

1 点 $(3x-1, 3-2x)$ は $x=2$ のとき第何象限にあるか。

また、点 $(3x-1, -2)$ が第 3 象限にあるのは $x < \boxed{\quad}$ のときである。

【解答】 順に 第 4 象限, $\frac{1}{3}$

$x=2$ のとき、点 $(3x-1, 3-2x)$ の座標は

$$(3 \cdot 2 - 1, 3 - 2 \cdot 2) \quad \text{すなわち} \quad (5, -1)$$

したがって、第 4 象限にある。

また、点 $(3x-1, -2)$ が第 3 象限にあるための条件は

$$3x-1 < 0$$

これを解いて $x < \frac{1}{3}$

2 $\frac{x+y}{z} = \frac{y+2z}{x} = \frac{z-x}{y}$ のとき、この式の値を求めよ。

【解答】 $1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+2z}{x} = \frac{z-x}{y} = k \text{ とおくと}$$

$$x+y=kz \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad y+2z=kx \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad z-x=ky \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \text{ から } y+z=k(y+z) \text{ すなわち } (k-1)(y+z)=0$$

[1] $k=1$ のとき $x+y=z, y+2z=x$ から $x:y:z=3:(-1):2$ ゆえに、適する。

[2] $y+z=0$ のとき $x-z=kz, z=kx$ ゆえに $\{1-k(1+k)\}x=0$

これが、 $x=0, z=0$ 以外の解をもつことから $1-k(k+1)=0$

$$\text{すなわち } k^2+k-1=0 \quad \text{よって } k=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに } 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3 立方体の各辺の中点は全部で 12 個ある。頂点がすべてこれら 12 個の点のうちのどれかであるような正多角形は全部でいくつあるか。

【解答】 29 個

立方体の 1 辺の長さを 2 として考えてよい。

このとき、立方体の各辺の中点を結んでできる線分の長さは、 $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}$ の 4 通りある。

このうち、 $2\sqrt{2}$ の線分を 1 辺とする正多角形はない。

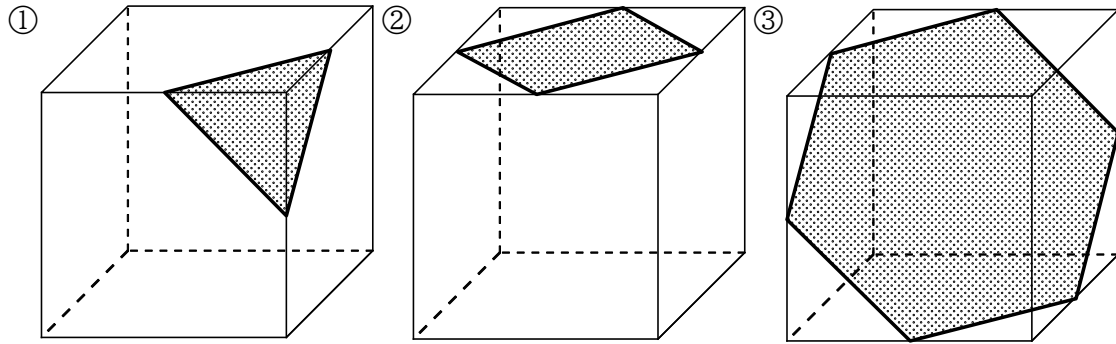
[1] 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ である正多角形は、

① 正三角形

② 正方形

③ 正六角形

の場合がある。



① の正三角形は、立方体の頂点と同じ個数だけあるから、8 個ある。

② の正方形は、立方体の面と同じ個数だけあるから、6 個ある。

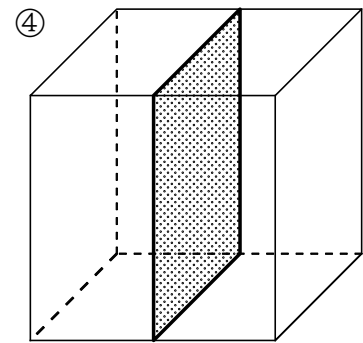
③ の正六角形は、立方体の各面の $\sqrt{2}$ の線分を 1 本ずつ辺にもち、1 つの面で共有する辺を決めると 1 つに決まる。よって、4 個ある。

[2] 1 辺の長さが 2 である正多角形は、

④ 正方形

の場合がある。

この正方形は、立方体の平行な面が 3 組あるから、3 個ある。



[3] 1 辺の長さが $\sqrt{6}$ である正多角形は、

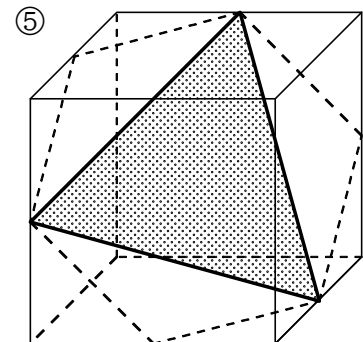
⑤ 正三角形

の場合がある。

この正三角形は、③ の正六角形上に 2 個ずつあるから、 $2 \times 4 = 8$ 個ある。

[1] ~ [3] から、条件を満たす正多角形の個数は

$$8 + 6 + 4 + 3 + 8 = 29 \text{ (個)}$$



- 4 2つのさいころを同時に振るという試行を独立に 3 回行う。1 回目に出た目を a_1, b_1 , 2 回目に出た目を a_2, b_2 , 3 回目に出た目を a_3, b_3 とする。
このとき、 $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = 0$ となる確率を求めよ。

解答 $\frac{91}{216}$

さいころを 1 回振るとき、2 つのさいころの目が一致する確率は $\frac{1}{6}$, 一致しない

確率は $\frac{5}{6}$ である。ところで、 $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) \neq 0$ となるのは、3 回ともさい

ころの目が一致しない場合に限るから、その確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^3$

したがって, $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = 0$ となる確率は $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$

- 5 (1) 1桁の正の整数で, 4乗しても一の位の数字が変わらないものは3つある。
1以外の残り2つを求めよ。
(2) 2桁の正の整数で, 2乗しても下2桁が変わらないものは2つある。
それらを全て求めよ。

【解答】 (1) 5 と 6 (2) 25 と 76

$$(1) \quad 2^4 = 16, 3^4 = 81, 4^4 = 256, 5^4 = 625, 6^4 = 1296, 7^4 = 2401, 8^4 = 4096, 9^4 = 6561$$

よって, 一の位の数が同じものは 5 と 6

- (2) 2桁の正の整数 x に対し, 2乗しても下2桁が変わらないのは

$x^2 - x = x(x-1)$ が 100 の倍数となるときである。

よって, x または $x-1$ は 25 の倍数であることが必要で

$$x = 25, 50, 75 \quad \text{と} \quad x-1 = 25, 50, 75$$

すなわち $x = 25, 26, 50, 51, 75, 76$ の場合について調べればよい。

$$\text{ゆえに} \quad 25^2 = 625, 26^2 = 676, 50^2 = 2500, 51^2 = 2601, 75^2 = 5625, 76^2 = 5776$$

したがって $x = 25, 76$

- 6 (1) (ア) $\log_3 27$ (イ) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243}$ の値を求めよ。

$$(2) \quad 2\log_2 12 - \frac{1}{4}\log_2 \frac{8}{9} - 5\log_2 \sqrt{3} \text{ を簡単にせよ。}$$

【解答】 (1) (ア) 3 (イ) $-\frac{5}{2}$ (2) $\frac{13}{4}$

$$(1) \quad (\text{ア}) \quad \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$$

$$(\text{イ}) \quad \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}$$

$$(2) \quad (\text{解答 1}) \quad 2\log_2 12 - \frac{1}{4}\log_2 \frac{8}{9} - 5\log_2 \sqrt{3}$$

$$= \log_2 \left(12^2 \cdot \frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{8}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^5} \right) = \log_2 \frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{5}{2}}} = \log_2 2^{\frac{13}{4}} = \frac{13}{4}$$

$$(\text{解答 2}) \quad (\text{与式}) = 2(2 + \log_2 3) - \frac{1}{4}(3 - 2\log_2 3) - \frac{5}{2}\log_2 3$$

$$= 4 - \frac{3}{4} + \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\log_2 3 = \frac{13}{4}$$

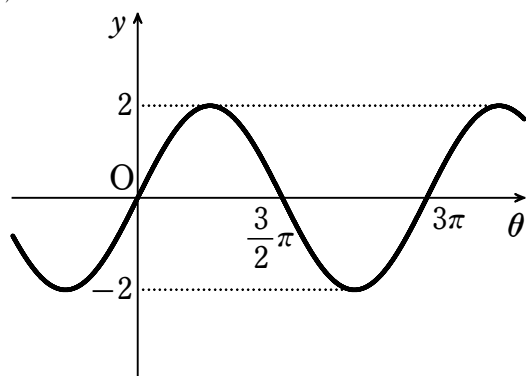
- 7 常用対数表を用いて, $\log_{10} 32.3$ の値を求めよ。

【解答】 1.5092

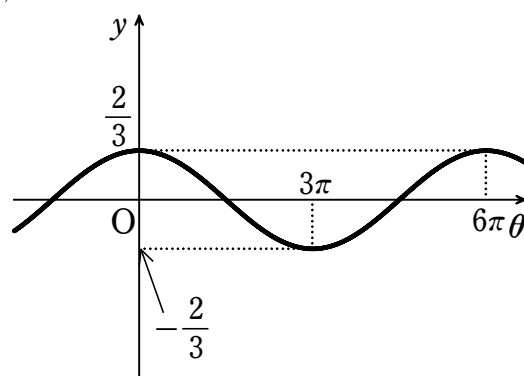
$$\log_{10} 32.3 = \log_{10} (10 \times 3.23) = \log_{10} 10 + \log_{10} 3.23 = 1 + \log_{10} 3.23 = 1 + 0.5092 = 1.5092$$

- 8 次の図は, (1) $y = a \sin b\theta$ (2) $y = a \cos b\theta$ のグラフである。定数 a, b の値を, それぞれ求めよ。ただし, $a > 0, b > 0$ とする。

(1)



(2)



【解答】 (1) $a = 2, b = \frac{2}{3}$ (2) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$

(1) グラフから, 関数の値域は $-2 \leq y \leq 2$

関数 $y = a \sin b\theta$ の値域は, $a > 0$ であるから $-a \leq y \leq a \therefore a = 2$

また, グラフより周期は 3π であるから $\frac{2\pi}{b} = 3\pi \therefore b = \frac{2}{3}$

(2) グラフから, 関数の値域は $-\frac{2}{3} \leq y \leq \frac{2}{3}$

関数 $y = a \cos b\theta$ の値域は, $a > 0$ であるから $-a \leq y \leq a \therefore a = \frac{2}{3}$

また, グラフより周期は 6π であるから $\frac{2\pi}{b} = 6\pi \therefore b = \frac{1}{3}$

- 9 $f(x)$ は整式で, 恒等式 $f(x) - f'(x) = x^3 - 15x + 14$ を満たしている。
このとき, $f(x)$ を求めよ。

【解答】 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

$f(x) = ax^n + \dots (a \neq 0)$ とおくと $f'(x) = nax^{n-1} + \dots$

$f(x) - f'(x) = x^3 - 15x + 14$ の両辺の最高次を比べて $ax^n = x^3$ ゆえに $a = 1, n = 3$

よって $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ とおける。

このとき $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c, f(x) - f'(x) = x^3 + (b-3)x^2 + (c-2b)x + d - c$ が

すべての x について $x^3 - 15x + 14$ と等しくなるから

$b - 3 = 0, c - 2b = -15, d - c = 14$

これらを解いて $b = 3, c = -9, d = 5$ よって $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

- 10 曲線 $y = x^2$ の点 (t, t^2) における接線が, 4 点 A (1, 0), B (2, 0), C (2, 1), D (1, 1) を頂点とする正方形の面積を 2 等分している。このときの t の値を求めよ。

解答 $t = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$

接線の方程式は $y = 2tx - t^2 \dots\dots ①$

① が正方形 ABCD の面積を 2 等分するのは, 正方形 ABCD の中心 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を通る

ときである。よって $\frac{1}{2} = 3t - t^2$ から $2t^2 - 6t + 1 = 0$

これを解いて $t = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$

- 11 ε_{ijk} を次のように定義する。

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon_{123}, \varepsilon_{231}, \varepsilon_{312} \text{ のとき}) \\ -1 & (\varepsilon_{321}, \varepsilon_{213}, \varepsilon_{132} \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上記以外の } \varepsilon_{ijk}) \end{cases}$$

ただし, ε の右下の添字は, すべて 1, 2, 3 のうちいずれかの値をとるものとする。

このとき, $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{ijk} \times \varepsilon_{ijk})$ の値を求めよ。

(hint) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{ijk} \times \varepsilon_{ijk})$ は, $\sum_{i=1}^3 \left[\sum_{j=1}^3 \left\{ \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{ijk} \times \varepsilon_{ijk}) \right\} \right]$ と表すこともできる。

解答 6

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{ijk} \times \varepsilon_{ijk}) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \{ (\varepsilon_{ij1})^2 + (\varepsilon_{ij2})^2 + (\varepsilon_{ij3})^2 \} \\ &= \sum_{i=1}^3 \{ (\varepsilon_{i12})^2 + (\varepsilon_{i13})^2 + (\varepsilon_{i21})^2 + (\varepsilon_{i23})^2 + (\varepsilon_{i31})^2 + (\varepsilon_{i32})^2 \} \\ &= (\varepsilon_{123})^2 + (\varepsilon_{132})^2 + (\varepsilon_{213})^2 + (\varepsilon_{231})^2 + (\varepsilon_{312})^2 + (\varepsilon_{321})^2 = 6 \end{aligned}$$