第６章　数学Ⅲの極限の応用（１）★

数列および漸化式を学習してからやるとよい

《学習項目》

・極限と数列の融合（計算問題として）

A 問題　★　数列の復習としても使える

③**6-A-1**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots\cdots+2n}$

(2)* $S_n=2+4+6+\cdots\cdots+2n$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 1}{n^2(n-1)}$

(4)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(3n)^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(2n)^2}$

解答　(1) **1**　(2) **1**　(3) $\mathbf{\frac{1}{6}}$　(4) $\mathbf{\frac{13}{4}}$

解き方　(1) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

(2) $S_n=n(n+1)$ より

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{n(n+1)}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{n^2+3n+2}+\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

(3) 分子$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)=n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$$=n\cdot\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

よって，与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{6n^2(n-1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{6n}=\frac{1}{6}$$

(4) 分子$\displaystyle=\sum_{k=1}^{3n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(26n^2+12n+1)}{3}$

分母$\displaystyle=\sum_{k=1}^{2n}k^2=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$

よって，与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{26n^2+12n+1}{(2n+1)(4n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{26+\frac{12}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)}=\frac{13}{4}$$

③**6-A-2**

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos k\pi$

解答　(1) $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$　(2) ∞　(3) $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

解き方 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

よって，与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log_{10}\frac{k+1}{k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{\log_{10}(k+1)-\log_{10}k\}$$

$$=\log_{10}(n+1)-\log_{10}1=\log_{10}(n+1)$$

よって，与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\log_{10}(n+1)=\infty$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos k\pi$

$$=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

よって，与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=\frac{2}{3}$

③**6-A-3**

$0.\dot{1}\dot{2}\times0.\dot{1}3\dot{2}$ の計算の結果を循環小数で表せ。

解答　$\boldsymbol{0.\dot{0}1\dot{6}}$

解き方 $0.\dot{1}\dot{2}=\dfrac{0.12}{1-\dfrac{1}{100}}=\dfrac{4}{33}$,

$$0.\dot{1}3\dot{2}=\frac{0.132}{1-\dfrac{1}{1000}}=\frac{44}{333}$$

よって，与式$=\dfrac{4}{33}\times\dfrac{44}{333}=\dfrac{16}{999}=0.\dot{0}1\dot{6}$

(注)無限等比級数としても捉えられるようにしましょう！

B 問題

③**6-B-1**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^2(k+2)^2}$

(3)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)$　(4)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{2k}{3}\pi$

解答　(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{5}{16}$　(3) 1　(4) $-\dfrac{2}{7}$

解き方　(1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}$

$\displaystyle=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}$

よって，与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{4}$

(2)　与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right\}=\frac{5}{16}$

(3)　$\displaystyle\log_2\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)=\log_2\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$

$\displaystyle=\log_2\frac{k}{k-1}-\log_2\frac{k+1}{k}$

よって，与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\log_2\frac{k}{k-1}-\log_2\frac{k+1}{k}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\log_2 2-\log_2\frac{n+1}{n}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2 2-\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}=1$

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{2k}{3}\pi$

$\displaystyle=-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^6}-\cdots\cdots$

$\displaystyle=\left(-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{3(n-1)}}\right)$

$\displaystyle=-\frac{1}{4}\left\{1+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$

$\displaystyle=-\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}=-\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}$

よって，与式$\displaystyle=-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}=-\frac{2}{7}$

③**6-B-2**

数列 $\{a_n\}$ は，すべての自然数 n に対して，

$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots\cdots+2^{n-1}a_n=8-5n$ を満たすとする。

(1)　a_1 および a_n $(n\geqq2)$ を求めよ。

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ。

(3)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n}{2}\pi$ の和を求めよ。　●金沢大●

解答　(1) $a_1=3$，$a_n=-\dfrac{5}{2^{n-1}}$ $(n\geqq2)$　(2) -2　(3) 4

解き方 (1)　$n \geqq 2$ のとき，

$$a_1+2a_2+\cdots\cdots+2^{n-2}a_{n-1}+2^{n-1}a_n=8-5n$$

$$a_1+2a_2+\cdots\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=8-5(n-1)$$

この２式を辺々引くと，$2^{n-1}a_n=-5$

よって，$a_n=-\dfrac{5}{2^{n-1}}\ (n \geqq 2)$

与式より，$a_1=8-5=3$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3-5\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}$

$$=3-5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots\right)$$

$$=3-5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=-2$$

(3) $\sin\dfrac{n}{2}\pi=\begin{cases}(-1)^{m-1} & (n=2m-1)\\ 0 & (n=2m)\end{cases}$

$(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

よって，

$$\text{与式}=\sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1}(-1)^{m-1}$$

$$=3-5\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=3-5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=4$$

③**6-B-3**

　$\triangle$ABC において，AB$=4$，AC$=3$，BC$=5$ であって，円 O_1 は３辺に接する円，円 O_2 は AB，BC に接し，かつ円 O_1 に外接する円で，以下同様に円 O_3，円 O_4，……，円 O_n を作るとき，次の各問いに答えよ。

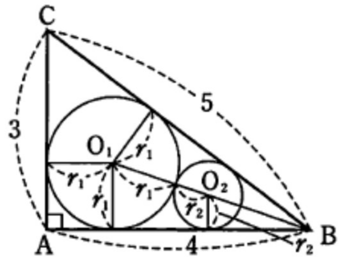
(1)　円 O_1 の面積を求めよ。　　　　(2)　円 O_2 の面積を求めよ。

(3)　$n\to\infty$ のとき，円 O_1，O_2，……，O_n の面積の総和を求めよ。

●釧路公立大●

解 答　(1)　π　　(2)　$\dfrac{161-44\sqrt{10}}{81}\pi$　(3)　$\dfrac{20+11\sqrt{10}}{40}\pi$

解き方　円 O_n の半径を r_n とし，面積を S_n とする。



(1)　図より　$\triangle ABC=\triangle ABO_1+\triangle ACO_1+\triangle BCO_1$

$$6=2r_1+\frac{3}{2}r_1+\frac{5}{2}r_1$$

これから　$r_1=1$　　よって　$S_1=\pi$

(2)　$r_1=1$ から　$BO_1=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$r_1 : r_2=BO_1 : BO_2$

ここで，$BO_2=\sqrt{10}-r_1-r_2=\sqrt{10}-1-r_2$ より

$1 : r_2=\sqrt{10} : (\sqrt{10}-1-r_2)$ を解いて

$$r_2=\frac{11-2\sqrt{10}}{9}$$

ゆえに　$S_2=\pi r_2{}^2=\dfrac{161-44\sqrt{10}}{81}\pi$

(3)　同様にして，$r_n=\left(\dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}\right)^{n-1}$ から

$$S_n=\pi r_n{}^2=\left(\frac{161-44\sqrt{10}}{81}\right)^{n-1}\pi$$

$$S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$$

$$=\frac{\pi\left\{1-\left(\frac{161-44\sqrt{10}}{81}\right)^n\right\}}{1-\frac{161-44\sqrt{10}}{81}}$$

$$=\frac{20+11\sqrt{10}}{40}\left\{1-\left(\frac{161-44\sqrt{10}}{81}\right)^n\right\}\pi$$

$0<\dfrac{161-44\sqrt{10}}{81}<1$ であるから，

$n\to\infty$ のときの面積の総和は $\dfrac{20+11\sqrt{10}}{40}\pi$

③**6-B-4**

57* $n \geqq 1$ のとき，n が奇数のとき $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$，n が偶数のとき $a_{n+1}=a_n$，$a_1=3$ で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ として，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。 ●関西医科大●

解答 **6**

解き方 $n=2k+1$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ のとき，

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$ より，$a_{2k+2}=\frac{1}{3}a_{2k+1}$

$n=2k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のとき，

$a_{n+1}=a_n$ より，$a_{2k+1}=a_{2k}$

よって，$a_{2k+2}=\frac{1}{3}a_{2k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

ゆえに，$a_{2k}=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times a_2$

$a_2=\frac{1}{3}a_1=1$ だから，

$$a_{2k}=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$\begin{aligned} S_{2k+1}&=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots\cdots \\ &\qquad +a_{2k}+a_{2k+1} \\ &=a_1+a_2+a_2+a_4+a_4+a_6+\cdots\cdots \\ &\qquad +a_{2k}+a_{2k} \\ &=a_1+2(a_2+a_4+a_6+\cdots\cdots+a_{2k}) \\ &=3+2\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\} \\ &=3+2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1-\frac{1}{3}}=6-\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2k}&=S_{2k+1}-a_{2k+1}=S_{2k+1}-a_{2k} \\ &=6-\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=6-2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

よって，$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}=6$，$\lim_{k\to\infty} S_{2k}=6$

ゆえに，$\lim_{k\to\infty} S_n=6$

③**6-B-5**

$0<a<b$ である定数 a，b がある。$x_n=\left(\frac{a^n}{b}+\frac{b^n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおくとき

(1) $b^n<a(x_n)^n<2b^n$ を証明せよ。 (2) $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。 ●立命館大●

解答 (1)下参照 (2) b

(1) $x_n=\left(\frac{a^n}{b}+\frac{b^n}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ から

$(x_n)^n=\frac{a^n}{b}+\frac{b^n}{a}$ より，

$$a(x_n)^n-b^n=a\left(\frac{a^n}{b}+\frac{b^n}{a}\right)-b^n=\frac{a^{n+1}}{b}>0$$

$$\begin{aligned} 2b^n-a(x_n)^n&=2b^n-a\left(\frac{a^n}{b}+\frac{b^n}{a}\right) \\ &=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b}>0 \end{aligned}$$

以上より，$b^n<a(x_n)^n<2b^n$

解き方 (2) $b^n<a(x_n)^n<2b^n$ の各辺で底が2の対数をとって，

$$n\log_2 b<\log_2 a+n\log_2 x_n<1+n\log_2 b$$

$$\log_2 b-\frac{\log_2 a}{n}<\log_2 x_n<\log_2 b+\frac{1-\log_2 a}{n}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 a}{n}=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\log_2 a}{n}=0$

だから，はさみ打ちの原理により，

$\lim_{n\to\infty}\log_2 x_n=\log_2 b$ すなわち $\lim_{n\to\infty} x_n=b$

③6-B-6

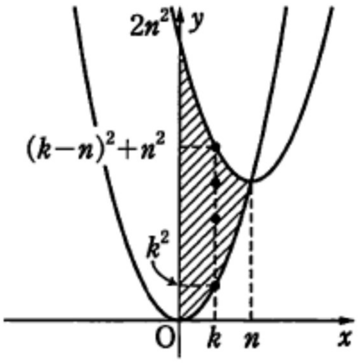
2 つの放物線 $y=x^2$, $y=(x-n)^2+n^2$ と y 軸で囲まれた部分（境界線を含む）にあって，x 座標，y 座標がともに整数である点の個数を a_n とする。

(1) a_n を求めよ。　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ を求めよ。

●熊本大●

解答　(1) $a_n=n^3+n^2+n+1$　　(2) $\dfrac{1}{4}$

解き方　(1) $x=k$ ($k=0$, 1, ……, n) 上の格子点の個数は，次の図より



$(k-n)^2+n^2-(k^2-1)$

$=-2nk+2n^2+1$

よって，$a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-2nk+2n^2+1)$

$=n^3+n^2+n+1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}a_k$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2+k+1)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)+n\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n^3}+\frac{1}{n^3}\right\}=\frac{1}{4}$

③6-B-7

関数 $f(x)=4x-x^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)}$ ($n=1$, 2, 3, ……)

を考える。

(1) $0<a_n<2$，$a_n<a_{n+1}$ ($n=1$, 2, 3, ……) を示せ。

(2) $2-a_{n+1}<\dfrac{1}{2}(2-a_n)$ ($n=1$, 2, 3, ……) を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(1) (i) $0<a_n<2$ を示す。

〔I〕 $n=1$ のとき $0<a_1=1<2$ より成り立つ。

〔II〕 $n=k$ のとき $0<a_k<2$ が成り立つと仮定すると，

$$a_{k+1}=\sqrt{f(a_k)}=\sqrt{4a_k-a_k^2}$$
$$=\sqrt{4-(a_k-2)^2}\ \cdots\cdots①$$

ここで，$0<a_k<2$ から

$0<4-(a_k-2)^2<4$

よって，①から $0<a_{k+1}<\sqrt{4}=2$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

〔I〕,〔II〕よりすべての自然数 n に対して，$0<a_n<2$ は成り立つ。

(ii) $a_n<a_{n+1}$ を示す。

$a_{n+1}^2-a_n^2=(4a_n-a_n^2)-a_n^2=2a_n(2-a_n)$

ここで，$0<a_n<2$ から $a_{n+1}^2-a_n^2>0$

よって，$a_{n+1}^2>a_n^2$

また，$a_{n+1}>0$，$a_n>0$ より，$a_n<a_{n+1}$

(2) $2-a_{n+1}=2-\sqrt{4a_n-a_n^2}=\dfrac{(2-a_n)^2}{2+\sqrt{4a_n-a_n^2}}$

ここで，$2+\sqrt{4a_n-a_n^2}>2$ より

$$\frac{1}{2+\sqrt{4a_n-a_n^2}}<\frac{1}{2}$$

$$2-a_{n+1}<\frac{1}{2}(2-a_n)^2\ \cdots\cdots②$$

(1)から，$2-a_n<2-a_{n-1}<\cdots\cdots<2-a_1=1$

ゆえに，$\dfrac{1}{2}(2-a_n)^2<\dfrac{1}{2}(2-a_n)$

よって，②から $2-a_{n+1}<\dfrac{1}{2}(2-a_n)$

解き方 (3) (2)から，$0<2-a_n<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(2-a_1)$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-a_1)=0$ であるから，

はさみ打ちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

C 問題

③**6-C-1**

数列 $\{a_n\}$ について，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$，$S_0=0$ とおく。

$a_n=S_{n-1}+n\cdot 2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) S_n を n の式で表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a_k}$ を求めよ。

解答 (1) $\boldsymbol{S_n=n(n+1)2^{n-1}}$　(2) $\boldsymbol{\dfrac{22}{9}}$

解き方 (1) $n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$ を条件式に代入して，

$$S_n-S_{n-1}=S_{n-1}+n\cdot 2^n$$

すなわち，$S_n=2S_{n-1}+n\cdot 2^n$

両辺を 2^n で割ると，$\dfrac{S_n}{2^n}=\dfrac{S_{n-1}}{2^{n-1}}+n$

ここで，$\dfrac{S_n}{2^n}=b_n$ とおくと，$b_n=b_{n-1}+n$

また，$a_1=S_0+1\times 2^1=2$ だから，$S_1=2$

よって，$b_1=\dfrac{S_1}{2}=1$

$n\geqq 2$ のとき，$b_n-b_{n-1}=n$ から，

$$b_n=b_1+\sum_{k=2}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

これは $b_1=1$ を満たす。

よって，$S_n=2^nb_n=n(n+1)2^{n-1}$

(2) $n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n(n+1)2^{n-1}-(n-1)n2^{n-2}$$
$$=n(n+3)2^{n-2}$$

これは $a_1=2$ を満たす。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k(k+3)2^{k-2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+3)}$$
$$=\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{4}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{4}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{a_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{22}{9}$$

③**6-C-2**

数列 $\{a_n\}$ は条件 $a_1=\dfrac{2}{3}$，$\displaystyle\int_0^{n+1}\{(a_{n+1}-a_n)x+a_{n+1}\}dx=-\frac{a_n}{2}$

$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たしている。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を n を用いて表し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。　●東京学芸大●

解答 (1) $a_n=\dfrac{2}{n(n+2)}$　(2) $S_n=\dfrac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$

③**6-C-3**

$a_1=2$，$n\geqq 1$ のとき，$a_{2n}=\sqrt{a_{2n-1}}$，$a_{2n+1}=\dfrac{3}{2}a_{2n}-\dfrac{1}{2}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $a_n>1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(2) $a_{2n+1}-1<\dfrac{3}{4}(a_{2n-1}-1)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(1) 〔I〕 $n=1$ のとき $a_1=2>1$ より成り立つ。

〔II〕 $n=2k-1$ で $a_{2k-1}>1$ が成り立つと仮定すると，$a_{2k}=\sqrt{a_{2k-1}}$ から $a_{2k}>1$

さらに，$a_{2k+1}=\frac{3}{2}a_{2k}-\frac{1}{2}>\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

よって，$a_{2k+1}=a_{2(k+1)-1}>1$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

〔I〕,〔II〕よりすべての自然数 n に対して $a_n>1$ が成り立つ。

(2) $a_{2n+1}-1=\frac{3}{2}(a_{2n}-1)=\frac{3}{2}(\sqrt{a_{2n-1}}-1)$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{a_{2n-1}-1}{\sqrt{a_{2n-1}}+1}=\frac{3}{2(\sqrt{a_{2n-1}}+1)}(a_{2n-1}-1)$

ここで，$a_{2n-1}>1$ から $\sqrt{a_{2n-1}}+1>2$

よって，$\frac{3}{2(\sqrt{a_{2n-1}}+1)}<\frac{3}{4}$

ゆえに，$a_{2n+1}-1<\frac{3}{4}(a_{2n-1}-1)$

(3) 1

解き方 (3) (1), (2)から

$0<a_{2n-1}-1<\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(a_1-1)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$ より $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=1$

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_{2n-1}}=1$

よって，$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

③**6-C-4**

p，q は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする。自然数 n に対し，有理数 a_n，b_n を $(p+\sqrt{q})^n=a_n+b_n\sqrt{q}$ によって定める。

(1) $(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$ を示せ。 (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}$ を示せ。

●大阪市立大●

(1) $(p+\sqrt{q})^{n+1}=(p+\sqrt{q})(p+\sqrt{q})^n$

$=(p+\sqrt{q})(a_n+b_n\sqrt{q})$

$=(pa_n+qb_n)+(a_n+pb_n)\sqrt{q}$

よって，$a_{n+1}=pa_n+qb_n$，$b_{n+1}=a_n+pb_n$

条件より $a_1=p$，$b_1=1$

ここで，$(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$ を数学的帰納法により証明する。

〔I〕 $(p-\sqrt{q})^1=p-\sqrt{q}$ より $n=1$ のとき成り立つ。

〔II〕 $n=k$ のとき，$(p-\sqrt{q})^k=a_k-b_k\sqrt{q}$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のとき，

$(p-\sqrt{q})^{k+1}=(p-\sqrt{q})(p-\sqrt{q})^k$

$=(p-\sqrt{q})(a_k-b_k\sqrt{q})$

$=(pa_k+qb_k)-(a_k+pb_k)\sqrt{q}$

$=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{q}$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

〔I〕,〔II〕より，すべての自然数 n について，$(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$

(2) $(p+\sqrt{q})^n=a_n+b_n\sqrt{q}$，$(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$ から

$a_n=\frac{1}{2}\{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n\}$

$b_n=\frac{1}{2\sqrt{q}}\{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n\}$

p，q はともに正だから，$\left|\frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right|<1$

よって，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}\lim_{n\to\infty}\frac{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n}{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n}$

$=\sqrt{q}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}{1-\left(\frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}=\sqrt{q}$

③**6-C-5**

第 1 象限に，次の条件(A)，(B)，(C)を満たす円の列 C_1，C_2，…がある。

(A)　各 C_n は円 $C：x^2+(y-1)^2=1$ に外接し，x 軸に接している。

(B)　各 n について C_{n+1} は C_n に外接し，C_n の中心の x 座標は単調減少している。

(C)　C_1 の中心の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ である。

円 C_n の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の漸化式を求め，a_n，b_n を求めよ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_na_{n+1}}$ を求めよ。　　●中央大●

解 答　(1)　$\boldsymbol{a_n-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_na_{n+1}}$，$a_n=\dfrac{6}{3n+1}$，$b_n=\dfrac{9}{(3n+1)^2}$　　(2)　$\dfrac{1}{4}$

解き方　(1)

図 1

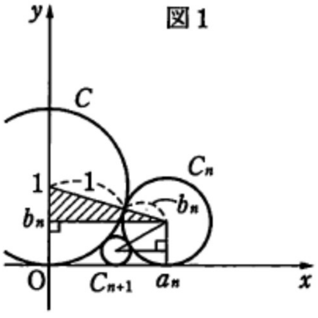


図 1 の斜線部分の直角三角形に三平方の定理を用いて，$a_n{}^2+(1-b_n)^2=(1+b_n)^2$

これより，$a_n{}^2=4b_n$ ……①

図 2

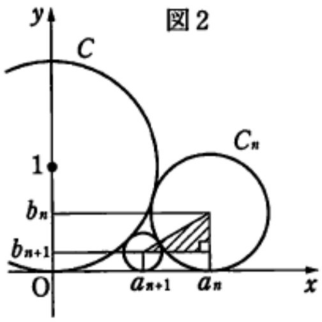


図 2 の斜線部分の直角三角形に三平方の定理を用いて，

$(b_n-b_{n+1})^2+(a_n-a_{n+1})^2=(b_n+b_{n+1})^2$

よって，$(a_n-a_{n+1})^2=4b_nb_{n+1}$ ……②

①，②より $(a_n-a_{n+1})^2=\dfrac{1}{4}a_n{}^2a_{n+1}{}^2$

$a_n-a_{n+1}>0$，$a_na_{n+1}>0$ から

$a_n-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_na_{n+1}$

両辺を a_na_{n+1} で割って $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は等差数列であり

$a_1=\dfrac{3}{2}$ だから，

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{2}{3}+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3n+1}{6}$$

したがって，$a_n=\dfrac{6}{3n+1}$

①より，$b_n=\dfrac{1}{4}a_n{}^2=\dfrac{9}{(3n+1)^2}$

(2)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}a_n{}^2}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4a_{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{6}{3n+1}}{\dfrac{24}{3n+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{n}}{12+\dfrac{4}{n}}=\frac{1}{4}$$

補章　数学Ⅲの極限の応用（２）★

正直，いろいろ入れ忘れてました。

《学習項目》

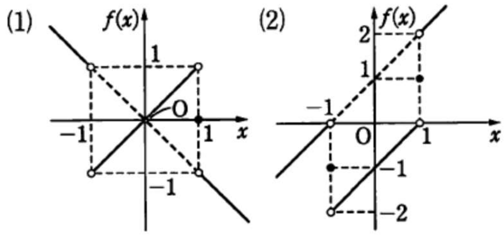
・極限の応用の中で，単なる数列の応用というわけでもないものが中心。雑多。

B 問題

③6-B-8

次の関数のグラフをかけ。ただし，n は整数とする。

(1)* $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{n+1}}{1+x^n}$　　(2) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n-1}{|x|^n+1}+x$　●埼玉大●



解答

(2) $|x|<1$ のとき，$f(x)=\frac{0-1}{0+1}+x=x-1$

解き方 (1) $|x|<1$ のとき，$f(x)=\frac{x}{1+0}=x$

$|x|>1$ のとき，$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{n-1}}-x}{\frac{1}{x^n}+1}=-x$

$x=1$ のとき，$f(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$

$x=-1$ のとき，$f(-1)$ は存在しない。

$|x|>1$ のとき，

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left|\frac{1}{x}\right|^n}{1+\left|\frac{1}{x}\right|^n}+x=x+1$

$x=1$ のとき，$f(1)=\frac{1-1}{1+1}+1=1$

$x=-1$ のとき，$f(-1)=\frac{1-1}{1+1}-1=-1$

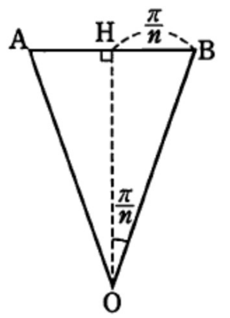
③6-B-9

n を３以上の自然数とする。周の長さが 2π である正 n 角形の面積を S_n とする。

(1) S_n を n を用いて表せ。　　(2) $\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

解答 (1) $S_n=\frac{\pi^2}{n\tan\frac{\pi}{n}}$　　(2) π

解き方 (1) 正 n 角形の 1 辺の長さは $\dfrac{2\pi}{n}$ だから，右図より



$$\tan\frac{\pi}{n}==\frac{\frac{\pi}{n}}{\mathrm{OH}}$$

よって，

$$\mathrm{OH}=\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}$$

よって，△OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi^2}{n^2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi}{n}}$$

よって，$S_n=n\left(\dfrac{\pi^2}{n^2}\cdot\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{n}}\right)=\dfrac{\pi^2}{n\tan\frac{\pi}{n}}$

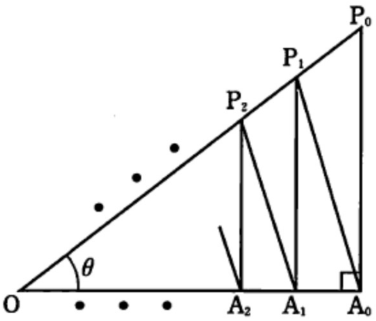
(2) $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ とすると，$S_n=\dfrac{\pi\theta}{\tan\theta}$

ここで，$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ より

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{\theta\to 0}\frac{\pi\theta}{\tan\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\pi\cos\theta\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}\right)=\pi$$

③ **6-B-10**

直角三角形 $\mathrm{A_0P_0O}$ の斜辺 $\mathrm{OP_0}$ 上に点の列 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，……，P_n，……を，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上に点の列 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，……，A_n，……を，それぞれ次のように定める。まず，$\mathrm{OP_1}=\mathrm{OA_0}$ とする。次に点 $\mathrm{P_1}$ から $\mathrm{OA_0}$ に下ろした垂線の足を $\mathrm{A_1}$ とする。次に $\mathrm{OP_2}=\mathrm{OA_1}$ とし，点 $\mathrm{P_2}$ から $\mathrm{OA_0}$ に下ろした垂線の足を $\mathrm{A_2}$ とする。以下，この操作を繰り返す。



$\angle\mathrm{P_0OA_0}=\theta$，$\mathrm{OA_0}=a$ とし，$\triangle\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の面積を S_n とする。

$S(\theta)=S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) S_1 を a と θ で表せ。　(2) $S(\theta)$ を a と θ で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。　●筑波大●

解答 (1) $\boldsymbol{S_1=\dfrac{1}{2}a^2\tan\theta(1-\cos\theta)}$　(2) $\boldsymbol{S(\theta)=\dfrac{a^2\tan\theta}{2(1+\cos\theta)}}$　(3) $\boldsymbol{\dfrac{a^2}{4}}$

(1)　$\tan\theta=\dfrac{A_0P_0}{OA_0}$ より

$A_0P_0=a\tan\theta$ ……①

$OA_0=OP_1=a$，$\cos\theta=\dfrac{OA_1}{OP_1}$ から

$OA_1=a\cos\theta$

よって，

$A_0A_1=OA_0-OA_1=a-a\cos\theta$ ……②

①，②から，

$$S_1=\frac{1}{2}A_0P_0\cdot A_0A_1$$
$$=\frac{1}{2}a^2\tan\theta(1-\cos\theta)$$

(2)　$\triangle OA_0P_0\backsim\triangle OA_1P_1$ であり，

$OA_1=a\cos\theta$ だから，相似比は $1:\cos\theta$

同様に，$\triangle OA_nP_n\backsim\triangle OA_{n+1}P_{n+1}$ で，相似比は $1:\cos\theta$

よって，$OA_n=a\cos^n\theta$，$OA_{n-1}=a\cos^{n-1}\theta$

$$A_{n-1}A_n=OA_{n-1}-OA_n=a\cos^{n-1}\theta-a\cos^n\theta$$
$$=a(1-\cos\theta)\cos^{n-1}\theta$$
$$A_{n-1}P_{n-1}=OA_{n-1}\tan\theta=a\cos^{n-1}\theta\tan\theta$$

よって，$S_n=\dfrac{1}{2}A_{n-1}P_{n-1}\cdot A_{n-1}A_n$

$$=\frac{1}{2}a^2\tan\theta(1-\cos\theta)\cos^{2(n-1)}\theta$$

————————————————————

ゆえに，数列 $\{S_n\}$ は初項 S_1，公比 $\cos^2\theta$ の等比数列である。$0<\cos^2\theta<1$ だから，$S(\theta)$ は収束し，その値は，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}a^2\tan\theta(1-\cos\theta)\cdot\frac{1}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{a^2\tan\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

別解　$\triangle A_{n-1}P_{n-1}P_n\backsim\triangle A_nP_nP_{n+1}$ であり，相似比は $1:\cos\theta$ から，面積比は $1:\cos^2\theta$ である。よって，数列 $\{S_n\}$ は初項 S_1，公比 $\cos^2\theta$ の等比数列である。

(3)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$

$$=\frac{a^2}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{(1+\cos\theta)\cos\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=\frac{a^2}{4}$$

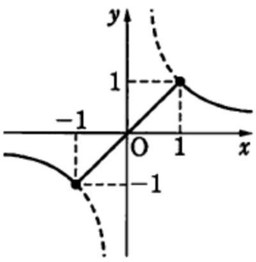
C 問題

③**6-C-6**

次の関数が x のすべての値に対して連続となるように，定数 a，b の値を定めよ。また，そのときの，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\quad(n\text{ は正の整数})$$　●静岡県立大●

$\boldsymbol{a=0,\ b=1}$



解答

$|x|<1$ のとき，$f(x)=ax^2+bx$

$|x|>1$ のとき，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

$x=1$ のとき，$f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}$

$x=-1$ のとき，$f(-1)=\dfrac{a-b-1}{2}$

よって，$x=\pm1$ で連続であればよいから，

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1),$$

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}f(x)=f(-1)$$

すなわち，

$$1=a+b=\frac{a+b+1}{2},$$

$$a-b=-1=\frac{a-b-1}{2}$$

この 2 式から，$a+b=1$，$a-b=-1$

よって，$a=0$，$b=1$

③**6-C-7**

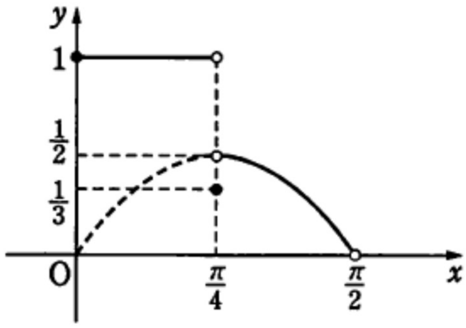
次の関数のグラフをかけ。

(1)　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^{2n+1}x-\tan^n x+1}{\tan^{2n+2}x+\tan^{2n}x+1}$ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$　●鹿児島大●

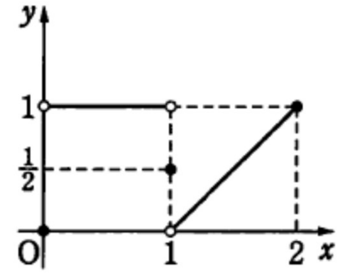
(2)　$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sin\pi x)^n+x-1}{(1+\sin\pi x)^n+1}$ $(0\leqq x\leqq2)$

解 答

(1)



(2)



③**6-C-8**

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}x+\cos(a+bx)}{x^{2n}+1}$ が x の連続関数となるように a，b の値を定めよ。ただし，$0\leqq a<2\pi$ とする。

解 答　$\boldsymbol{a=0,\ b=2k\pi}$ **または，** $\boldsymbol{a=\pi,\ b=(2k-1)\pi}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は整数)**

$|x|>1$ のとき，

$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\pi}{2}x$ ……①

$|x|<1$ のとき，$f(x)=\cos(a+bx)$ ……②

$x=1$ のとき，

$f(1)=\dfrac{1+\cos(a+b)}{2}$ ……③

$x=-1$ のとき，

$f(-1)=\dfrac{1+\cos(a-b)}{2}$ ……④

これらより $|x|<1$，$|x|>1$ では連続である。したがって，$x=\pm1$ で連続になるような a，b を求める。

$x=1$ で連続になるためには

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)=f(1)$$

①，②，③から，

$$1=\cos(a+b)=\frac{1+\cos(a+b)}{2}$$

よって，$\cos(a+b)=1$ から

$a+b=2m\pi$ (m は整数) ……⑤

$x=-1$ で連続になるためには

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}f(x)=f(-1)$$

①，②，④から，

$$\cos(a-b)=1=\frac{1+\cos(a-b)}{2}$$

よって，$\cos(a-b)=1$ から

$a-b=2l\pi$ (l は整数) ……⑥

⑤+⑥ より $a=(m+l)\pi$

ここで，$0\leqq a<2\pi$ より

数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ が条件：$2a_n{}^2=a_{n-1}+1,\ a_n>0$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たす。ただし，$0<a_0<1$ である。

(1) $0<a_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(2) $a_n=\cos\theta_n$ $\left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。θ_n と θ_{n-1} の関係式を導き，θ_n を θ_0 で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 4^n(1-a_n)$ を求めよ。

解答 (1)帰納法による。　(2) $\boldsymbol{\theta_n=\dfrac{1}{2}\theta_{n-1},\ \ \theta_n=\dfrac{1}{2^n}\theta_0}$　(3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\theta_0{}^2}$

2 (1) 〔Ⅰ〕 $n=1$ のとき

$2a_1{}^2=a_0+1$ より

$0<2a_1{}^2<2$　　よって，$0<a_1{}^2<1$

ここで，$a_1>0$ より $0<a_1<1$ となり，成り立つ。

〔Ⅱ〕 $n=k$ のとき $0<a_k<1$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき，$2a_{k+1}{}^2=a_k+1$ より

$0<2a_{k+1}{}^2<2$　　よって，$0<a_{k+1}{}^2<1$

ここで，$a_{k+1}>0$ より $0<a_{k+1}<1$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕より，すべての自然数 n について，$0<a_n<1$ は成り立つ。

解き方 (2) $2\cos^2\theta_n=\cos\theta_{n-1}+1$

ここで，$\cos^2\theta_n=\dfrac{1+\cos 2\theta_n}{2}$ から

$1+\cos 2\theta_n=\cos\theta_{n-1}+1$

$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ より，$2\theta_n=\theta_{n-1}$

よって，$\theta_n=\dfrac{1}{2}\theta_{n-1}=\dfrac{1}{2^2}\theta_{n-2}=\cdots\cdots=\dfrac{1}{2^n}\theta_0$

(3) (2)から，

$$4^n(1-a_n)=4^n(1-\cos\theta_n)=4^n\left(1-\cos\frac{\theta_0}{2^n}\right)$$

$$=\frac{4^n\left(1-\cos^2\dfrac{\theta_0}{2^n}\right)}{1+\cos\dfrac{\theta_0}{2^n}}=\frac{4^n\sin^2\dfrac{\theta_0}{2^n}}{1+\cos\dfrac{\theta_0}{2^n}}$$

ここで，$t=\dfrac{\theta_0}{2^n}$ とおくと

$$4^n\sin^2\frac{\theta_0}{2^n}=\frac{\theta_0{}^2}{t^2}\sin^2 t=\theta_0{}^2\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$

$n\to\infty$ のとき $t\to 0$ から

$$与式=\lim_{t\to 0}\theta_0{}^2\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\frac{1}{1+\cos t}=\frac{1}{2}\theta_0{}^2$$

第７章　数学Ⅲの微分

《学習項目》

・微分の定義

・微分公式　　基本関数の微分公式（7種），積の微分公式，商の微分公式，合成関数の微分公式，逆関数微分公式，パラメータ関数の微分公式，対数微分法

・$\dfrac{dy}{dx}$ は，1回微分までなら分数扱いできる。２回微分では分数扱いできない。

・接線問題の応用　：　共通接線，接線本数

A 問題

③**7-A-1**

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$　　(2)　$y=x^3\cos x$　　(3)　$x^2\log x$

(4)　$y=(x-2)e^x$　　(5)　$y=2^x\sin x$　　(6)　$y=\dfrac{e^x}{x}$

(7)　$y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　　(8)　$y=\sin(3x+2)$　　(9)　$y=\cos^3 x$

解答　(1)　$y'=-\dfrac{4}{3x^2\sqrt[3]{x}}$　(2)　$y'=3x^2\cos x-x^3\sin x$　(3)　$y'=2x\log x+x$

(4)　$y'=(x-1)e^x$　(5)　$y'=2^x(\log 2\cdot\sin x+\cos x)$　(6)　$y'=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

(7)　$y'=-\dfrac{1}{1+\sin x}$　(8)　$y'=3\cos(3x+2)$　(9)　$y'=-3\cos^2 x\sin x$

(1) 略

(2)

$$y'=(x^3)'\cos x+x^3(\cos x)'$$
$$=3x^2\cos x-x^3\sin x$$

(3)

$$y'=(x^2)'\log x+x^2(\log x)'$$
$$=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}$$
$$=2x\log x+x$$

(4)

$$y'=(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'$$
$$=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$$

(5)

$$y'=(2^x\log 2)\cdot\sin x+2^x\cos x$$
$$=2^x(\log 2\cdot\sin x+\cos x)$$

(6)

$$y'=\frac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

(7)

$$y'=\frac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$$
$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$
$$=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+\sin x}$$

(8)

$u=3x+2$ とおくと，$y=\sin u$ であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\cos u)\cdot 3=\mathbf{3\cos(3x+2)}$$

(9)

$u=\cos x$ とおくと，$y=u^3$ であるから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2(-\sin x)=\mathbf{-3\cos^2 x\sin x}$$

③**7-A-2**

(1)　曲線 $y=\log x$ 上の点 $\left(e^2, 2\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}\left(0, 1\right)$ における接線および法線の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=\sqrt{x+3}$ 上の点 $\left(1, 2\right)$ における接線と法線の方程式を求めよ。

(4)　曲線 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における法線の方程式を求めよ。

解答　(1) $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{e^2}x+1}$ (2) **接線** $\boldsymbol{y=x+1}$**，法線** $\boldsymbol{y=-x+1}$

(3)　**接線** $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}}$　　**法線** $\boldsymbol{y=-4x+6}$　(4) $y=\sqrt{3}x$

(1)

$y=f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

ゆえに，$f'(e^2)=\dfrac{1}{e^2}$ であるから，点 $(e^2,\ 2)$ における接線の方程式は，

$y-2=\dfrac{1}{e^2}(x-e^2)$　　すなわち $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{e^2}x+1}$

(2)

$y'=e^x$ であるから，

$x=0$ のとき $y'=1$

点A$(0,\ 1)$ における接線の方程式は，

$y-1=1\cdot(x-0)$　　$y=x+1$

法線の方程式は，$y=-x+1$

(4)　上半円の半径であることを利用する。

(3)

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$ であるから，$x=1$ のとき $y'=\dfrac{1}{4}$

よって，点 $(1,\ 2)$ における接線の方程式は，$y-2=\dfrac{1}{4}(x-1)$ より，$y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$

また，接線の傾きが $\dfrac{1}{4}$ であるから，法線の傾きは -4　　したがって，法線の方程式は，$y-2=-4(x-1)$ より，$y=-4x+6$

③**7-A-3**

x の関数 y が，θ を媒介変数として，次のように与えられているとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表せ。

(3)* $\begin{cases} x=2(\theta-\sin\theta) \\ y=2(1-\cos\theta) \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x=\cos^3\theta \\ y=\sin^3\theta \end{cases}$

解答　(3) $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}}$　　(4) $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=-\tan\theta}$

(3) $\dfrac{dx}{d\theta}=2(1-\cos\theta)$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\sin\theta$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

(4) $\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos^2\theta(\cos\theta)'=-3\sin\theta\cos^2\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta(\sin\theta)'=3\sin^2\theta\cos\theta$

よって，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\sin\theta\cos^2\theta}=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$

③**7-A-4**

次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1)　$x^3-3xy+y^3=1$　　(2)　$x=y\sqrt{1+y}$ $(y>0)$

解答　(1) $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}}$　　(2) $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{1+y}}{3y+2}}$

解き方 (1) 両辺を x で微分すると，

$3x^2-3(y+xy')+3y^2y'=0$

よって，$(x-y^2)y'=x^2-y$

ゆえに，$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$

(2) $\dfrac{dx}{dy}=\sqrt{1+y}+y\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+y}}=\dfrac{3y+2}{2\sqrt{1+y}}$

ゆえに，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{2\sqrt{1+y}}{3y+2}$

③$\boxed{\textbf{7-A-5}}$

対数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1)* $y=x^{\log x}$ $(x>0)$　　(2) $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$

解答 (1) $y'=(2\log x)x^{\log x-1}$　(2) $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\dfrac{1}{x}\sin x\right)$

(1) 両辺の対数をとると，

$\log y=\log x^{\log x}=\log x\cdot\log x=(\log x)^2$

両辺を x で微分すると，

$\dfrac{y'}{y}=2\log x\cdot\dfrac{1}{x}$

よって，

$y'=\dfrac{2y}{x}\log x=2x^{\log x}\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\log x$

$=(2\log x)x^{\log x-1}$

(2) 両辺の対数をとると，

$\log y=\log x^{\sin x}=\sin x\log x$

両辺を x で微分すると，

$\dfrac{y'}{y}=\cos x\log x+\sin x\cdot\dfrac{1}{x}$

よって，$y'=y\left(\cos x\log x+\dfrac{1}{x}\sin x\right)$

$=x^{\sin x}\left(\cos x\log x+\dfrac{1}{x}\sin x\right)$

③$\boxed{\textbf{7-A-6}}$

次の関数は，$x=1$ で連続であるか。また，$x=1$ で微分可能であるか。

(1) $f(x)=2x|x-1|+3$　　(2) $f(x)=|x-1|^3$

解答 **O** (1) $x=1$ で連続である。$x=1$ で微分可能ではない。　(2) $x=1$ で連続である。$x=1$ で微分可能である。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\{2x|x-1|+3\}=3$，

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\{2x|x-1|+3\}=3$ であるから，$f(x)$ は $x=1$ で連続である。

次に，$f(x)=\begin{cases}2x^2-2x+3 & (x\geqq1)\\ -2x^2+2x+3 & (x<1)\end{cases}$

であるから，

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{2h(1+h)}{h}=2$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-2h(1+h)}{h}=-2$$

よって，$f'(1)$ は存在しないから，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能ではない。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}|x-1|^3=0$，

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}|x-1|^3=0$ であるから，

$f(x)$ は $x=1$ で連続である。

次に，$f(x)=\begin{cases}(x-1)^3 & (x\geqq1)\\ -(x-1)^3 & (x<1)\end{cases}$ であるから，

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to+0}h^2=0$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h^3}{h}=\lim_{h\to-0}(-h^2)=0$$

よって，$f'(1)$ が存在するから，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能である。

B 問題

③7-B-1

原点から曲線 $y=\dfrac{e^x}{x}$ に引いた接線の方程式を求めよ。 202(2)

解答 $y=\dfrac{e^2}{4}x$

(2) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

接点を $\left(a,\ \dfrac{e^a}{a}\right)$ とすると，接線の傾きは

$$f'(a)=\frac{e^a(a-1)}{a^2}$$

よって，接線の方程式は

$$y-\frac{e^a}{a}=\frac{e^a(a-1)}{a^2}(x-a)\ \cdots\cdots①$$

これが原点を通ることから

$\dfrac{e^a}{a}(a-2)=0$ 　　$a=2$

これを①に代入すると，$y=\dfrac{e^2}{4}x$

③7-B-2

(1)* 曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 上の点Ｐにおける接線の傾きが１になるとき，Ｐの y 座標を求めよ。

(2) 曲線 $y=\log x+a$ （a は定数）に原点から接線を引いたとき，接点Ｔの座標を求めよ。

解答 (1) $\sqrt{2}$ 　(2) $\mathrm{T}(e^{1-a},\ 1)$

(1) $y'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

Ｐの x 座標を t とすると，

条件より $\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})=1$

よって，$e^{2t}-2e^t-1=0$

$e^t>0$ であるから，$e^t=1+\sqrt{2}$

よって，求めるＰの y 座標は，

$$\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$$

(2) Ｔの x 座標を t とすると，$y'=\dfrac{1}{x}$ より，

接線の方程式は，$y-(\log t+a)=\dfrac{1}{t}(x-t)$

これが原点を通るとき，$\log t+a=1$ より，

$t=e^{1-a}$

よって，$\mathrm{T}(e^{1-a},\ 1)$

③7-B-3

媒介変数 t で表された曲線 $x=2(t-\sin t)$，$y=2(1-\cos t)$ について，$t=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

解答 $y=(2+\sqrt{3})x-\dfrac{(2+\sqrt{3})}{3}\pi+4$

$$\frac{dx}{dt}=2(1-\cos t),\ \frac{dy}{dt}=2\sin t \text{ より，}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t} \qquad t=\frac{\pi}{6} \text{ のとき，}$$

$$x=\frac{\pi}{3}-1,\ y=2-\sqrt{3},\ \frac{dy}{dx}=2+\sqrt{3}$$

よって，接線の方程式は，

$$y-(2-\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})\left\{x-\left(\frac{\pi}{3}-1\right)\right\}$$

$$y=(2+\sqrt{3})x-\frac{(2+\sqrt{3})}{3}\pi+4$$

③$\boxed{\text{7-B-4}}$

次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=10$，A(27，1)　　(2)　$x^2+3xy-y^2=3$，A(1，2)

解 答　(1)　$y=-\frac{1}{3}x+10$　　(2)　$y=8x-6$

(1)　方程式の両辺を x で微分すると　$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$

ゆえに，$x\fallingdotseq 0$　のとき　$y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

よって，点 (27，1) における接線の傾きは　$-\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}$

したがって，求める接線の方程式は $y-1=-\frac{1}{3}(x-27)$　すなわち　$y=-\frac{1}{3}x+10$

(2)　方程式の両辺を x で微分すると　$2x+3y+3xy'-2yy'=0$

ゆえに，$3x-2y\fallingdotseq 0$　のとき　$y'=-\frac{2x+3y}{3x-2y}$

よって，点 (1，2) における接線の傾きは　$-\frac{2\cdot1+3\cdot2}{3\cdot1-2\cdot2}=8$

したがって，求める接線の方程式は $y-2=8(x-1)$　すなわち　$y=8x-6$

③$\boxed{\text{7-B-5}}$

曲線 $y=e^{-x^2}$ に x 軸上の点 $(a,\ 0)$ から接線を引く。

(1)　異なる 2 本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよ。

(2)　ただ 1 本の接線が引けるときの a の値，および接点の座標を求めよ。

解 答 (1)　$a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a$　(2)　$a=\sqrt{2}$ のとき，接点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$　$a=-\sqrt{2}$ のとき，接点$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ e^{-\frac{1}{2}}\right)$

$y'=-2xe^{-x^2}$

接点を $(t,\ e^{-t^2})$ とおくと，接線の方程式は，

$y-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(x-t)$

これが点 $(a,\ 0)$ を通るとき，

$-e^{-t^2}=-2te^{-t^2}(a-t)$

$e^{-t^2}\neq 0$ より，$2t^2-2at+1=0$ ……①

(1) 異なる２本の接線が引けるためには，

①が異なる２つの実数解をもてばよいから，

判別式 $\dfrac{D}{4}=a^2-2>0$ より，

$a<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<a$

(2) ただ１本の接線が引けるのは，①が重解をもつときであるから，

$D=0$ より $a=\pm\sqrt{2}$

これらを①に代入すると，

$a=\sqrt{2}$ のとき，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$a=-\sqrt{2}$ のとき，$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

これらを $(t,\ e^{-t^2})$ に代入して求める。

③**7-B-6**

(1) $y=\log x$ と $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ のグラフが共有点をもち，この点で共通の接線をもつとき，a の値とその共通接線の方程式を求めよ。

(2)* ２曲線 $y=2\sin x$，$y=a-\cos 2x$ が接するように，定数 a の値を定めよ。ただし，$0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。

解答 (1) $a=\dfrac{1}{2e}$，共通接線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{e}}x-\dfrac{1}{2}$　(2) $a=-3,\ 1,\ \dfrac{3}{2}$

(1) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$，$(ax^2)'=2ax$ より，

共有点の x 座標を t とすると，

$\log t=at^2$ かつ $\dfrac{1}{t}=2at$

この２式より，a を消去すると，

$\log t=\dfrac{1}{2}$　よって，$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

このとき，$a=\dfrac{1}{2e}$

よって，接点は $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で，共通接線を

$y=\log x$ の接線として求めると，

$y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})$ より，

$y=\dfrac{1}{\sqrt{e}}x-\dfrac{1}{2}$

(2) $y=2\sin x$ について，$y'=2\cos x$

$y=a-\cos 2x$ について，$y'=2\sin 2x$

２曲線が接するとき，２曲線はその接点において共通接線をもつから，接点の x 座標を t とすると，

$2\sin t=a-\cos 2t$ ……①

かつ $2\cos t=2\sin 2t$ ……②

②より，$\cos t(2\sin t-1)=0$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ で，$\cos t=0$ または $\sin t=\dfrac{1}{2}$

よって，$t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

これらを①に代入する。

③**7-B-7**

２つの曲線 $y=e^x$，$y=\log x+2$ に共通な接線の方程式を求めよ。

解答 $y=x+1$，$y=ex$

$f(x)=e^x$，$g(x)=\log x+2$ とおくと　$f'(x)=e^x$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$

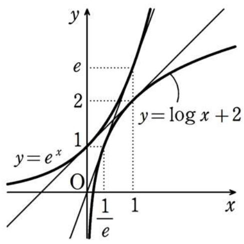
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(p,\ e^p)$ における接線の方程式は　$y=e^px+e^p(1-p)$　…… ①

曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(q,\ \log q+2)$ における接線の方程式は　$y=\dfrac{1}{q}x+\log q+1$　…… ②

①，② が一致するための条件は　$e^p=\dfrac{1}{q}$　…… ③，　$e^p(1-p)=\log q+1$　…… ④

③ から $q=e^{-p}$，④ に代入して　ゆえに $(e^p-1)(1-p)=0$ より $p=0,\ 1$

よって，求める接線の方程式は，① から $y=x+1$，$y=ex$



③**7-B-8**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{x\to+0}\dfrac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}$　　(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

解答 (1) **1**　(2) **1**

(1) $x\to+0$ より $x^2<x$　また，

$(\sin x)'=\cos x$ から平均値の定理により，

$\dfrac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\cos c$ $(x^2<c<x)$

ここで，$\lim_{x\to+0}x^2=0$，$\lim_{x\to+0}x=0$ より，

$\lim_{x\to+0}c=0$ から

$\lim_{x\to+0}\dfrac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\lim_{x\to+0}\cos c=1$

(2) は略

③**7-B-9**

(1)* $x=\sin y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

●東京電機大●

(2) $x=\tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の関数として表せ。

●信州大●

解答 (1) $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$　(2) $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}}$

(1) $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos y>0$

よって，$\dfrac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$

ゆえに，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos y\neq0$ である

から，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{1+x^2}$

③**7-B-10**

次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y=e^{3x}$　(2)* $y=xe^x$　(3) $y=\dfrac{1}{x}$

解答 (1) $\boldsymbol{y^{(n)}=3^n e^{3x}}$　(2) $\boldsymbol{y^{(n)}=(n+x)e^x}$　(3) $\boldsymbol{y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}}$

解法：具体化＞＞推定＞＞帰納法

③**7-B-11**

198* a を実数とし，区間 $(-1,\ \infty)$ において関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & (-1<x\leqq 0\ のとき)\\ ax & (0<x\ のとき)\end{cases}$$

ただし，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるものとする。

(1)　a を求めよ。

(2)　導関数 $f'(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ。

解答　(1)　$a=1$　(2)下参照

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{\dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}=1$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{ah-0}{h}=a$$

条件より $f(x)$ は $x=0$ で微分可能だから

$a=1$

(2)　$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ とすると

$$y'=\frac{(x)'\sqrt{1-x^2}-x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$=\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\ より$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} & (-1<x\leqq 0)\\ 1 & (0<x)\end{cases}$$

これより

$$\lim_{h\to-0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{\dfrac{1}{(1-h^2)\sqrt{1-h^2}}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{1-(1-h^2)\sqrt{1-h^2}}{h(1-h^2)\sqrt{1-h^2}}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{1-(1-h^2)^3}{h(1-h^2)\sqrt{1-h^2}\{1+(1-h^2)\sqrt{1-h^2}\}}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{h(3-3h^2+h^4)}{(1-h^2)\sqrt{1-h^2}\{1+(1-h^2)\sqrt{1-h^2}\}}=0$$

……①

また，

$$\lim_{h\to+0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{1-1}{h}=0\ \text{……②}$$

①，②より $f''(0)=0$ となり，

$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

C 問題

③**7-C-1**

次の，微分法の基本公式を証明せよ。

(1) $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ （積の微分法）

(2) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ （商の微分法）

(3) $(x^n)'=nx^{n-1}$ （n は整数）（x^n の導関数）

(4) n 整数のとき，$\left[\left\{f(x)\right\}^n\right]'=n\left\{f(x)\right\}^{n-1}\cdot f'(x)$

解 答

〔(1)の証明〕 $F(x)=f(x)g(x)$ とおき，x の増分を $\Delta x=h$ とすると，

$$F(x+h)-F(x)=f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)$$
$$=\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}$$

$f(x)$，$g(x)$ は微分可能だから，$f(x)$，$g(x)$ は連続で，$\lim_{h\to0}g(x+h)=g(x)$ であるから，

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

〔(2)の証明〕 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおき，x の増分を $\Delta x=h$ とすると，

$$F(x+h)-F(x)=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$
$$=\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{g(x+h)g(x)}$$

$f(x)$，$g(x)$ は微分可能だから，$f(x)$，$g(x)$ は連続で，$\lim_{h\to0}g(x+h)=g(x)$ であるから，

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$
$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

〔(3)の証明〕 n を正の整数とし，$f(x)=x^n$ とおくと，

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

ここで，二項定理により，

$$(x+h)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-1}+h^n$$

x^n を移項して，両辺を h で割ると，

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}={}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}h+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1}$$

よって，

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}={}_nC_1x^{n-1}=nx^{n-1}$$

よって，n が正の整数のとき，$(x^n)'=nx^{n-1}$ は成り立つ。

次に，n が負の整数のとき，$n=-m$（m は正の整数）とおくと，

$$(x^n)'=(x^{-m})'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{(x^m)'}{(x^m)^2}$$

〔公式(2)より〕

$$=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$

ゆえに，n が負の整数のときにも $(x^n)'=nx^{n-1}$ は成り立つ。

さらに，$n=0$ のとき，$(x^n)'=(x^0)'=(1)'=0$ より，このときも $(x^n)'=nx^{n-1}$ は成り立つ。

以上から，n が整数のとき $(x^n)'=nx^{n-1}$ は成り立つ。

(4)

$y=\{f(x)\}^n$ とする。$u=f(x)$ とおくと，$y=u^n$

これより，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\cdot f'(x)$$
$$=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$$

すなわち，$[\{f(x)\}^n]'=n\{f(x)\}^{n-1}\cdot f'(x)$

③**7-C-2**

関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)$ に対して $g(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)$ とし，$g(x)$ の逆関数を $h(x)$ とする。

(1) $g(x)$ を求めよ。　　(2) $h(x)$ を求めよ。

(3) $\dfrac{d}{dx}h(x)$ を求めよ。　　(4) $(x^2+1)\dfrac{d^3}{dx^3}h(x)+3x\dfrac{d^2}{dx^2}h(x)$ を求めよ。

解答 (1) $\boldsymbol{g(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)}$　(2) $\boldsymbol{h(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})}$

(3) $\boldsymbol{\dfrac{d}{dx}h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$　(4) $\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

(1) $g(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)$

(2) $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)$ とおくと，$2y=e^x-\dfrac{1}{e^x}$

これから $e^{2x}-2ye^x-1=0$ を解いて

$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$

ここで $e^x>0$ より $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$

両辺の対数をとると $x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$

これから $h(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

(3) $$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(4) $$\frac{d^2}{dx^2}h(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=-x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$
$$\frac{d^3}{dx^3}h(x)=-(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}-x\left\{-\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right\}$$
$$=\frac{-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}+\frac{3x^2}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{-x^2-1+3x^2}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

これらより

与式
$$=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}+\frac{-3x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{-(x^2+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

③**7-C-3**

関数 $f(\theta)=a\cos^3\theta+b\cos^2\theta-12\cos\theta+5$ $(0<\theta<\pi)$ が

$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{3}}=3\sqrt{3}$ を満たすとき，a と b の値を求めよ。

解答 $\boldsymbol{a=8,\ \ b=0}$

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=0$ より

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}} f(\theta)=0$ でなければならない。

よって，$a\left(\frac{1}{2}\right)^3+b\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\times\frac{1}{2}+5=0$

$a=8-2b$　　これを条件式に代入して

$$3\sqrt{3}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{(8-2b)\cos^3\theta+b\cos^2\theta-12\cos\theta+5}{\theta-\frac{\pi}{3}}$$

ここで $\theta\to\frac{\pi}{3}$ のとき $\cos\theta\to\frac{1}{2}$ より分子は $2\cos\theta-1$ を因子にもつ。

$$(8-2b)\cos^3\theta+b\cos^2\theta-12\cos\theta+5$$
$$=(2\cos\theta-1)\{(4-b)\cos^2\theta+2\cos\theta-5\}$$
……①

$(8-2b)\cos^3\theta+b\cos^2\theta-12\cos\theta+5$
$=(2\cos\theta-1)\{(4-b)\cos^2\theta+2\cos\theta-5\}$
……①

$g(\theta)=2\cos\theta$ とおくと，

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{3}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{g(\theta)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta-\frac{\pi}{3}}=g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=-2\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\ \cdots\cdots②$$

①，②から

$$3\sqrt{3}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos\theta-1}{\theta-\frac{\pi}{3}}\{(4-b)\cos^2\theta+2\cos\theta-5\}$$
$$=-\sqrt{3}\left\{(4-b)\cdot\frac{1}{4}+1-5\right\}=3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}b$$

これより $b=0$　　よって $a=8$

③**7-C-4**

関数 $f(x)$ はすべての実数 s，t に対して

$$f(s+t)=f(s)e^t+f(t)e^s$$

を満たし，さらに $x=0$ では微分可能で $f'(0)=1$ とする。

(1)　$f(0)$ を求めよ。　　(2)　$\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$ を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを，微分の定義に従って示せ。さらに $f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

解答　(1)　$f(0)=0$　　(2)　$\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$　(3)　証明略。$f'(x)=f(x)+e^x$

解き方　(1)　$s=0$，$t=0$ を代入して

$f(0)=f(0)+f(0)$

これより $f(0)=0$

(2)　(1)より

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=f'(0)=1$$

(3)　$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)e^h+f(h)e^x-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{f(x)\cdot\frac{e^h-1}{h}+e^x\cdot\frac{f(h)}{h}\right\}$$

ここで $\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$，および，(2)より

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)+e^x$$

ゆえに，$f(x)$ はすべての x で微分可能であり，$f'(x)=f(x)+e^x$ が成り立つ。

③**7-C-5**

x の関数 yが，θ を媒介変数として，$x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ と表されるとき，$\frac{dy}{dx}$，および$\frac{d^2y}{dx^2}$ を θ の関数として表せ。

解答　$\frac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sin\theta$ ， $\dfrac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$

よって　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\dfrac{d\theta}{dx}$

$$=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}\downarrow$$

$$=\frac{\sin\theta\cdot\sin\theta-(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

③**7-C-6**

次の関数 $f(x)$ について，$x=0$ で連続であるが，微分可能でないことを示せ。

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\quad(x\fallingdotseq 0),\ f(0)=0$$

解答

$0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq1$ であるから　$0\leqq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$

$\displaystyle\lim_{x\to0}|x|=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$ より，$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

また　$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\sin\dfrac{1}{h}$

$h\longrightarrow0$ のとき，$\sin\dfrac{1}{h}$ は一定の値に収束しないので，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ すなわち

$f'(0)$ は存在しない。　したがって，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

微分計算

③7-K-1

次の関数を微分せよ。

(1)* $y=\sqrt{(3x^2-2)^3}$　(2) $y=(x+1)\sqrt{x^2+1}$　(3)* $y=x^2\sqrt{2-x}$

(4)* $y=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$　(5)* $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$　(6) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$

(7) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x}}$　(8) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{(x-1)^2}$　(9) $y=\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

解答

(1) $y'=9x\sqrt{3x^2-2}$

(2) $y'=\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $y'=-\dfrac{x(5x-8)}{2\sqrt{2-x}}$

(4) $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$

(5) $y'=-\dfrac{2}{3(2x-1)\sqrt[3]{2x-1}}$

(6) $y'=\dfrac{x^3-3x}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

(7) $y'=-\dfrac{x^2+2x-1}{2(x^2-x)\sqrt{(x+1)(x^2-x)}}$

(8) $y'=-\dfrac{x^2+x+4}{(x-1)^3\sqrt{x^2+2}}$

(9) $y'=4x-\dfrac{2(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$

③7-K-2

次の関数を微分せよ。

(1)* $y=\sin^5 4x$　(2)* $y=\tan^2 x^2$　(3) $y=\sin^2(1+x^2)$

(4)* $y=\cos^4 x^3$　(5) $y=x^2\tan^3 x$　(6)* $y=x^2\cos^3 2x$

(7)* $y=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$　(8)* $y=\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$　(9) $y=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

解答

(1) $y'=10\sin^3 4x\sin 8x$

(2) $y'=\dfrac{4x\tan x^2}{\cos^2 x^2}$

(3) $y'=2x\sin\{2(1+x^2)\}$

(4) $y'=-6x^2\sin 2x^3\cos^2 x^3$

(5) $y'=x\tan^2 x\left(2\tan x+\dfrac{3x}{\cos^2 x}\right)$

(6) $y'=2x\cos^3 2x-3x^2\cos 2x\sin 4x$

(7) $y'=\dfrac{\sin x+x}{1+\cos x}$

(8) $y'=\dfrac{2+\sin x}{(1-\sin x)^2}$

(9) $y'=-\dfrac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$

③7-K-3

次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log|\sin x|$　(2) $y=e^{\sin(x+1)}$　(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(4) $y=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$　(5) $y=\log\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$　(6) $y=\{\log(\sqrt{x}+1)\}^2$

(7) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$

解 答

(1) $y'=\dfrac{1}{\tan x}$

(2) $y'=e^{\sin(x+1)}\cdot\cos(x+1)$

(3) $y'=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$　(4) $y'=\dfrac{2}{1-x^2}$

(5) $y'=\dfrac{1}{\cos x}$　(6) $y'=\dfrac{\log(\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}}$　(7) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

③**7-K-4**

対数を利用して，次の関数を微分せよ。

(1)* $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ $(x>0)$　(2) $y=(\log x)^{\tan x}$ $(x>1)$

解 答

(1) $y'=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}\left(\log\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{x}\right)$

(2) $y'=(\log x)^{\tan x}\left\{\dfrac{\log(\log x)}{\cos^2 x}+\dfrac{\tan x}{x\log x}\right\}$

③**7-K-5**

関数 $f(x)=xe^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき，$f^{(n)}(a_n)=0$ を満たす a_n を求めよ。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{n}$ の和を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ の和を求めよ。　●島根大●

解 答　(1) $a_n=n$　(2) $\dfrac{1}{e-1}$　(3) $\dfrac{e}{(e-1)^2}$

(1) $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$f'''(x)=e^{-x}-(x-2)e^{-x}=(3-x)e^{-x}$

これらから，$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{-x}$ と推測される。

これを数学的帰納法により証明する。

〔Ｉ〕 $n=1$ のとき，成り立つ。

〔II〕 $n=k$ のとき，成り立つと仮定すると

$f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{-x}$

両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=(-1)^ke^{-x}-(-1)^k(x-k)e^{-x}\\&=(-1)^{k+1}\{(x-k)-1\}e^{-x}\\&=(-1)^{k+1}\{x-(k+1)\}e^{-x}\end{aligned}$$

これより $n=k+1$ のときも成り立つ。

〔Ｉ〕,〔II〕から，すべての自然数 n について，$f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)e^{-x}$ は成り立つ。

したがって，$f^{(n)}(a_n)=0$ から $a_n=n$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a_n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(a_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{e^k}$$

ここで $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{e^k}$ とおくと

$$S_n=\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}+\frac{3}{e^3}+\cdots\cdots+\frac{n}{e^n}\ \cdots\cdots①$$

両辺に $\frac{1}{e}$ を掛けて

$$\frac{1}{e}S_n=\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^3}+\frac{3}{e^4}+\cdots\cdots+\frac{n}{e^{n+1}}\ \cdots\cdots②$$

①－②より

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{e}\right)S_n&=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{e^n}-\frac{n}{e^{n+1}}\\&=\frac{1}{e}\left(\frac{1-\frac{1}{e^n}}{1-\frac{1}{e}}\right)-\frac{n}{e^{n+1}}\\&=\frac{1}{e-1}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)-\frac{n}{e^{n+1}}\end{aligned}$$

すなわち，$\frac{e-1}{e}S_n=\frac{1}{e-1}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)-\frac{n}{e^{n+1}}$

$$S_n=\frac{e}{(e-1)^2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)-\frac{1}{e-1}\cdot\frac{n}{e^n}\ \cdots\cdots③$$

$e=2.71\cdots\cdots$ より $e^n>2^n$

これより $0<\frac{n}{e^n}<\frac{n}{2^n}$ ……④

ここで，$2^n=(1+1)^n$

$={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+C_n$

$2^n>{}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$

これと④より

$0<\frac{n}{e^n}<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$ より $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=0$

よって，③より

与式$=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{e}{(e-1)^2}$

補充問題

③**7-K-6**

x 軸上の点A$(a,\ 0)$から，関数 $y=f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x+1}}$ のグラフに異なる２本の接線が引けるとき，定数 a の範囲を求めよ。　●群馬大●

解答　$a<-19$

$f'(x)=\dfrac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$ より，

点$(t,\ f(t))$における接線の方程式は，

$y-\dfrac{t+3}{\sqrt{t+1}}=\dfrac{t-1}{2(t+1)\sqrt{t+1}}(x-t)$

この直線が点$(a,\ 0)$を通るから，代入して，

$-\dfrac{t+3}{\sqrt{t+1}}=\dfrac{t-1}{2(t+1)\sqrt{t+1}}(a-t)$

分母を払って整理すると，

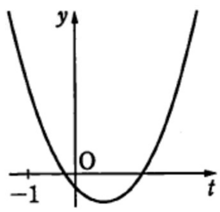
$t^2+(a+9)t+6-a=0$

この２次方程式が $t>-1$ で異なる２つの実数解をもつような a の値の範囲を求めればよい。

$g(t)=t^2+(a+9)t+6-a$ とおくとき，

$y=g(t)$ のグラフが右図のように $t>-1$ で t 軸と２つの交点をもつための条件は，軸の方程式が

$t=-\dfrac{a+9}{2}$ より，



$$\begin{cases} \text{判別式 } D>0 \ \cdots\cdots ① \\ \dfrac{-a-9}{2}>-1 \ \cdots\cdots ② \\ g(-1)>0 \ \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①より，$D=(a+19)(a+3)>0$ から，

$a<-19,\ -3<a$

②より，$a<-7$　　③より，$a<-1$

以上を同時に満たす a の値の範囲は，$a<-19$

③**7-K-7**

k を正の定数とする。２つの曲線 C_1：$y=\log x$, C_2：$y=e^{kx}$ に対して，原点Oから曲線 C_1 に引いた接線が，C_2 にも接するような k の値を求めよ。　●愛媛大●

解答　$k=\dfrac{1}{e^2}$

解き方　曲線 C_1 上の点$(a,\ \log a)$における接線の方程式は $y-\log a=\dfrac{1}{a}(x-a)$ ……①

①は原点を通るから，$-\log a=-1$ より

$a=e$ ……②

曲線 C_2 上の点$(b,\ e^{kb})$における接線の方程式は

$y-e^{kb}=ke^{kb}(x-b)$ ……③

③は原点を通るから，$-e^{kb}=-kbe^{kb}$ より

$kb=1$ ……④

また，①，③は同一直線だから

$\dfrac{1}{a}=ke^{kb}$ ……⑤

⑤に②，④を代入して $k=\dfrac{1}{e^2}$

第８章　数学Ⅲのグラフ

《学習項目》

・基本的な関数のグラフ
・増減，極値
・凹凸・変曲点
・グラフの対称性（偶関数・奇関数）
・関数の周期性
・漸近線　（タテ・ヨコ・ナナメ）
・パラメータ関数のグラフ
・グラフ予想図
　　二乗⇒負でも正になる。交点が接点になる。
　　和のグラフ⇒一方に他方を乗せる・ケズる。
　　積のグラフ⇒ゼロ点，軸との上下，端点に着目

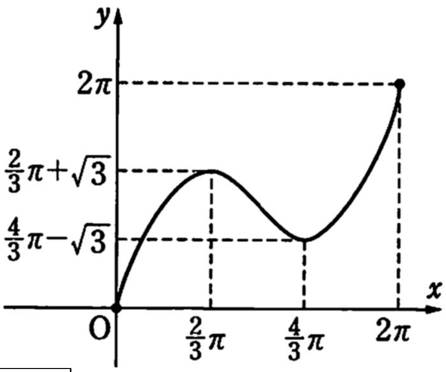
A 問題

③**8-A-1**

次の関数のグラフをかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

$$y = x + 2\sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

解 答



(1)　$y'=1+2\cos x$

$y'=0$ より，$\cos x=-\frac{1}{2}$ $(0<x<2\pi)$

よって，$x=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

x	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	$\frac{4}{3}\pi$	…	2π
y'		+	0	−	0	+	
y	0	↗	極大	↘	極小	↗	2π

極大値 $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ $\left(x=\frac{2}{3}\pi \text{ のとき}\right)$

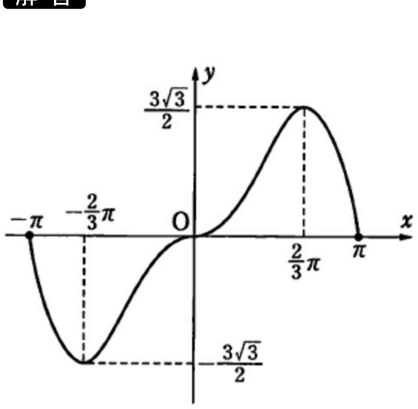
極小値 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ $\left(x=\frac{4}{3}\pi \text{ のとき}\right)$

③**8-A-2**

次の関数のグラフをかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

$$f(x) = 2\sin x - \sin 2x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

解 答



$f(-x)=-f(x)$ が成り立つから，$f(x)$ は奇関数でグラフは原点に関して対称である。

$$f'(x)=2\cos x-2\cos 2x$$
$$=-2(2\cos x+1)(\cos x-1)$$

$f'(x)=0$ $(-\pi<x<\pi)$ より，$x=0,\ \pm\frac{2}{3}\pi$

x	$-\pi$	…	$-\frac{2}{3}\pi$	…	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$f'(x)$		−	0	+	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

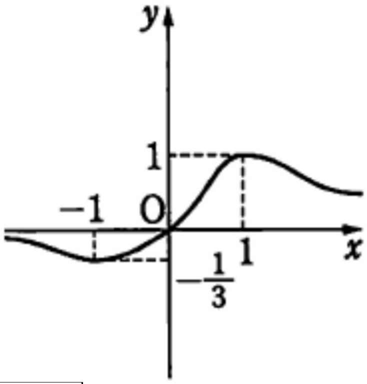
B 問題

③**8-B-1**

次の関数のグラフをかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

$$y=\frac{x}{x^2-x+1}$$

解 答



) 分母 $=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ より，

すべての実数 x で y は連続。原点を通る。

$$y'=\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-\frac{1}{3}$	↗	極大 1	↘

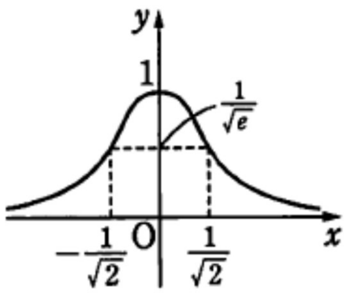
$\lim_{x\to\pm\infty} y=0$ より，x 軸は漸近線。

③**8-B-2**

次の関数の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

$y=e^{-x^2}$

解 答



y は偶関数であるから，グラフは y 軸に関して対称である。

$y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘

$\lim_{x\to\pm\infty} y=0$ より，x 軸は漸近線。

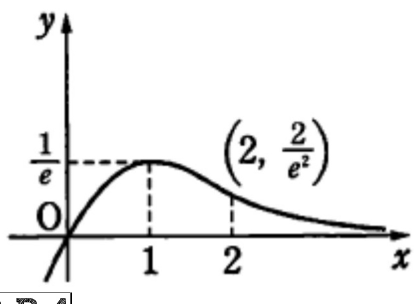
変曲点は $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

③**8-B-3**

次の関数の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

$y=xe^{-x}$ （必要ならば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ を用いてよい。）

解 答



) $y'=(1-x)e^{-x}$，$y''=(x-2)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ より，x 軸は漸近線。

$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{t\to\infty}(-t)e^t=-\infty$

変曲点は $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$

③**8-B-4**

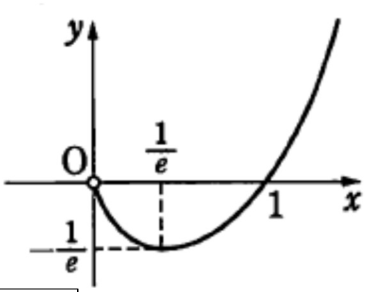
次の関数の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

$y=x\log x$ （必要ならば，$\lim_{x\to+0} x\log x=0$ を用いてよい。）

解 答

）定義域は，真数条件より $x>0$

$y'=\log x+1$，$y''=\dfrac{1}{x}$



$y'=0$ より $\log x=-1$　よって，$x=\dfrac{1}{e}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y''	／	$+$	$+$	$+$
y	／	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

ここで，$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0} x\log x=0$

③**8-B-5**

関数 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解答　**最大値 $\sqrt{2}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{ のとき}\right)$　最小値 -1 ($x=-1$ のとき)**

$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ の定義域は，$1-x^2\geqq 0$ より，

$-1\leqq x\leqq 1$

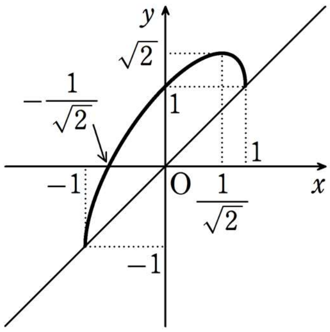
$f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$ を満たす x は，$\sqrt{1-x^2}-x=0$ より，

$\sqrt{1-x^2}=x$　よって，$x\geqq 0$ であるから，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	極大 $\sqrt{2}$	↘	1



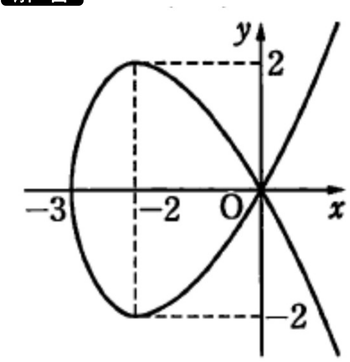
③**8-B-6**

次の関数の増減麻，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

$y^2=x^2(x+3)$

Hint　$y=\pm x\sqrt{x+3}$ と変形

解答



与式を y について解くと，$y=\pm x\sqrt{x+3}$ より，グラフは x 軸に関して対称である。

よって，$y=x\sqrt{x+3}$ のグラフを考える。

$y=x\sqrt{x+3}$ の定義域は $x\geqq -3$

$y'=\sqrt{x+3}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$y''=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}-\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+3}}}{x+3}$

$=\dfrac{3(x+4)}{4(x+3)\sqrt{x+3}}$

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y''	／	$+$	$+$	$+$
y	0	↘	極小 -2	↗

$\lim_{x\to-3+0} y'=-\infty$ より，曲線は直線 $x=-3$ と点 $(-3,\ 0)$ で接する。また，$\lim_{x\to\infty} y=\infty$

③**8-B-7**

次の関数の最大値最小値を求めよ。

$f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$

解答　**最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ $\left(x=\dfrac{3}{2}\text{ のとき}\right)$，最小値 0 ($x=0$，2 のとき)**

定義域は $x(2-x)\geqq 0$ より，$0\leqq x\leqq 2$

$$f'(x)=\frac{-2x^2+3x}{\sqrt{x(2-x)}}=\frac{-2x\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{x(2-x)}}$$

$f'(x)=0$ より，$x=\frac{3}{2}$

x	0	…	$\frac{3}{2}$	…	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

③ 8-B-8

関数 $y=\frac{x(x-6)}{x-8}$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。

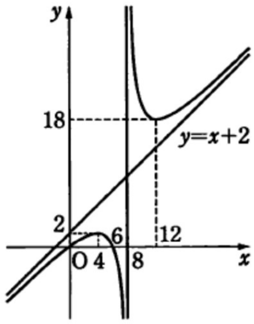
解 答

$y=x+2+\frac{16}{x-8}$ より，

$y'=\frac{(x-4)(x-12)}{(x-8)^2}$，$y''=\frac{32}{(x-8)^3}$

よって，y の増減，凹凸は次の表のようになる。

x	…	4	…	8	…	12	…
y'	+	0	−		−	0	+
y''	−	−	−		+	+	+
y	↗	極大 2	↘		↘	極小 18	↗



$\lim\limits_{x\to 8-0} y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 8+0} y=\infty$ より，直線 $x=8$ は漸近線である。

$\lim\limits_{x\to\infty}\{y-(x+2)\}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\{y-(x+2)\}=0$ より，直線 $y=x+2$ も漸近線である。

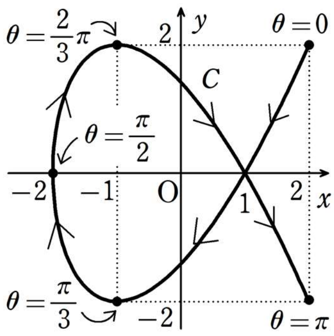
③ 8-B-9

xy 平面上に $x=2\cos 2\theta$，$y=2\cos 3\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ と媒介変数表示された曲線Cの概形をかけ。

解 答　$\frac{dx}{d\theta}=-4\sin 2\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=-6\sin 3\theta$ であるから，

$0\leqq\theta\leqq\pi$ における x と y の値の変化は，次のようになる。

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{d\theta}$		−	−	−	0	+	+	+	
x	2	←	−1	←	−2	→	−1	→	2
$\frac{dy}{d\theta}$		−	0	+	+	+	0	−	
y	2	↓	−2	↑	0	↑	2	↓	−2



【別解】　パラメータ消去でも解ける。

$t=\cos\theta$ だと，$x=4t^2-2$，$y=8t^3-6t$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$y=(x-1)\sqrt{x+2}$

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$y=-(x-1)\sqrt{x+2}$

C 問題

③8-C-1

$f(x)=e^x\sin(\sqrt{3}x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f'(0)$，$f''(0)$ を求めよ。

(2) 区間 $0\leqq x\leqq\pi$ において，$y=f(x)$ の極値と変曲点を与える x の値を求めよ。

●防衛大●

解答 (1) $f'(0)=\sqrt{3}$，$f''(0)=2\sqrt{3}$　(2)順に $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$，$\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\pi$ および $x=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$，$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

解き方 (1) $f'(x)$

$=e^x\sin(\sqrt{3}x)+e^x\cdot\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)$

$=2e^x\sin\left(\sqrt{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

これより，$f'(0)=\sqrt{3}$

$f''(x)=2e^x\sin\left(\sqrt{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\quad+2e^x\cdot\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=4e^x\sin\left(\sqrt{3}x+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

これより，$f''(0)=2\sqrt{3}$

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ から，

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\sqrt{3}x+\dfrac{\pi}{3}\leqq\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)\pi$

ここで，$\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}<1.8+0.34<2.2$ より，

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\sqrt{3}x+\dfrac{\pi}{3}<2.2\pi$

よって，$f'(x)=0$ となる x の値は

$\sqrt{3}x+\dfrac{\pi}{3}=\pi$，$2\pi$ より，

$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$，$\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\pi$

この値の前後で $f'(x)$ の符号が変わる。

極値を与える x の値は，$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$，$\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\pi$

同様に，$0\leqq x\leqq\pi$ から

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\sqrt{3}x+\dfrac{2}{3}\pi\leqq\left(\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\right)\pi$

ここで，$\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}<1.8+0.7=\dfrac{5}{2}$ より，

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\sqrt{3}x+\dfrac{2}{3}\pi<\dfrac{5}{2}\pi$

よって，$f''(x)=0$ となる x の値は

$\sqrt{3}x+\dfrac{2}{3}\pi=\pi$，$2\pi$ より

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$，$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

この値の前後で $f''(x)$ の符号が変わる。

変曲点を与える x の値は，

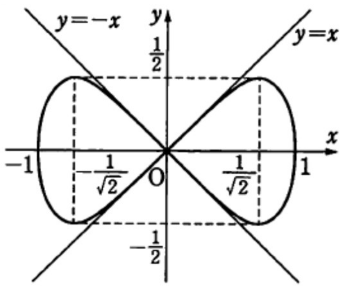
$x=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$，$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

③8-C-2

次の曲線の概形を図示せよ。

$$y^2=x^2(1-x^2)$$

解答



$y=\pm x\sqrt{1-x^2}$ であるから，グラフは x 軸に関して対称である。

$y=x\sqrt{1-x^2}$ は奇関数であるから，グラフは原点に関して対称である。

$y=x\sqrt{1-x^2}$ のグラフを考える。

定義域は，$1-x^2\geqq0$ より，$-1\leqq x\leqq1$

$y'=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘	0

$\lim\limits_{x\to-1+0}y'=-\infty$ より，

直線 $x=-1$ と点 $(-1,\ 0)$ で接する。

$\lim\limits_{x\to1-0}f'(x)=-\infty$ より，

直線 $x=1$ と点 $(1,\ 0)$ で接する。

$x=0$ のとき $y'=1$ より，原点における接線は，直線 $y=x$

③8-C-3

関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}\sin3x-2\sin2x+\sin x$ の区間 $[0,\ \pi]$ における最大値，最小値を求めよ。

解答 (1) 最大値 $\dfrac{6+2\sqrt{2}}{3}$ $\left(x=\dfrac{3}{4}\pi\text{のとき}\right)$，最小値 $\dfrac{-6+2\sqrt{2}}{3}$ $\left(x=\dfrac{\pi}{4}\text{のとき}\right)$

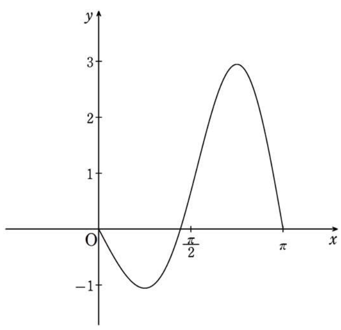
解き方 (1)　$f'(x)$
$=\cos 3x-4\cos 2x+\cos x$
$=(\cos 3x+\cos x)-4\cos 2x$
$=2\cos 2x\cos x-4\cos 2x$
$=2\cos 2x(\cos x-2)$
$f'(x)=0$ より，$\cos 2x=0$ $(0<2x<2\pi)$
よって，$x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$

x	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{3}{4}\pi$	…	π
$f'(x)$		−	0	＋	0	−	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	極大	↘	0

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0<f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$ であるから，

最大値は $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{6+2\sqrt{2}}{3}$,

最小値は $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-6+2\sqrt{2}}{3}$



③**8-C-4**

$f(x)=e^{3x}-6e^{2x}+11e^{x}-6$ とするとき，

関数 $F(x)=|f(x)|+\frac{1}{3}|f'(x)-2e^{x}|$ の $0\leqq x\leqq \log 3$ における最大値，

最小値を求めよ。

解 答　最大値 $\frac{64}{27}$ $\left(x=\log\frac{7}{3}\right.$ のとき$\Big)$，最小値 0（$x=0$，$\log 3$ のとき）

）$e^{x}=t$ とおくと，
$0\leqq x\leqq \log 3$ より，$1\leqq t\leqq 3$
$F(x)=g(t)$ とおくと，
$F(x)=g(t)$
$=|t^3-6t^2+11t-6|+\frac{1}{3}|3t^3-12t^2+9t|$
$=|(t-1)(t-2)(t-3)|+|t(t-1)(t-3)|$

(i)　$1\leqq t\leqq 2$ のとき
$g(t)=-2t^2+8t-6$
$g'(t)=-4t+8=-4(t-2)$

(ii)　$2<t\leqq 3$ のとき
$g(t)=-2t^3+10t^2-14t+6$
$g'(t)=-6t^2+20t-14=-2(3t-7)(t-1)$

t	1	…	2	…	$\frac{7}{3}$	…	3
$g'(t)$		＋		＋	0	−	
$g(t)$	0	↗	2	↗	$\frac{64}{27}$	↘	0

よって，$g(t)$ の最大値は $g\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{64}{27}$,

このとき，$e^{x}=\frac{7}{3}$ より $x=\log\frac{7}{3}$

最小値は $g(1)=g(3)=0$

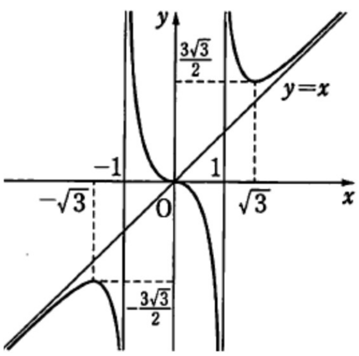
このとき，$e^{x}=1$ より $x=0$

$e^{x}=3$ より $x=\log 3$

③**8-C-5**

関数 $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ。

解 答



y は $x=\pm 1$ で不連続である。また，y は奇関数であるから，グラフは原点に関して対称である。

$y'=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

$y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

x	…	$-\sqrt{3}$	…	−1	…	0	…	1	…	$\sqrt{3}$	…
y'	＋	0	−	／	−	0	−	／	−	0	＋
y''	−	−	−	／	＋	0	−	／	＋	＋	＋
y	↗	極大	↘	／	↘	変曲点	↘	／	↘	極小	↗

極大値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $(x=-\sqrt{3}$ のとき$)$

極小値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $(x=\sqrt{3}$ のとき$)$

$\displaystyle\lim_{x\to -1+0} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to -1-0} y=-\infty$ より，

直線 $x=-1$ は漸近線。

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} y=-\infty$ より，

直線 $x=1$ は漸近線。

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$ より，

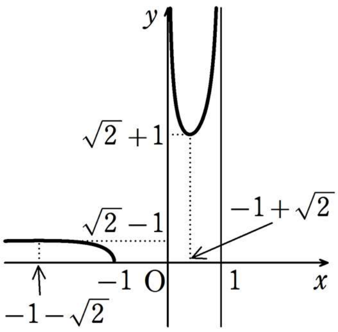
直線 $y=x$ は漸近線。

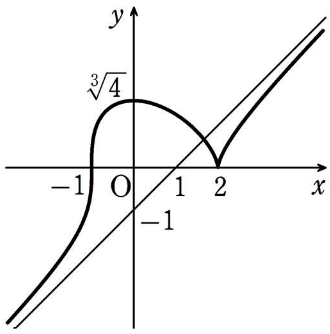
③**8-C-6**

次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{x(1-x)}}$　　　(2)　$y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$

解 答　(1)　　　(2)





(1)　$\dfrac{1+x}{x(1-x)} \geqq 0 \iff (1+x)x(1-x) \geqq 0,\ x \fallingdotseq 0,\ x \fallingdotseq 1$

よって，定義域は　　$x \leqq -1,\ 0 < x < 1$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(1-x)}{1+x}} \cdot \frac{1 \cdot x(1-x)-(1+x)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(1-x)}{1+x}} \cdot \frac{x^2+2x-1}{x^2(1-x)^2}$$

$y'=0$　とすると　$x=-1\pm\sqrt{2}$

x	…	$-1-\sqrt{2}$	…	-1	…	0	…	$-1+\sqrt{2}$	…	1
y'	+	0	−				−	0	+	
y	↗	$\sqrt{2}-1$	↘	0			↘	$\sqrt{2}+1$	↗	

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$，$\lim\limits_{x\to+0} y=\infty$，$\lim\limits_{x\to1-0} y=\infty$　であるから，

x　軸，y　軸，直線　$x=1$ が漸近線となる。

(2)　定義域は実数全体で，$x \leqq -1$　で　$y \leqq 0$，$-1 \leqq x$　で　$y \geqq 0$

また，点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ \sqrt[3]{4})$，$(2,\ 0)$　を通る。

$$y=(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$y'=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=x(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y''=(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x(x+1)^{-\frac{5}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}=-2(x+1)^{-\frac{5}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$$

また　$\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left\{\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}-x\right\}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2+4}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}+x\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}+x^2}=-1$$

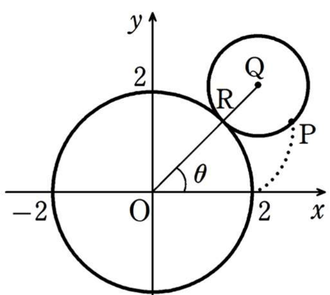
よって，直線　$y=x-1$ は漸近線となる。

点 $(-1\ ,\ 0)$，$(2\ ,\ 0)$ における接線は　x 軸に垂直。

x	…	-1	…	0	…	2	…
y'	+		+	0	−		+
y''	+		−	−	−		−
y	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0	↗

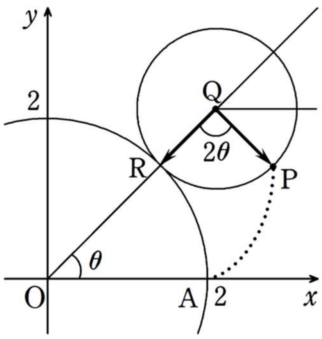
③ **8-C-7**

原点 O を中心とし，半径 2 の円を D_1 とする。半径 1 の円 D_2 は最初に中心 Q が $(3,\ 0)$ にあり，円 D_1 に外接しながら滑ることなく反時計まわりに転がるものとする。点 P は円 D_2 の円周上に固定されていて，最初



は $(2,\ 0)$ にある。
2 つの円の接点を R としたとき，線分OR が x 軸となす角を θ とする。
点 P の座標 $(x,\ y)$ を，θ を用いて表せ。

解 答　$(3\cos\theta-\cos3\theta,\ 3\sin\theta-\sin3\theta)$



点 $(2,\ 0)$ を A とする。

$\overset{\frown}{\mathrm{AR}}=2\theta$，$\overset{\frown}{\mathrm{PR}}=\angle\mathrm{RQP}$，$\overset{\frown}{\mathrm{AR}}=\overset{\frown}{\mathrm{PR}}$ であるから

$$\angle\mathrm{RQP}=2\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と x 軸の正の向きとのなす角は，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ と x 軸の正の向きとのなす角が $\theta-\pi$ であるから

$$(\theta-\pi)+2\theta=3\theta-\pi$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(\cos(3\theta-\pi),\ \sin(3\theta-\pi))$

$$=(-\cos3\theta,\ -\sin3\theta)$$

ゆえに　$(x,\ y)=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$

$$=(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)+(-\cos3\theta,\ -\sin3\theta)$$

$$=(3\cos\theta-\cos3\theta,\ 3\sin\theta-\sin3\theta)$$

第９章　数学Ⅲの微分の応用

《学習項目》

・極値から係数決定，極値をもつかどうかの判定
・共通接線（2 種），接線本数

グラフの応用
・関数の最大・最小 ⇒ グラフの y 座標を比べる
・方程式の解　⇒　グラフの共有点の x 座標に対応させる
・不等式（大小関係）　⇒　グラフの上下関係に対応させる

A 問題

③9-A-1

関数 $f(x)=a\sin 2x+b\cos x$ は，$x=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき極大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ をもつ。係数 a，b の値を求めよ。

解答　$\boldsymbol{a=1,\ b=-2}$

解き方　$f'(x)=2a\cos 2x-b\sin x$
$f''(x)=-4a\sin 2x-b\cos x$
条件より，
$f\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ かつ $f'\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=0$
であることが必要である。
よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-b)=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$，$a+\dfrac{b}{2}=0$
$a-b=3$，$2a+b=0$
この 2 式より，$a=1$，$b=-2$
このとき，$f''\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=-3\sqrt{3}<0$ となり，確かに $f(x)$ は $x=\dfrac{7}{6}\pi$ で極大になる。

③9-A-2

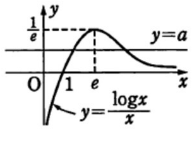
方程式 $\log x-ax=0$ が 2 個の実数解をもつための a の値の範囲を求めよ。
必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

解答　$0<\boldsymbol{a}<\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{e}}$

曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ と直線 $y=a$ との共有点が 2 個であるための a の範囲を求める。

$y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ の増減は，$y'=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，次のようになる。

x	0	…	e	…
y'	／	$+$	0	$-$
y	／	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘



グラフより，求める a の値の範囲は，$0<\boldsymbol{a}<\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{e}}$

③9-A-3

すべての正の数 x に対して，不等式 $x-\log ax\geqq 0$ が成り立つような実数 a の中で最大のものを求めよ。

解答　$\boldsymbol{a=e}$

解き方　$x>0$ と真数条件 $ax>0$ より，
$a>0$　　$f(x)=x-\log ax$ とおくと，
$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$
よって，$f(x)$ の増減は，右の表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	$1-\log a$	↗

よって，$f(x)\geqq 0$ であるためには，
$1-\log a\geqq 0$ であればよい。
したがって，$e\geqq a>0$ より，
求める a の最大値は $a=e$

B 問題

③**9-B-1**

a を正の定数とするとき，x の関数 $f(x)=\dfrac{-ax+a^2+1}{x^2-4}$ の極小値と
そのときの x の値を求めよ。　●浜松医科大●

解 答　$0<a<1$ のとき，$-\dfrac{a^2}{4}$ $\left(x=\dfrac{2}{a}\text{ のとき}\right)$　$a>1$ のとき，$-\dfrac{1}{4}$ （$x=2a$ のとき）　$a=1$ のとき，極小値はない。

解き方　$f'(x)=\dfrac{(ax-2)(x-2a)}{(x^2-4)^2}$ $(a>0)$

$f'(x)=0$ より，$x=\dfrac{2}{a}$，$2a$

(i)　$\dfrac{2}{a}=2a$ すなわち，$a=1$ のとき

$f(x)=-\dfrac{1}{x+2}$ となり，極値をもたない。

(ii)　$\dfrac{2}{a}>2a$ すなわち，$0<a<1$ のとき

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\dfrac{2}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	／	↘	極小	↗

(iii)　$\dfrac{2}{a}<2a$ すなわち，$a>1$ のとき

x	$\cdots$	$\dfrac{2}{a}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	／	↘	極小	↗

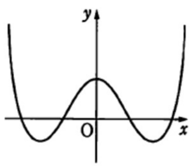
③**9-B-2**

x の関数 $f(x)=x^3+2ax+\dfrac{b}{x}$ が，$x>0$ で極大値と極小値をそれぞれ１つずつもつための a，b の条件を求めよ。　●北海道大●

解 答　$a<0$，$b<0$，$a^2+3b>0$

解き方　$f'(x)=\dfrac{3x^4+2ax^2-b}{x^2}$

題意を満たすためには，$f'(x)=0$ が異なる２つの正の解をもたなくてはならない。
$g(x)=3x^4+2ax^2-b$ とおくと，
$g(x)=g(-x)$ より，$y=g(x)$ のグラフは下図より y 軸に関して対称である。



$x^2=t$ とおき，$3t^2+2at-b=0$ が異なる２つの正の解をもつための条件は

$$\begin{cases}\text{判別式 } D>0 \text{ より } a^2+3b>0\\ \text{軸が正より } -\dfrac{a}{3}>0 \text{ すなわち } a<0\\ t=0 \text{ のとき } 3t^2+2at-b=0 \text{ より}\\ -b>0 \text{ すなわち } b<0\end{cases}$$

③**9-B-3**

方程式 $2x+\cos x=2$ は，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に，ただ１つの実数解をもつことを証明せよ。ただし，用いた定理の名称と，その定理が使えるための条件を明示すること。●九州工業大

解 答　用いた定理＝中間値の定理，その条件＝連続性

$f(x)=2x+\cos x-2$ とおくと，$f(x)$ は

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で連続で，

$f'(x)=2-\sin x>0$ より，

$f(x)$ は単調に増加し，$f(0)=-1<0$，

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2>0$ であるから，$f(x)=0$ を満たす x が，$0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲に，ただ 1 つ存在する。

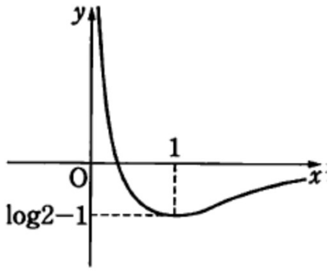
③**9-B-4**

(1)　$x>0$ のとき，関数 $f(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x+1}$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　点 (1，1) から曲線 $y=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ へ接線は何本引けるか。

解答　(2) 1 本

(1)



$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

極小値は，$f(1)=\log 2-1$

$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$ より，y 軸は漸近線。

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より，x 軸も漸近線。

(2)　$g(x)=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ とおくと，

曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(t,\ g(t))$ における接線の方程式は，

$y-g(t)=g'(t)(x-t)$

これが点 (1，1) を通るから，

$1-g(t)=g'(t)(1-t)$ ……①

ここで $g'(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$ であるから，①より，$\log\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{2}{t+1}=0$

これを満たす実数 t は，方程式 $f(t)=0$ の解であるから，(1)のグラフより，ただ 1 つである。

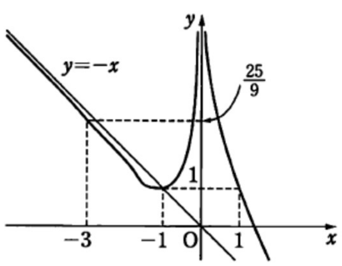
③**9-B-5**

(1)* 関数 $y=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-x$ の増減，極値，凹凸などを調べ，そのグラフをかけ。

(2)　(1)のグラフを利用して，3 次方程式 $x^3+kx^2-x-1=0$（k は実数）の異なる実数解の個数を調べよ。　●福岡教育大●

解答

(1)



(2)　$k<1$ のとき 1 個，

$k=1$ のとき 2 個，

$k>1$ のとき 3 個

解き方 (1)　y の定義域は，$x \neq 0$

$y'=-\dfrac{(x+1)(x^2-x+2)}{x^3}$，$y''=\dfrac{2(x+3)}{x^4}$

$x^2-x+2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ であるから，

y の増減，凹凸は次の表のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	／	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	／	$+$
y	↘	$\dfrac{25}{9}$	↘	1	↗	／	↘

変曲点は $\left(-3,\ \dfrac{25}{9}\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(y+x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)=0$

より，直線 $y=-x$ は漸近線。

$\displaystyle\lim_{x\to\pm 0} y=\lim_{x\to\pm 0}\frac{1+x-x^3}{x^2}=\infty$ より，y 軸は漸近線。

以上から，グラフは上図のようになる。

(2)　$x=0$ は，与えられた方程式の解ではない。

両辺を x^2 $(\neq 0)$ で割ると，$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-x=k$

したがって，与えられた方程式の異なる実数解の個数は，２つのグラフ

$y=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-x$，$y=k$ の共有点の個数と一致する。

③**9-B-6**

関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ。また，3^π と π^3 の大小関係を調べよ。

関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ。また，$3^\pi>\pi^3$ を証明せよ。

解答　最大値 $\dfrac{1}{e}$ ($x=e$ のとき)　$3^\pi>\pi^3$

解き方　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}=0$ より $x=e$

$x>e$ のとき $f'(x)<0$，$0<x<e$ のとき $f'(x)>0$

よって，$x=e$ のとき $f(x)$ は最大となる。

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より

$x>e$ のとき $f'(x)<0$ から $f(x)$ は単調に減少する。$e<3<\pi$ より，$f(3)>f(\pi)$

$\dfrac{\log 3}{3}>\dfrac{\log\pi}{\pi}$

分母を払って，$\pi\log 3>3\log\pi$

から $\log 3^\pi>\log\pi^3$　　これより $3^\pi>\pi^3$

③**9-B-7**

$x>0$ のとき，$2\sqrt{x}>\log x$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ。

解答　0

$f(x)=2\sqrt{x}-\log x$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

よって，$f(x)$ の増減は，右の表のようになる。よって，$x>0$ のとき，$f(x)>0$，

すなわち，$2\sqrt{x}>\log x$ が成り立つ。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	2	↗

また，$x>1$ のとき，$2\sqrt{x}>\log x>0$ であるから，

$\dfrac{2}{\sqrt{x}}>\dfrac{\log x}{x}>0$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ であるから，はさみ打ちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\mathbf{0}$

③**9-B-8**

不等式 $\cos 2x+cx^2\geqq 1$ がすべての実数 x について成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。　●北海道大●

解答　$c\geqq 2$

$cx^2\geqq 1-\cos 2x$ ……①

(i)　$x=0$ のとき，①は任意の c に対して成り立つ。

(ii)　$x\neq 0$ のとき，$x^2>0$ より①は次の式が成り立つことと同値である。

$c\geqq\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}$

$=2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ ……②

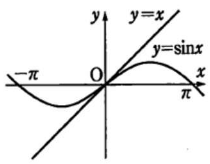
$y=\sin x$ の $x=0$ における接線の方程式は $y=x$

したがって，

$y=x$ のグラフと

$y=\sin x$ のグラフは上図のようになり，

$|\sin x|<|x|$ が成り立つ。



$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|<1$ から，$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2<1$

$0<2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2<2$

また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ より $c\geqq 2$ のとき②は常に成り立つ。

(i)，(ii)より，求める c の値の範囲は $c\geqq 2$

C 問題

③**9-C-1**

$a>0$, b を定数とする。実数 t に関する方程式

$(a-t+1)e^t+(a-t-1)e^{-t}=b$

の解の個数を調べよ。ただし，$\lim_{t\to\infty} te^{-t}=\lim_{t\to-\infty} te^t=0$ は既知としてよい。

●琉球大●

50 $b<2a$ または $b>e^a-e^{-a}$ のとき１個，

解答 $b=2a$, e^a-e^{-a} のとき２個，

$2a<b<e^a-e^{-a}$ のとき３個

解き方 $f(t)=(a-t+1)e^t+(a-t-1)e^{-t}$

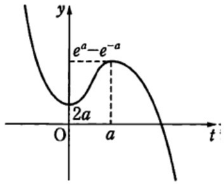
とおくと，

$f'(t)=(a-t)(e^t-e^{-t})$

$f'(t)=0$ とすると，$t=0$, a $(a>0)$

ここで，$f(0)=2a$, $f(a)=e^a-e^{-a}$ より

t	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	$2a$	↗	e^a-e^{-a}	↘



ここで，$\lim_{t\to\infty} te^{-t}=\lim_{t\to-\infty} te^t=0$ より

$\lim_{t\to-\infty} f(t)=\infty$, $\lim_{t\to\infty} f(t)=-\infty$

から $y=f(t)$ のグラフは上図のようになる。

③ **9-C-2**

方程式 $2\log(x-a)-\dfrac{a}{x}=0$ が相異なる２つの実数解をもつような実数 a の範囲を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

解 答　$a<-2e$ または $-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}<a<0$

解き方　$f(x)=2\log(x-a)-\dfrac{a}{x}$

$(x>a,\ x\neq 0)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{2}{x-a}+\frac{a}{x^2}=\frac{(x+a)(2x-a)}{x^2(x-a)}$$

ここで，$x>a$ より分母 >0

したがって，$f'(x)$ の正負は分子によって決まる。

(i)　$a\geqq 0$ のとき

$x>a$ より，$x+a>0$

また，$2x-a=2(x-a)+a>0$

よって，$(x+a)(2x-a)>0$ より，$f'(x)>0$ から，

$f(x)$ は単調に増加する。 ……①

また，

$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ ……②

①，②より，方程式 $f(x)=0$ は実数解を１つだけもつ。

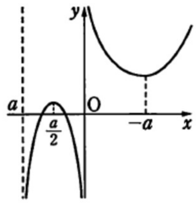
(ii)　$a<0$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to -0}f(x)=-\infty,$

$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

x	a	…	$\frac{a}{2}$	…	0	…	$-a$	…
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+
$f(x)$		↗	極大	↘		↘	極小	↗

$y=f(x)$ のグラフは右図のようになるとき $f(x)$ は２つの異なる実数解をもつ。



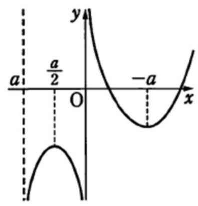
ここで，

$f\left(\dfrac{a}{2}\right)$

$=2\log\left(-\dfrac{a}{2}\right)-2$

$f(-a)$

$=2\log(-2a)+1$



よって，方程式 $f(x)=0$ が相異なる２つの実数解をもつ条件は，

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{a}{2}\right)>0 \\ f(-a)>0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} f\left(\dfrac{a}{2}\right)<0 \\ f(-a)<0 \end{cases}$$

これを解いて，

$a<-2e$ または $-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}<a<0$

③ **9-C-3**

x の方程式 $a\log(x+a)+\dfrac{a}{2}x^2-x=0$ は，ただ１つの実数解をもつことを証明せよ。ただし，a は正の実数とし，対数は自然対数とする。

●東京学芸大●

解答

$$f(x)=a\log(x+a)+\frac{a}{2}x^2-x\ (x>-a)$$

とおくと，

$$f'(x)=\frac{a}{x+a}+ax-1=\frac{x(ax+a^2-1)}{x+a}$$
$$=\frac{ax}{x+a}\left(x-\frac{1-a^2}{a}\right)$$

$\lim_{x\to-a+0}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to\infty}f(x)$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{a\log(x+a)+\frac{a}{2}x^2\left(1-\frac{2}{ax}\right)\right\}=\infty$

(i)　$0<a<1$ のとき

x	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1-a^2}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↗	極大	↘	極小	↗

極大値は $f(0)=a\log a\ (<0)$

よって，増減表により，$f(x)=0$ はただ１つの実数解をもつ。

(ii)　$a=1$ のとき

$$f(x)=\log(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x\ (x>-1)$$

$f'(x)=\frac{x^2}{x+1}>0$ より，$f(x)$ は単調に増加し，$f(0)=0$

よって，$f(x)=0$ はただ１つの実数解 $x=0$ をもつ。

(iii)　$a>1$ のとき

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{1-a^2}{a}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↗	極大	↘	極小	↗

極小値は $f(0)=a\log a\ (>0)$

よって，増減表により，$f(x)=0$ はただ１つの実数解をもつ。

(i), (ii), (iii)より，$a\log(x+a)+\frac{a}{2}x^2-x=0$ はただ１つの実数解をもつ。

③9-C-4

281* $x>0$ のとき，任意の自然数 n に対して不等式 $e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

●宇都宮大●

解答

$f_n(x)$

$=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$

とおく。

〔Ｉ〕　$n=1$ のとき，$f_1(x)=e^x-1-x$ より

$f_1'(x)=e^x-1$

ここで $x>0$ より $f_1'(x)=e^x-1>0$ から，$f_1(x)$ は単調に増加する。また $f_1(0)=0$ より $x>0$ において $f_1(x)>0$ となり，$e^x>1+x$ は成り立つ。

〔II〕　$n=k$ のとき $f_k(x)>0$ が成り立つと仮定する。すなわち，

$e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)>0$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき，

$f_{k+1}(x)=e^x-\left\{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right\}$ より，

$f_{k+1}'(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)>0$

よって，$f_{k+1}(x)$ は単調に増加する。また，$f_{k+1}(0)=0$ より，$x>0$ において $f_{k+1}(x)>0$ となり，

$n=k+1$ のときも成り立つ。

〔Ｉ〕，〔II〕より，すべての自然数 n に対して，$e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$ が成り立つ。

③**9-C-5**

$0<a<b$ のとき，不等式 $\sqrt{ab}<\dfrac{b-a}{\log b-\log a}<\dfrac{a+b}{2}$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。　●岐阜大●

ヒント　$x=\dfrac{b}{a}$ とおくと，与えられた不等式は，$\sqrt{x}<\dfrac{x-1}{\log x}<\dfrac{x+1}{2}$

解答

不等式の各辺を $a\,(a>0)$ で割ると，

$$\sqrt{\frac{b}{a}}<\frac{\frac{b}{a}-1}{\log\frac{b}{a}}<\frac{\frac{b}{a}+1}{2}$$

ここで $\dfrac{b}{a}=x$ とすると，$\sqrt{x}<\dfrac{x-1}{\log x}<\dfrac{x+1}{2}$

ただし，$0<a<b$ より $x>1$ である。

(i) $\dfrac{x-1}{\log x}<\dfrac{x+1}{2}$ の証明

分母を払うと，$2(x-1)<(x+1)\log x$ より，

$f(x)=(x+1)\log x-2(x-1)$ とおいて，

$x>1$ のとき $f(x)>0$ を証明する。

$$f'(x)=\log x+\frac{1}{x}-1,\quad f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$$

$x>1$ より $f''(x)>0$

よって，$x>1$ において $f'(x)$ は単調に増加する。また，$f'(1)=0$ より

$x>1$ において $f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x>1$ において単調に増加する。また，$f(1)=0$ より $x>1$ において $f(x)>0$ が成り立つ。

(ii) $\sqrt{x}<\dfrac{x-1}{\log x}$ の証明

分母を払うと，$\sqrt{x}\log x<x-1$ より，

$g(x)=x-1-\sqrt{x}\log x$ とおいて，$x>1$ のとき $g(x)>0$ を証明する。

$$g'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\log x-\frac{\sqrt{x}}{x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\log x-1\right)$$

ここで $h(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\log x-1$ とおくと，

$x>1$ より

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}=\frac{\sqrt{x}-1}{2x}>0$$

したがって，$x>1$ において $h(x)$ は単調に増加する。

また，$h(1)=0$ より，$x>1$ において

$h(x)>0$ が成り立つ。

これより，$x>1$ において $g'(x)>0$ から，$g(x)$ は $x>1$ において単調に増加する。また，$g(1)=0$ より $x>1$ において $g(x)>0$ が成り立つ。

(i)，(ii)より，$x>1$ において，

$\sqrt{x}<\dfrac{x-1}{\log x}<\dfrac{x+1}{2}$ は成り立つ。

したがって，$0<a<b$ のとき，

不等式 $\sqrt{ab}<\dfrac{b-a}{\log b-\log a}<\dfrac{a+b}{2}$ は成り立つ。

③**9-C-6**

(1) $x\geqq 0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^3}{6}\leqq\sin x\leqq x$ を証明せよ。

(2) k を定数とする。(1)を利用して，x が正の値をとりながら 0 に近づくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+kx^2}\right)$ を求めよ。　●高知女子大●

解答　(2)　k

(1) $f(x)=x-\sin x$ とおくと，

$x\geqq 0$ より，$f'(x)=1-\cos x\geqq 0$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。

また，$f(0)=0$より，

$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$

よって，$x\geqq \sin x$ ……①

次に，$g(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)$ とおくと，

$g'(x)=\cos x-\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)$

$g''(x)=-\sin x+x$

ここで，①より $x\geqq 0$ において $g''(x)\geqq 0$

よって，$g'(x)$ は単調に増加する。

また，$g'(0)=0$ より，$x\geqq 0$ において

$g'(x)\geqq 0$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において単調に増加する。

また，$g(0)=0$ より $x\geqq 0$ において

$g(x)\geqq 0$

すなわち，$\sin x\geqq x-\dfrac{x^3}{6}$

以上から，$x-\dfrac{x^3}{6}\leqq \sin x\leqq x$

(2) 十分小さい正の数 x に対して，

$x-\dfrac{x^3}{6}=x\left(1-\dfrac{x^2}{6}\right)>0$

よって，(1)の不等式の各辺の逆数をとって，

$$\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{\sin x}\leqq\frac{1}{x-\frac{x^3}{6}}$$

これより，

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+kx^2}\leqq\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+kx^2}\leqq\frac{1}{x-\frac{x^3}{6}}-\frac{1}{x+kx^2}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+kx^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+kx}=k$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x-\frac{x^3}{6}}-\frac{1}{x+kx^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k+\frac{x}{6}}{\left(1-\frac{x^2}{6}\right)(1+kx)}=k$$

よって，はさみ打ちの原理により，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+kx^2}\right)=k$$

③$\boxed{\textbf{9-C-7}}$

すべての正の数 x，y に対して，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x=y$ の場合に限ることを示せ。

●金沢大●

解答 $t=\dfrac{x}{y}$ と置き換えて一文字の不等式に帰着する（略)。または，平均値の定理を使う。

$f(t)=\log t$ とおくと，$f'(t)=\dfrac{1}{t}$

(i) $0<y<x$ のとき，平均値の定理から，

$\dfrac{\log x-\log y}{x-y}=f'(c)$ $(y<c<x)$

となる c が存在するから，

$\dfrac{\log x-\log y}{x-y}=\dfrac{1}{c}$

ここで，$0<y<c<x$ より

$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{y}$ だから，$\dfrac{\log x-\log y}{x-y}>\dfrac{1}{x}$

ここで，$x-y>0$，$x>0$ より両辺に $x(x-y)$ を掛けて，

$x(\log x-\log y)>x-y$

(ii) $0<x<y$ のとき，同様に，

$\dfrac{\log y-\log x}{y-x}=\dfrac{\log x-\log y}{x-y}=f'(c)=\dfrac{1}{c}$

ここで，$0<x<c<y$ より $\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$ だから，$\dfrac{\log x-\log y}{x-y}<\dfrac{1}{x}$

ここで，$x-y<0$，$x>0$ より両辺に $x(x-y)$ を掛けて，

$x(\log x-\log y)>x-y$

(iii) $x=y>0$ のとき，

$x(\log x-\log y)=x-y=0$

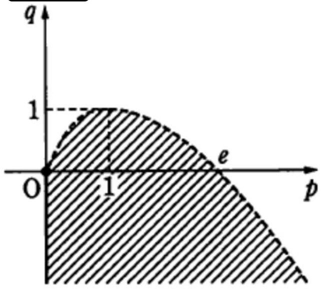
(i)〜(iii)より，すべての正の数 x，y に対して $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立ち，等号が成り立つのは $x=y$ の場合に限る。

③**9-C-8**

不等式 $e^x > px + q$ が，すべての実数 x に対して成り立つような点 $(p,\ q)$ の存在する領域を pq 平面に図示せよ。ただし，$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ である。

●岐阜薬科大●

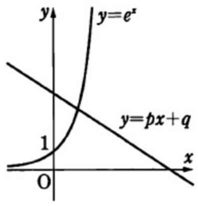
解答



境界は q 軸上の $q \leqq 0$ の部分のみ含む。

解き方 (i) $p<0$ のとき，

$y=e^x$ と $y=px+q$ は右図のようになり，不適。



(ii) $p=0$ のとき，

$e^x>q$ がすべての実数 x に対して成り立つ条件は $q \leqq 0$

(iii) $p>0$ のとき，

$f(x)=e^x-px-q$ とおくと，$f'(x)=e^x-p$ より，$f(x)$ は $x=\log p$ で最小値

$f(\log p)=e^{\log p}-p\log p-q$

$\qquad =p-p\log p-q$

をとる。この値が正のとき，$e^x>px+q$ がすべての x に対して成り立つから

$p-p\log p-q>0$ より，

$q<p-p\log p$

ここで，$y=x-x\log x$ のグラフは，

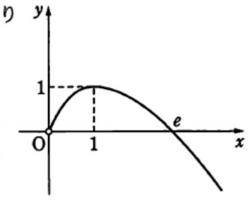
$y'=1-\log x-x\cdot\frac{1}{x}=-\log x$ より増減表は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	／	+	0	−
y	／	↗	極大	↘

$\lim_{x\to\infty}(x-x\log x)=\lim_{x\to\infty}x(1-\log x)=-\infty$,

$\lim_{x\to+0}x\log x=0$ より

$y=x-x\log x$ のグラフは右図のようになる。これから求める点 $(p,\ q)$ の存在する領域は答えの図のようになる。



補充問題（ただの練習用）

③**9-C-9**

次の方程式の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか。

(1)* $\log x = ex - a$　　(2)* $2\sin x = x + a$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

(3) $e^x = ax$ （必要ならば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ を用いてよい。）

(4) $x^2e^x - a = 0$ （必要ならば，$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$ を用いてよい。）

解答

(1) $a<2$ のとき0個，
$a=2$ のとき1個，$a>2$ のとき2個

(2) $a<-\pi$，$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}<a$ のとき0個，
$-\pi \leqq a<0$，$a=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ のとき1個，
$0\leqq a<\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ のとき2個

(3) $0\leqq a<e$ のとき0個，
$a<0$，$a=e$ のとき1個，$a>e$ のとき2個

(4) $a<0$ のとき0個，
$a=0$，$a>\frac{4}{e^2}$ のとき1個，
$a=\frac{4}{e^2}$ のとき2個，$0<a<\frac{4}{e^2}$ のとき3個

解き方　(1)　与式より，$ex-\log x=a$

曲線 $y=ex-\log x$ $(x>0)$ と直線 $y=a$ との共有点の個数を調べる。

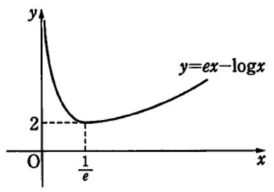
$y=ex-\log x$ について，

$$y'=e-\frac{1}{x}=\frac{ex-1}{x}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	2	↗

$\lim_{x\to+0} y=\infty$,

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} x\left(e-\frac{\log x}{x}\right)=\infty$



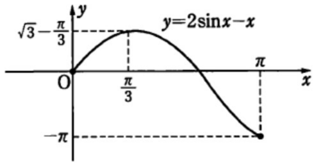
(2)　与式より，$2\sin x-x=a$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

曲線 $y=2\sin x-x$ と直線 $y=a$ との共有点の個数を調べる。

$y=2\sin x-x$ について，$y'=2\cos x-1$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大	↘	$-\pi$

$x=\frac{\pi}{3}$ のとき $y=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$



(3)　与式より，$\frac{e^x}{x}=a$ ($x=0$ はこの方程式の解ではないから，$x\neq0$ としてよい。)

曲線 $y=\frac{e^x}{x}$ と直線 $y=a$ との共有点の個数を調べる。

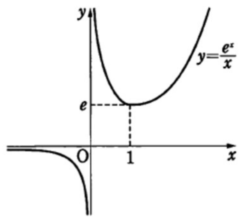
$y=\frac{e^x}{x}$ $(x\neq0)$ について，$y'=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↘	／	↘	e	↗

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{-x}}=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}}{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{te^t}=0$

$\lim_{x\to+0} y=\infty$, $\lim_{x\to-0} y=-\infty$



---

(4)　与式より，$x^2e^x=a$

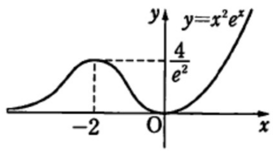
曲線 $y=x^2e^x$ と直線 $y=a$ との共有点の個数を調べる。

$y'=x(x+2)e^x$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

極大値 $\frac{4}{e^2}$，極小値 0

$\lim_{x\to\infty} y=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{t\to\infty} t^2e^{-t}=0$



③**9-C-10**

次の不等式を証明せよ。

(1)* $x>0$ のとき，$2x-x^2<\log(1+x)^2<2x$

(2)　$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$x>\sin x>x-\frac{x^3}{6}$

(3)* $x>0$ のとき，$\frac{x-1}{x}\leqq\log x\leqq x-1$

解答

(1)　$f(x)=\log(1+x)^2-(2x-x^2)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{2}{1+x}-2+2x=\frac{2x^2}{1+x}$$

$x>0$ のとき，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $x\geqq0$ で単調に増加し，かつ $f(0)=0$ より，$x>0$ のとき $f(x)>0$

すなわち，$\log(1+x)^2>2x-x^2$ ……①

次に，$g(x)=2x-\log(1+x)^2$ とおくと，

$$g'(x)=2-\frac{2}{1+x}=\frac{2x}{1+x}$$

$x>0$ のとき，$g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は $x\geqq0$ で単調に増加し，かつ $g(0)=0$ より，$x>0$ のとき $g(x)>0$

すなわち，$2x>\log(1+x)^2$ ……②

①，②より，$x>0$ のとき，与えられた不等式は成り立つ。

(2)　$f(x)=x-\sin x$ とおくと，

$f'(x)=1-\cos x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で単調に増加し，かつ $f(0)=0$ より，$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $f(x)>0$

すなわち，$x>\sin x$ ……①

次に，$g(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$ とおくと，

$g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，$g''(x)=x-\sin x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，①より，$g''(x)>0$ であるから，$g'(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で単調に増加し，かつ $g'(0)=0$ より，$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $g'(x)>0$

よって，$g(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で単調に増加し，かつ $g(0)=0$ より，$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき $g(x)>0$

すなわち，$\sin x>x-\frac{x^3}{6}$ ……②

①，②より，$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，与えられた不等式は成り立つ。

(3)　$f(x)=\log x-\frac{x-1}{x}$ とおくと，

次に，$g(x)=(x-1)-\log x$ とおくと，

$$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

よって，$g(x)$ の増減は，右の表のようになる。

したがって，$x>0$ のとき

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	／	$-$	0	$+$
$g(x)$	／	↘	0	↗

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

よって，$f(x)$ の増減は，
右の表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	0	↗

したがって，$x>0$ のとき $f(x)\geqq 0$

すなわち，$\log x \geqq \frac{x-1}{x}$ ……①