt{0^2+\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2}=\frac{1}{t^2}$$

$$(4) \quad \frac{dx}{dt}=-\sin t, \frac{dy}{dt}=\cos t \text{ であるから } |\vec{v}|=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}=1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t, \frac{d^2y}{dt^2}=-\sin t \text{ であるから } |\vec{\alpha}|=\sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2}=1$$

**B 37 - 5**

$x$  軸上を運動する点 P がある。P が原点 O を出発して  $t$  秒後の速度  $v$  は、 $v=\sin t+\sin 2t$  と表されるものとする。

- (1) 出発してから  $t$  秒後の P の位置の  $x$  座標を求めよ。

(2) 出発してから 1 秒間に動く道のり  $s$  を求めよ。

**解答** (1)  $x = -\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{2}$  (2)  $s = -\cos 1 - \frac{1}{2}\cos 2 + \frac{3}{2}$

$$(1) \quad x = \int v dt = \int (\sin t + \sin 2t) dt = -\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + C$$

$$t=0 \text{ のとき } x=0 \text{ であるから } 0 = -1 - \frac{1}{2} + C$$

$$\text{よって } C = \frac{3}{2}$$

$$\text{ゆえに } x = -\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{2}$$

$$(2) \quad s = \int_0^1 |v| dt = \int_0^1 |\sin t + \sin 2t| dt$$

$$0 \leq t \leq 1 \text{ のとき } \sin t + \sin 2t \geq 0$$

$$\text{よって } s = \int_0^1 (\sin t + \sin 2t) dt = \left[ -\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^1$$

$$= -\cos 1 - \frac{1}{2}\cos 2 + \frac{3}{2}$$

### B 37 - 6

曲線  $y = x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) を  $y$  軸の周りに 1 回転させてできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口があり、時刻  $t=0$  に排水口を開けて排水を開始する。

時刻  $t$  において、容器に残っている水の深さが  $h$  のときの水の体積を  $V$  とする。

このとき、 $V$  の変化率  $\frac{dV}{dt}$  は  $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$  である。

(1) 水の深さ  $h$  の変化率  $\frac{dh}{dt}$  を  $h$  を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間  $T$  を求めよ。

**解答** (1)  $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$  (2)  $\frac{2}{3}\pi$

$$(1) \quad V = \pi \int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h y dy$$

$$h \text{ で微分すると } \frac{dV}{dh} = \pi h$$

このとき  $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \pi h \frac{dh}{dt}$

よって  $\pi h \frac{dh}{dt} = -\sqrt{h}$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$$

(2) 求める時間  $T$  は、 $h=1$  から  $h=0$  までの時刻  $t$  の変化量である。

(1) より、 $\frac{dt}{dh} = -\pi\sqrt{h}$  であるから

$$T = \int_1^0 (-\pi\sqrt{h}) dh = \pi \int_0^1 \sqrt{h} dh = \pi \left[ \frac{2}{3} h\sqrt{h} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi$$



## 第 38 章 不等式

### B 38 - 1

(1)  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  のとき、不等式  $1+x \leq \frac{1}{1-x} \leq 1+2x$  が成り立つことを示せ。

(2) 定積分を利用して、 $\frac{5}{8} < \log 2 < \frac{3}{4}$  であることを示せ。

**解答** (1) 略 (2) 略

(1)  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  のとき  $1-x > 0, 1-2x \geq 0$

$$\text{よって } \frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{1-(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{x^2}{1-x} \geq 0$$

$$(1+2x) - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+2x)(1-x)-1}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} \geq 0$$

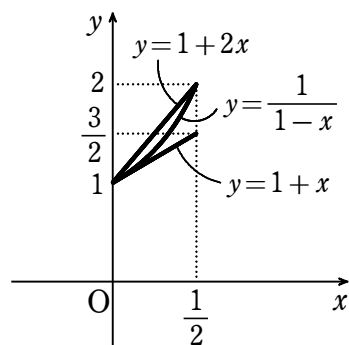
したがって、 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  のとき  $1+x \leq \frac{1}{1-x} \leq 1+2x$  …… ①

(2)  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  において、① の等号は常には成り立たな

$$\text{いから } \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} (1+2x) dx$$

$$\text{よって } \left[ x + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} < \left[ -\log |1-x| \right]_0^{\frac{1}{2}} < \left[ x + x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{したがって } \frac{5}{8} < \log 2 < \frac{3}{4}$$



### B 38 - 2

$0 < x < 1$  のとき、不等式  $1 < 1+x^3 < 1+x^2$  が成り立つことを利用して、  
不等式  $\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < 1$  を証明せよ。

**解答** 略

$0 < x < 1$  のとき、 $1 < 1+x^3 < 1+x^2$  より  $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+x^3} < 1$  が成り立つ。

$$\text{よって} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < \int_0^1 dx$$

ここで、 $x = \tan \theta$  とおくことで

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dx = \left[ x \right]_0^1 = 1$$

である。

したがって、 $\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} < 1$  が成り立つ。

### B 38 - 3

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad \alpha = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \text{ とする。}$$

$|a_n - \alpha| \leq \int_0^1 x^n dx$  であることを示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

**解答** 証明略、 $\log 2$

$$k=1, 2, \dots, n \text{ に対して} \quad \int_0^1 x^{k-1} dx = \left[ \frac{x^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k}$$

また、 $0 \leq x \leq 1$  では  $-x \leq 1$ ,  $1 \leq 1+x \leq 2$  であり

$$a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1} dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} dx = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1+x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad |a_n - \alpha| &= \left| \int_0^1 \left\{ \frac{1 - (-x)^n}{1+x} - \frac{1}{1+x} \right\} dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{-(-x)^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{-(-x)^n}{1+x} \right| dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ であるから} \quad 0 \leq |a_n - \alpha| \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ であるから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[ \log(1+x) \right]_0^1 = \log 2$$

### B 38 - 4

実数  $x$  に対して、 $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  で表す。 $n$  を正の整数とし

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{[\sqrt{2n^2 - k^2}]}{n^2} \text{ とする。このとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ を求めよ。}$$

**解答**  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

[ ] の定義から  $\sqrt{2n^2 - k^2} - 1 < [\sqrt{2n^2 - k^2}] \leq \sqrt{2n^2 - k^2}$

よって  $\sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \frac{1}{n} < \frac{[\sqrt{2n^2 - k^2}]}{n^2} \leq \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$

ゆえに  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} < a_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \dots\dots ①$

一方  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{2 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx$

$\int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx$  は図の網の部分の面積に等しいから

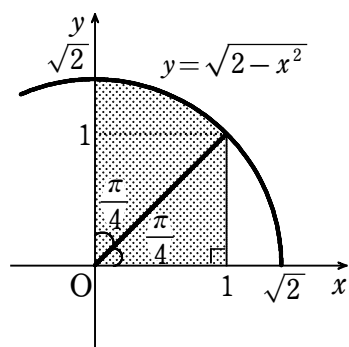
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{2 - x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

また  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n}$

よって、①において  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

したがって  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$



### B 38 - 5

$n \geq 1$  とする。次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{n}$$

**解答** 略

自然数  $k$  に対して,

$$k \leq x \leq k+1$$

とすると

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

等号は常には成り立たないから

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$$

ゆえに 
$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$$

この式で,  $k=1, 2, \dots, n$  とおき, 辺々を加えると

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

ここで 
$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

また 
$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

よって 
$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1)$$

したがって

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

### B 38 - 6

$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$  とするとき,  $n < S < n+1$  を満たす自然数は

$n = \boxed{\quad}$  である。

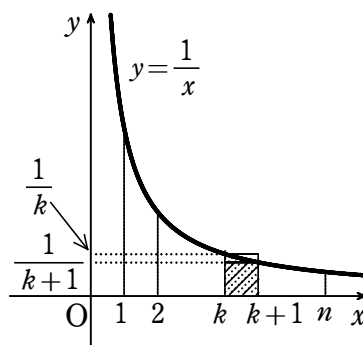
**解答** 18

自然数  $k$  に対して,  $k \leq x \leq k+1$  のとき

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

常に  $\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$  または  $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$  ではないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dx$$



$$\text{すなわち } \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{ゆえに } \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^{99} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{ここで } \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}} = S - 1$$

$$\sum_{k=1}^{99} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[ 2\sqrt{x} \right]_1^{100} = 18$$

$$\text{よって } S - 1 < 18 \quad \text{すなわち } S < 19 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また } \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}} = S - \frac{1}{\sqrt{100}}$$

$$\text{よって } 18 < S - \frac{1}{10} \quad \text{ゆえに } S > 18 + \frac{1}{10} > 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } 18 < S < 19$$

$$\text{よって, } 18 < S < 18 + 1 \text{ から } n = 18$$

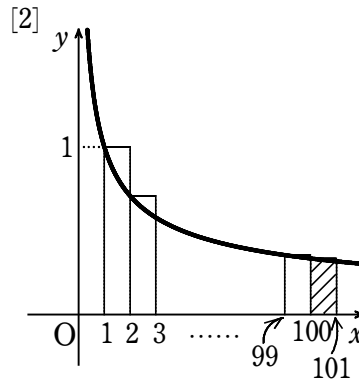
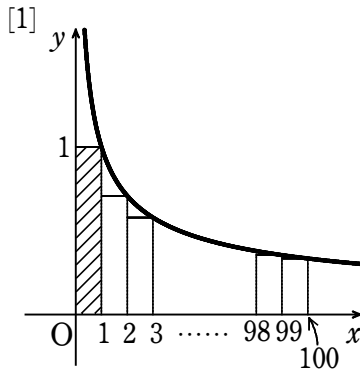
**別解** まず, 図 [1] から

$$S < 1 + \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 1 + \left[ 2\sqrt{x} \right]_1^{100} = 1 + 20 - 2 = 19$$

図 [2] から

$$\begin{aligned} S &> \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \frac{1}{\sqrt{100}} = \left[ 2\sqrt{x} \right]_1^{100} + \frac{1}{10} \\ &= 20 - 2 + \frac{1}{10} = 18 + \frac{1}{10} > 18 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } 18 < S < 19 = 18 + 1 \text{ から } n = 18$$



- (1)  $f(x)$ ,  $g(x)$  はともに区間  $a \leq x \leq b$  ( $a < b$ ) で定義された連続な関数とする。このとき、 $t$  を任意の実数として  $\int_a^b \{f(x) + tg(x)\}^2 dx$  を考えることにより、次の不等式が成立することを示せ。

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 \leq \left( \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left( \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right) \cdots \cdots [A]$$

また、等号はいかなるときに成立するかを述べよ。

- (2)  $f(x)$  は区間  $0 \leq x \leq \pi$  で定義された連続関数で

$$\left\{ \int_0^\pi (\sin x + \cos x)f(x)dx \right\}^2 = \pi \int_0^\pi \{f(x)\}^2 dx, \text{ および } f(0) = 1$$

を満たしている。このとき、 $f(x)$  を求めよ。

**解答** (1) 証明略；等号が成り立つのは、区間  $a \leq x \leq b$  で恒等的に  $f(x) = 0$  または恒等的に  $g(x) = 0$  または恒等的に  $f(x) = kg(x)$  となる定数  $k$  が存在するとき

$$(2) f(x) = \sin x + \cos x$$

$$(1) p = \int_a^b \{g(x)\}^2 dx, q = \int_a^b f(x)g(x)dx, r = \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \text{ とおく。}$$

[1] 恒等的に  $f(x) = 0$  または  $g(x) = 0$  のとき

不等式 [A] の両辺はともに 0 となり、[A] が成り立つ。

[2] [1] の場合以外するとき  $t$  を任意の実数とすると

$$\int_a^b \{f(x) + tg(x)\}^2 dx = \int_a^b [\{f(x)\}^2 + 2tf(x)g(x) + t^2\{g(x)\}^2] dx = pt^2 + 2qt + r$$

$\{f(x) + tg(x)\}^2 \geq 0$  から、 $\int_a^b \{f(x) + tg(x)\}^2 dx \geq 0$  すなわち、任意の実数  $t$  に対し

て  $pt^2 + 2qt + r \geq 0$  が成り立つ。

ここで  $p > 0$  から、 $t$  の 2 次方程式  $pt^2 + 2qt + r = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = q^2 - pr \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad q^2 \leq pr$$

[1], [2] から  $q^2 \leq pr$

すなわち、不等式 [A] が成り立つ。

また、[2] において、不等式 [A] で等号が成り立つとすると、 $\frac{D}{4} = 0$  から、方程式

$pt^2 + 2qt + r = 0$  が重解  $\alpha$  をもつ。

よって、 $p\alpha^2 + 2q\alpha + r = 0$  から  $\int_a^b \{f(x) + \alpha g(x)\}^2 dx = 0$

$f(x)$ ,  $g(x)$  はともに連続関数であるから  $h(x) = f(x) + \alpha g(x)$  も連続関数であり

$\int_a^b \{h(x)\}^2 dx = 0$  であるから,  $h(x)$  は区間  $a \leq x \leq b$  で恒等的に 0, すなわちこの区間で, 恒等的に  $f(x) = -\alpha g(x)$  である。

これと [1] から, 不等式 [A] において等号が成り立つのは, 区間  $a \leq x \leq b$  で恒等的に  $f(x) = 0$  または恒等的に  $g(x) = 0$  または恒等的に  $f(x) = kg(x)$  となる定数  $k$  が存在するときに限る。

(2)  $g(x) = \sin x + \cos x$  とすると

$$\int_0^\pi \{g(x)\}^2 dx = \int_0^\pi (1 + \sin 2x) dx = \left[ x - \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi = \pi$$

よって,  $\left\{ \int_0^\pi (\sin x + \cos x) f(x) dx \right\}^2 = \pi \int_0^\pi \{f(x)\}^2 dx$  から

$$\left\{ \int_0^\pi f(x) g(x) dx \right\}^2 = \left( \int_0^\pi \{f(x)\}^2 dx \right) \left( \int_0^\pi \{g(x)\}^2 dx \right)$$

これは, (1) の不等式で等号が成り立つ場合であり, 区間  $0 \leq x \leq \pi$  で  $f(x)$ ,  $g(x)$  が恒等的には 0 でないから

$$f(x) = kg(x) = k(\sin x + \cos x) \quad (k \text{ は定数})$$

と表される。

$$f(0) = 1 \text{ から } k = 1$$

$$\text{ゆえに } f(x) = \sin x + \cos x$$

### C 38 - 2

関数  $f(x) = e^x - 1$  の逆関数を  $g(x)$  とするとき, 任意の実数  $a$  に対して

$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx \geq ab$  が成り立つことを証明せよ。ただし,  $b > -1$  とする。

**解答** 略

$$y = e^x - 1 \text{ とおくと } e^x = y + 1 \quad \text{ゆえに } x = \log(y + 1)$$

よって,  $f(x)$  の逆関数は  $g(x) = \log(x + 1)$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a (e^x - 1) dx = \left[ e^x - x \right]_0^a = e^a - a - 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^b g(x) dx &= \int_0^b \log(x + 1) dx = \left[ (x + 1) \log(x + 1) \right]_0^b - \int_0^b dx \\ &= (b + 1) \log(b + 1) - b \end{aligned}$$

$F(a) = (e^a - a - 1) + \{(b + 1) \log(b + 1) - b\} - ab$  とおく。

$F'(a) = e^a - 1 - b$   
 $F'(a) = 0$  とすると  $a = \log(b + 1)$   
右の増減表から、 $F(a)$  は  $a = \log(b + 1)$  のとき  
極小かつ最小で、最小値は

|         |     |               |     |
|---------|-----|---------------|-----|
| $a$     | ... | $\log(b + 1)$ | ... |
| $F'(a)$ | -   | 0             | +   |
| $F(a)$  | ↘   | 極小            | ↗   |

$$F(\log(b + 1)) = (b + 1) - \log(b + 1) - 1 + \{(b + 1)\log(b + 1) - b\} - b\log(b + 1)$$
$$= 0$$

よって  $F(a) = 0$  等号は  $a = \log(b + 1)$  のとき成り立つ。  
したがって、与えられた不等式が成り立つ。