第 10 章　数学Ⅲの積分計算

《学習項目》

・積分　：　微分の逆演算

・積分の性質（得意なことと不得意なこと）

和・差・実数倍はバラせる。$\int\{kf(x)+lg(x)\}dx=k\int f(x)dx+l\int g(x)dx$

積・商・合成関数（とくに●乗）の積分公式は存在しない

・合成関数でも中身が一次式なら積分できる

・できるだけ和に直す，できるだけ次数下げ

・$\int\frac{f'}{f}$，$\int f^n\cdot f'$ 型（合成関数の微分後の形）

・部分積分 $\int f'g=fg-\int fg'$

①● $\times x$　②● $\times\log x$　③$e^{▲}\times\sin■$, $e^{▲}\times\cos■$

・置換積分

①$\sin^{奇}x$ ⇒ $t=\cos x$　$\cos^{奇}x$ ⇒ $t=\sin x$

②$\sqrt{r^2-x^2}$ ⇒ $x=r\sin\theta$，$\frac{1}{x^2+a^2}$ ⇒ $x=a\tan\theta$

A 問題

③**10-A-1**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(3e^x-2^x)dx$　(2) $\int\left(7^x+x^7-\frac{1}{x}\right)dx$　(3) $\int\frac{\sqrt[4]{x^3}-x^2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\int(2\sin x-3\cos x)dx$　(5) $\int(\tan x-2)\cos x\,dx$

解答　(1) $3e^x-\frac{2^x}{\log 2}+C$　(2) $\frac{7^x}{\log 7}+\frac{1}{8}x^8-\log|x|+C$

(3) $-2\cos x-3\sin x+C$　(4) $-\cos x-2\sin x+C$

(1) 与式$=3\int e^x dx-\int 2^x dx$
$=3e^x-\frac{2^x}{\log 2}+C$

(2) 与式$=\frac{7^x}{\log 7}+\frac{1}{8}x^8-\log|x|+C$

(4) 与式$=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}-2\right)\cos x\,dx$
$=\int(\sin x-2\cos x)dx$
$=-\cos x-2\sin x+C$

(3)　略

③**10-A-2**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(3x-4)^5dx$　(2) $\int(1-2x)^3dx$

(3) $\int\frac{dx}{3x-2}$　(4) $\int e^{-2x+3}dx$

(5) $\int 3\cos 3x\,dx$　(6) $\int\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

解答　(1) $\frac{(3x-4)^6}{18}+C$ (2) $-\frac{(1-2x)^4}{8}+C$ (3) $\frac{1}{3}\log|3x-2|+C$

(4) $-\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C$　(5) $\sin 3x+C$　(6) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$

③**10-A-3**

次の不定積分，定積分の値を求めよ。

(1) $\int\cos^2 x\,dx$　　(2) $\int\sin^4 x\,dx$

(3) $\int\sin x\cos x\cos 2x\,dx$　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\,d\theta$

解答 (1) $=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$，(2) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$　(3) $-\frac{1}{16}\cos 4x+C$　(4) $1-\frac{\pi}{4}$

(1) $\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(2) $\sin^4 x=(\sin^2 x)^2$

$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{\cos^2 2x-2\cos 2x+1}{4}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}-2\cos 2x+1\right)$

$=\frac{1}{8}(3-4\cos 2x+\cos 4x)$

これより，

与式$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)dx$

$=\frac{1}{8}\left(3x-2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$

(3) $\sin x\cos x\cos 2x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}\sin 4x$

よって，与式$=\frac{1}{4}\int\sin 4x\,dx$

(4) 与式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta=\left[\tan\theta-\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=1-\frac{\pi}{4}$

③**10-A-4**

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_1^2\frac{dx}{4x^2-1}$　　(2) $\int_0^1\frac{t+4}{t^2-t-2}dt$

解答 (1) $\frac{1}{4}\log\frac{9}{5}$　(2) $-3\log 2$

(1) 与式$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\int_1^2\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\left[\log|2x-1|-\log|2x+1|\right]_1^2$

$=\frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|\right]_1^2=\frac{1}{4}\left(\log\frac{3}{5}-\log\frac{1}{3}\right)$

(2) 与式$=\int_0^1\left(\frac{2}{t-2}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\left[2\log|t-2|-\log|t+1|\right]_0^1$

$=(0-\log 2)-(2\log 2-0)$

③**10-A-5**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\cos x\sin 2x\,dx$　　(2) $\int\sin x\sin 3x\,dx$

解答 (1) $-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x+C$　(2) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

(1) 与式$=\frac{1}{2}\int(\cos 7x+\cos x)dx$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 7x}{7}+\sin x\right)+C$

(2) 与式$=-\frac{1}{2}\int\{\cos 4x-\cos(-2x)\}dx$

$=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 4x)dx$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 4x}{4}\right)+C$

③**10-A-6**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\frac{1-\cos x}{x-\sin x}dx$　　(2) $\int\frac{x^2+2}{x^3+6x}dx$

(3) $\int \tan x \, dx$

解答　(1) $\log|x-\sin x|+C$　(2) $\frac{1}{3}\log|x^3+6x|+C$　(3) $-\log|\cos x|+C$

(1) 与式$=\int\frac{(x-\sin x)'}{x-\sin x}dx$　(2) 与式$=\int\frac{(x^3+6x)'}{x^3+6x}\cdot\frac{1}{3}dx$　(3) 与式$=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx$

③**10-A-7**

次の不定積分を求めよ。

(1)* $\int 3x^2(x^3-3)^4dx$　　(2) $\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx$

(3) $\int\frac{\log x}{x}dx$　　(4)* $\int xe^{x^2+1}dx$

解答　(1) $\frac{1}{5}(x^3-3)^5+C$　(2) $\frac{2}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+C$　(3) $\frac{1}{2}(\log x)^2+C$　(4) $\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$

(1) $x^3-3=t$ とおくと，

$\frac{dt}{dx}=3x^2$ より，与式$=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C$

(2) $x^2+3=t$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=2x$ より，

与式$=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$ (2) $\sqrt{t}+C$

(3) $\log x=t$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ より，

与式$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$

(4) $x^2+1=t$ とおくと，$\frac{dt}{dx}=2x$ より，

与式$=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C$

③**10-A-8**

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 xe^{-x}dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

解答　(1) $-\frac{2}{e}+1$　(2) 1

(1) 与式$=\int_0^1 x(-e^{-x})'dx$

$=\left[x(-e^{-x})\right]_0^1-\int_0^1(x)'(-e^{-x})dx$

$=-e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=-\frac{2}{e}+1$

(2) 与式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(-\cos x)'dx$

$=\left[x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'(-\cos x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

③**10-A-9**

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_1^e\sqrt{x}\log x\,dx$　　(6)* $\int_0^1 x\log(x+1)dx$

解答　(1) $\frac{2}{9}(e\sqrt{e}+2)$　(2) $\frac{1}{4}$

与式$=\int_1^e\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'\log x\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\cdot\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\log x)'dx$

$=\frac{2}{3}e\sqrt{e}-\frac{2}{3}\int_1^e x^{\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{2}{3}e\sqrt{e}-\left(\frac{2}{3}\right)^2\left[x\sqrt{x}\right]_1^e=\frac{2}{9}(e\sqrt{e}+2)$

与式$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log(x+1)dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}\log(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\{\log(x+1)\}'dx$

$=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x+\log(x+1)\right]_0^1=\frac{1}{4}$

③**10-A-10**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int e^x\cos x\,dx$　　(4) $\int e^x\sin x\,dx$

(2)

解答　(1) $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$　(2) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

(1)　$I=\int e^x\cos x\,dx$ とおくと，

$I=\int(e^x)'\cos x\,dx$

$=e^x\cos x-\int e^x(\cos x)'dx$

$=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$

$=e^x(\cos x+\sin x)-I$

よって，$2I=e^x(\cos x+\sin x)+C'$

ゆえに，$I=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$

(2)　$I=\int e^x\sin x\,dx$ とおくと，

$I=\int(e^x)'\sin x\,dx$

$=e^x\sin x-\int e^x(\sin x)'dx$

$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$

$=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)$

$=e^x(\sin x-\cos x)-I$

よって，$2I=e^x(\sin x-\cos x)+C'$

ゆえに，$I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

③**10-A-11**

次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta$$

解答　$\frac{2}{3}$

与式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$

$=1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$

ここで，$\cos\theta=t$ とおくと，

$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=1$

$\sin\theta\,d\theta=-dt$

θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$1\longrightarrow 0$

与式$=1-\int_1^0 t^2\cdot(-1)dt=1-\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

③**10-A-12**

次の定積分の値を求めよ。

(1)　$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$　　(2)　$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　(3)　$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解答　(1) $\frac{\pi}{2}$　(2) $\frac{\pi}{6}$　(3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

(1)　$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

x	$-1\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ では $\cos\theta\geqq 0$ であるから，

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$

与式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$=\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

(2)　$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

x	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ では $\cos\theta\geqq 0$ であるから，

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$

よって，

与式$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{6}$

(3)　**書き方**　(1)　$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

x	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ では $\cos\theta\geqq 0$ であるから，

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=|\cos\theta|=\cos\theta$

与式$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\theta\,d\theta$

$=\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

③**10-A-13**

(1)　$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$　　(2)　$\int_{-3}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}\,dx$　　(3)　$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

解答　(1) $\frac{\pi}{4}$　(2) $\frac{5}{36}\pi$　(3) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

(1)

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

与式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

(2)

$x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{3}{\cos^2\theta}$

x	$-3\longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{4}\longrightarrow \frac{\pi}{6}$

与式$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{5}{36}\pi$

(3)

与式$=\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\int_0^{\sqrt{3}}dx-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{3}$

与式$=\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$=\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

B 問題

③10-B-1

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1(e^x+1)^2dx-\int_0^1(e^x-1)^2dx$　　(2)* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

解答　(1)　$4(e-1)$　　(2)　2

き方　(1)　与式

$=\int_0^1\{(e^x+1)^2-(e^x-1)^2\}dx$

$=\int_0^1 4e^x dx=4\left[e^x\right]_0^1=4(e-1)$

(2)　与式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$

$=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$

$=1-(-1)=2$

③10-B-2

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_2^3 x(x-2)^3dx$　　(2) $\int_a^b(x-a)(x-b)^2dx$　　(a, b は定数)

解答　(1)　$\frac{7}{10}$　　(2)　$\frac{1}{12}(a-b)^4$

(2)　$x-2=t$ とおくと，$x=t+2$

$\frac{dx}{dt}=1$

x	$2\longrightarrow 3$
t	$0\longrightarrow 1$

与式$=\int_0^1(t+2)t^3dt=\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{2}\right]_0^1=\frac{7}{10}$

(2)　与式$=\int_a^b(x-a)\left\{\frac{(x-b)^3}{3}\right\}'dx$

$=\left[(x-a)\frac{(x-b)^3}{3}\right]_a^b-\int_a^b\frac{(x-b)^3}{3}\,dx$

$=-\frac{1}{3}\int_a^b(x-b)^3dx=-\frac{1}{3}\left[\frac{(x-b)^4}{4}\right]_a^b$

$=\frac{1}{12}(a-b)^4$

③10-B-3

次の定積分の値を求めよ。

$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4x\,dx$　　●自治医科大●

解答　$\frac{3}{4}$

) 与式$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{2\pi}=\frac{3}{4}$

③**10-B-4**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\frac{1}{x(x+1)(x+2)}dx$　●富山大●　　(2) $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$

解答　(1) $\frac{1}{2}\log\frac{|x(x+2)|}{(x+1)^2}+C$　　(2) $2\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C$　　(C は積分定数)

(1)　与式

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}(\log|x|-2\log|x+1|+\log|x+2|)+C$

$=\frac{1}{2}\log\frac{|x(x+2)|}{(x+1)^2}+C$

(2) $\frac{3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$　とおく。

両辺に $x(x+1)^2$ を掛けると　　$3x+2=a(x+1)^2+bx(x+1)+cx$

右辺を整理すると　　$3x+2=(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a$

係数比較して　　$a+b=0$，$2a+b+c=3$，$a=2$　　連立して，$a=2$，$b=-2$，$c=1$

よって　　$\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx=\int\left\{\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx=2\log|x|-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$

$=2\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C$　　(C は積分定数)

③**10-B-5**

m，n は自然数とする。定積分 $\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$ を求めよ。

解答　　$m\neq n$ のとき 0 ，　$m=n$ のとき $\frac{\pi}{2}$

$\sin mx\sin nx=-\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x-\cos(m-n)x\}$

$m\neq n$ のとき　　(与式)$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}-\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{\pi}=0$

$m=n$ のとき　　(与式)$=\int_0^{\pi}\sin^2 mx\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2mx}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2mx}{2m}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

③**10-B-6**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\frac{x^3}{x+1}dx$　　(2) $\int\frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx$　　(3) $\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$　●東京電機大

解答　(1) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\log|x+1|+C$　(2) $x+\log(x^2+1)+C$　(3) $\log|\cos x+\sin x|+C$

(1) 与式$=\int\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$
$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\log|x+1|+C$

(2) 与式$=\int\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$
$=\int dx+\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$

(3) 与式$=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$
$=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$
$=\int\frac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}dx$
$=\log|\cos x+\sin x|+C$

③10-B-7

次の不定積分を求めよ。

(1)* $\int\sin^3 x\cos x\,dx$　　(2) $\int\frac{1}{1-\sin x}dx$

(3) $\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx$　　(4)* $\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$

解答 (1) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$ (2) $\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$

(3) $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$ (4) $-\log(1+\cos^2 x)+C$

(1) $\sin x=t$ とおくと，
$\cos x\frac{dx}{dt}=1$
よって，$\cos x\,dx=dt$
与式$=\int t^3dt=\frac{1}{4}t^4+C$

(2) 与式$=\int\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx$
$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$
$=\tan x+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+C'$
$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\frac{dx}{dt}=1$
よって，$\sin x\,dx=-dt$
与式$=\tan x+\int\frac{1}{t^2}\cdot(-1)dt$
$=\tan x+\frac{1}{t}+C$

(3) 与式$=\int(1-\cos^2 x)\sin x\cdot\cos^2 x\,dx$
$\cos x=t$ とおくと，$\sin x\,dx=-dt$
与式$=\int(1-t^2)t^2\cdot(-1)dt$
$=\int(t^4-t^2)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+C$

(4) 与式$=\int\frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx$
$\cos x=t$ とおくと，$\sin x\,dx=-dt$
与式$=\int\frac{2t}{1+t^2}\cdot(-1)dt=-\int\frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt$
$=-\log(1+t^2)+C$

③10-B-8

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$

(3) $\int_1^e(\log x)^2dx$　　(4) $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$

解答 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\log 2$ (2) $\frac{\pi^2}{4}-2$ (3) $e-2$ (4) $\frac{1}{4}(e^2-1)$

(2)　与式$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)'dx$

$=\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\left[\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\log\frac{1}{2}$

(3)　与式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin x)'dx$

$=\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

$=\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'dx$

$=\frac{\pi^2}{4}-2\left\{\left[x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx\right\}$

$=\frac{\pi^2}{4}-2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2$

(4)　与式$=\int_1^e (x)'(\log x)^2dx$

$=\left[x(\log x)^2\right]_1^e-\int_1^e x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=e-2\int_1^e \log x\,dx=e-2\int_1^e (x)'\log x\,dx$

$=e-2\left(\left[x\log x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$

$=e-2\left(e-\left[x\right]_1^e\right)=e-2$

(5)　与式$=\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$=\left[x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]_0^1-\int_0^1 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\left\{\left[x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}dx\right\}$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}(e^2-1)$

③**10-B-9**

定積分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\sin 4x\,dx$ を求めよ。

解答　$I=\frac{4}{25}+\frac{4-3\sqrt{3}}{50}e^{-\frac{\pi}{2}}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\sin 4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\left(\frac{-\cos 4x}{4}\right)'dx=\left[-\frac{e^{-3x}\cos 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\cos 4x\,dx=-\frac{3}{4}J+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\cos 4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\left(\frac{\sin 4x}{4}\right)'dx=\left[\frac{e^{-3x}\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\sin 4x\,dx=\frac{3}{4}I+\frac{\sqrt{3}}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}$

$I=-\frac{3}{4}J+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}$，$J=\frac{3}{4}I+\frac{\sqrt{3}}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}$　から　$I=\frac{4}{25}+\frac{4-3\sqrt{3}}{50}e^{-\frac{\pi}{2}}$，$J=\frac{3}{25}+\frac{3+4\sqrt{3}}{50}e^{-\frac{\pi}{2}}$

③**10-B-10**

次の定積分の値を求めよ。

(1)　$\int_0^1(2+x)\sqrt{1-x^2}dx$ ●北見工業大●　　(2)　$\int_1^2\frac{dx}{x^2-2x+2}$

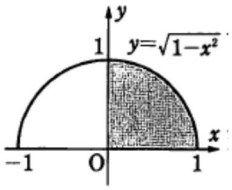
解答　(1)$\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$　(2)　$\frac{\pi}{4}$

(1)　　(2)

与式$=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

$2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は，単位円の面積の$\frac{1}{4}$の2倍を表すから，$\frac{\pi}{2}$

(右図)



$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$ は，

$\sqrt{1-x^2}=t$ とおくと，$x^2=1-t^2$

$2x\frac{dx}{dt}=-2t$　　$x\,dx=-t\,dt$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 0$

与式$=\frac{\pi}{2}+\int_1^0 t\cdot(-t)\,dt=\frac{\pi}{2}+\int_0^1 t^2\,dt$

$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$

与式$=\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}$　〔$t=x-1$〕

$t=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

t	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

与式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

③**10-B-11**

次の定積分の値を求めよ。

(1)* $\int_{-1}^{1}x\sqrt{3-x^2}\,dx$　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 2x\,dx$

解答　(1) **0**　　(2) **0**

(1) $f(x)=x\sqrt{3-x^2}$ とおくと，

$f(-x)=-x\sqrt{3-(-x)^2}$

$=-x\sqrt{3-x^2}=-f(x)$

より，$f(x)$ は奇関数であるから，与式$=0$

(2) $f(x)=x^2\sin 2x$ とおくと，

$f(-x)=(-x)^2\sin(-2x)$

$=-x^2\sin 2x=-f(x)$

より，$f(x)$ は奇関数であるから，与式$=0$

③**10-B-12**

次の不定積分を求めよ。

(4)* $\int\frac{dx}{\sin x}$

解答　$\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$

与式$=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$

$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\frac{dx}{dt}=1$

与式$=\int\frac{1}{1-t^2}\cdot(-1)\,dt=\int\frac{1}{t^2-1}\,dt$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\frac{1}{2}(\log|t-1|-\log|t+1|)+C$

$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$

③**10-B-13**

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\frac{1}{e^x+1}\,dx$　　●弘前大●

(2) $\int\sqrt{1+e^x}\,dx$　　●小樽商科大●

(3) $\int\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$　　●山梨大●

解答　(1) $\log\frac{e^x}{e^x+1}+C$　(2) $2\sqrt{1+e^x}+\log\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$　(3) $\frac{x}{1+x^2}+C$

(1)　　(2)　　(3)

$e^x=t$ とおくと，$e^x\dfrac{dx}{dt}=1$

よって，$dx=\dfrac{1}{e^x}\,dt=\dfrac{1}{t}\,dt$

与式$=\displaystyle\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t+1}\,dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\log|t|-\log|t+1|+C$

$=\log\left|\dfrac{t}{t+1}\right|+C$

$\sqrt{1+e^x}=t$ とおくと，$1+e^x=t^2$

$e^x\dfrac{dx}{dt}=2t$

よって，$dx=\dfrac{1}{e^x}\cdot 2t\,dt=\dfrac{2t}{t^2-1}\,dt$

与式$=\displaystyle\int t\cdot\frac{2t}{t^2-1}\,dt=\int\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=2t+\log|t-1|-\log|t+1|+C$

$=2t+\log\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|+C$

$x=\tan\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

与式$=\displaystyle\int(1-\tan^2\theta)\cdot\cos^4\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$=\displaystyle\int(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d\theta$

$=\displaystyle\int\cos 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta+C$

ここで，$\sin 2\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\dfrac{2x}{1+x^2}$

だから，与式$=\dfrac{x}{1+x^2}+C$

③**10-B-14**

次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|\,dx$$

解答　4

与式$=\displaystyle\int_0^{\pi}\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|dx$

$=\displaystyle 2\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|dx$

ここで，$\left|\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$ の周期は π である

から，

与式$=\displaystyle 2\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$=\displaystyle 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=4$

別解　$0\leqq x\leqq\pi$ において，

$$\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|$$

$$=\begin{cases}-2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)\\ 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) & \left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi\right)\end{cases}$$

与式$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$

$\displaystyle+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$

$=\displaystyle\left[2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=4$

C 問題

③10-C-1

$I_n=\int(\log x)^n dx$ とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$I_n=x(\log x)^n-nI_{n-1}$ (n は整数，$n\geqq 1$)

解答

$I_n=\int(\log x)^n dx=\int(x)'(\log x)^n dx=x(\log x)^n-n\int x(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$=x(\log x)^n-n\int(\log x)^{n-1}dx=x(\log x)^n-nI_{n-1}$

③10-C-2

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ ($n=0$，1，2，…) について，次の問いに答えよ。

(1) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx$ ($n=2$，3，…) に部分積分法を用いて，

$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ($n=2$，3，…) が成り立つことを示せ。

(2) (1)の結果を用いて，I_5 および I_6 の値を求めよ。

解答 (1)下参照　(2) $I_5=\frac{8}{15}$，$I_6=\frac{5}{32}\pi$

$n=2$，3，… のとき，

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)'dx$

$=\left[\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$

$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right)$

$=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$

$nI_n=(n-1)I_{n-2}$

よって，$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ($n=2$，3，……)

③10-C-3

負でない整数 n に対して，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とおくとき，

I_1，I_2，I_3 の値を求めよ。 ●新潟大●

解答 $I_1=\frac{1}{2}\log 2$，$I_2=1-\frac{\pi}{4}$，$I_3=\frac{1}{2}(1-\log 2)$

(1) $I_{n+2}+I_n$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^{n+2}x+\tan^n x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(\tan^2 x+1)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$

ここで，$\tan x=t$ とおくと，

$\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$

$\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$
t	$0\longrightarrow 1$

よって，$I_{n+2}+I_n=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

(2) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(-\cos x)'}{\cos x}dx$

$=-\left[\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\log 2$

$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

また，(1)の結果より，$I_3+I_1=\frac{1}{2}$

よって，$I_3=\frac{1}{2}-I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2$

③**10-C-4**

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ の値を求めよ。●山梨医科大●

解答　$\frac{\pi}{4}$

$x=\frac{\pi}{2}-t$ より，$\frac{dx}{dt}=-1$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$\sin x=\cos t$，$\cos x=\sin t$

であるから，与式$=I$ とすると，

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\cdot(-1)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt$$

よって，

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2} \qquad I=\frac{\pi}{4}$$

③**10-C-5**

n を自然数とするとき，次の定積分の値を求めよ。

(1)　$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x|\sin x|\,dx$　　(2)　$\int_0^{\pi} x|\sin nx|\,dx$

(3)*　$\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$

解答　(1)　$(2n-1)\pi$　　(2)　π　　(3)　$\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}(1-e^{-n\pi})$

(1)　(i)　n が奇数のとき

$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において，$\sin x \geqq 0$ より，

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x|\sin x|\,dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x\sin x\,dx$$

$$=\Big[x(-\cos x)\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(-\cos x)\,dx$$

$$=n\pi+(n-1)\pi=(2n-1)\pi$$

(ii)　n が偶数のとき

$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において，

$\sin x \leqq 0$ より，

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x|\sin x|\,dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x(-\sin x)\,dx$$

$$=\Big[x\cos x\Big]_{(n-1)\pi}^{n\pi}-\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\cos x\,dx$$

$$=n\pi+(n-1)\pi=(2n-1)\pi$$

(i)，(ii)より，$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} x|\sin x|\,dx=(2n-1)\pi$

(2)　$nx=t$ とおくと，$n\frac{dx}{dt}=1$ より，

x	$0 \longrightarrow \pi$
t	$0 \longrightarrow n\pi$

$$\int_0^{\pi} x|\sin nx|\,dx=\int_0^{n\pi} \frac{t}{n}|\sin t|\cdot\frac{1}{n}\,dt$$

$$=\frac{1}{n^2}\int_0^{n\pi} t|\sin t|\,dt$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t|\sin t|\,dt$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\pi=\frac{1}{n^2}\cdot n^2\pi=\pi$$

〔(1)の結果による〕

(3)　$\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx\right|$$

ここで部分積分法を用いて，

$$\text{与式}=\sum_{k=1}^{n}\left|\Big[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(1+e^{\pi})e^{-k\pi}$$

〔$\cos k\pi=(-1)^k$ を用いた〕

$$=\frac{1+e^{\pi}}{2}\cdot\frac{e^{-\pi}(1-e^{-n\pi})}{1-e^{-\pi}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}(1-e^{-n\pi})$$

③**10-C-6**

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$に対して，$I_n=\int_0^1 x^n e^{2x}dx$ とする。このとき，

(1)　$I_0=\int_0^1 e^{2x}dx$ の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 1$ のとき，I_n を n と I_{n-1} を用いて表せ。

(3)　$I_4=\int_0^1 x^4 e^{2x}dx$ の値を求めよ。

(4)　定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x\cos x)e^{2\sin x}dx$ の値を求めよ。　●香川大●

解答　(1)　$I_0=\frac{1}{2}(e^2-1)$　(2)　$I_n=\frac{1}{2}e^2-\frac{n}{2}I_{n-1}$　(3)　$I_4=\frac{1}{4}(e^2-3)$　(4)　$\frac{1}{8}(-e^2+15)$

(1)　$I_0=\int_0^1 e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}(e^2-1)$

(2)　$n\geqq 1$ のとき，

$I_n=\int_0^1 x^n e^{2x}dx=\int_0^1 x^n\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^n e^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 nx^{n-1}e^{2x}dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\frac{n}{2}I_{n-1}$

(3)　(1)，(2)より，

$I_1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}I_0=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(e^2-1)$

$=\frac{1}{4}(e^2+1)$

$I_2=\frac{1}{2}e^2-\frac{2}{2}I_1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2+1)$

$=\frac{1}{4}(e^2-1)$

$I_3=\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}I_2=\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}(e^2-1)$

$=\frac{1}{8}(e^2+3)$

$I_4=\frac{1}{2}e^2-\frac{4}{2}I_3=\frac{1}{2}e^2-2\cdot\frac{1}{8}(e^2+3)$

$=\frac{1}{4}(e^2-3)$

(4)　$t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos x\,dx$

また，

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$0\longrightarrow 1$

これより，

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x\cos x)e^{2\sin x}dx=\int_0^1 t^5 e^{2t}dt=I_5$

よって，(2)，(3)より，

$I_5=\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}I_4=\frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}(e^2-3)$

$=\frac{1}{8}(-e^2+15)$

③**10-C-7**

$m,\ n$ を非負整数とする。このとき，$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ を計算せよ。

解答　$\dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$

第 11 章　数学Ⅲの積分の応用（１）

《学習項目》

・面積
・回転体体積公式
・絶対値関数の積分
・非回転体体積公式
・文字設定と面積
・回転軸をまたぐ部分の回転体
・円筒分割（バウムクーヘン分割）
・パップス・ギュルダンの定理
・不等式で表された立体の体積
・斜回転体体積公式

A 問題

③**11-A-1**

次の曲線または直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$　　(2)　$y=\sin x+1$，$y=\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi\right)$

(3)　$y=3^x$，$y=2x+1$　　(4)*　$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$，$y=1$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(5)*　$y=\sqrt{4-x^2}$，$y=\sqrt{3}x$，y 軸

解答　(1)　$\log 2-\dfrac{1}{3}$　(2)　$\dfrac{3}{2}\pi+2$　(3)　$2-\dfrac{2}{\log 3}$　(4)　$\dfrac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$　(5)　$\dfrac{\pi}{3}$

き方　(1)　$f(x)=x^2$，$g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ とおくと，

$$f(x)-g(x)=x^2-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x(x-1)(x^2+x+2)}{x^2+1}$$

よって，２曲線の交点の x 座標は，

$x=0$，1

$0\leqq x\leqq 1$ では $f(x)\leqq g(x)$ であるから，求める面積 S は，

$$S=\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}-x^2\right)dx=\left[\log(x^2+1)-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\log 2-\frac{1}{3}$$

(2)　$f(x)=\sin x+1$，$g(x)=\cos x$ とおくと，

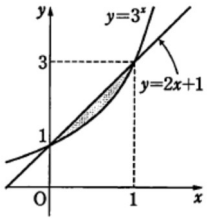
$$f(x)-g(x)=\sin x-\cos x+1=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$$

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ における２曲線の交点の x 座標は，$x=0$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ では，$f(x)\geqq g(x)$ であるから，求める面積 S は，

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(\sin x+1-\cos x)dx=\left[-\cos x+x-\sin x\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{3}{2}\pi+2$$

(3)　曲線と直線の囲む部分を図示すると次のようになる。



よって，求める面積 S は，

$$S=\int_0^1(2x+1-3^x)dx=\left[x^2+x-\frac{3^x}{\log 3}\right]_0^1=2-\frac{2}{\log 3}$$

---

(4)　$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$，$g(x)=1$ とおくと，$f(x)-g(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における曲線と直線の交点の x 座標は，

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ より，$x=0$，$\dfrac{2}{3}\pi$，2π

$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ では $f(x)\geqq g(x)$，

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq x\leqq 2\pi$ では $f(x)\leqq g(x)$

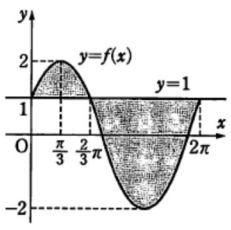
であるから求める面積 S は，

$$S=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}(1-\sqrt{3}\sin x-\cos x)dx$$

$$=\left[-\sqrt{3}\cos x+\sin x-x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[x+\sqrt{3}\cos x-\sin x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi}$$

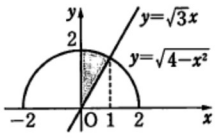
$$=\frac{2}{3}\pi+4\sqrt{3}$$

注　２曲線の囲む部分を図示すると右図のようになる。



---

(5) $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x$



を解くと，$x=1$

よって，右図より，

半径 2，中心角 $\frac{\pi}{6}$

の扇形の面積を考えて，求める面積 S は，

$S=\int_0^1(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x)dx$

$=\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx-\sqrt{3}\int_0^1 x\,dx$

ここで，$x=2\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおく

と，$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$S=\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$

③**11-A-2**

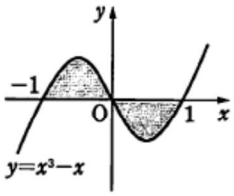
次の曲線や直線によって囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) $y=x^3-x$，x 軸　　(2) $y=4-x^2$，$y=2-x$

解答　(1) $\frac{16}{105}\pi$　　(2) $\frac{108}{5}\pi$

解き方　求める体積を V とする。

(1) $y=x^3-x$ は奇関数であるから，グラフは原点に関して対称である。



x 軸との交点の x 座標は，

$x=-1,\ 0,\ 1$

$V=\pi\int_{-1}^1 y^2dx=2\pi\int_0^1 y^2dx$

$=2\pi\int_0^1(x^6-2x^4+x^2)dx=\frac{16}{105}\pi$

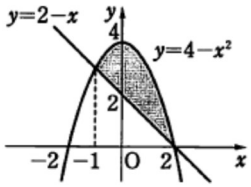
(2) 交点の x 座標は，

$x=-1,\ 2$

$-1\leqq x\leqq 2$ では，

$2-x\leqq 4-x^2$

右図より，



$V=\pi\int_{-1}^2(4-x^2)^2dx-\pi\int_{-1}^2(2-x)^2dx$

$=\pi\int_{-1}^2\{(4-x^2)^2-(2-x)^2\}dx$

$=\pi\int_{-1}^2(x^4-9x^2+4x+12)dx=\frac{108}{5}\pi$

③**11-A-3**

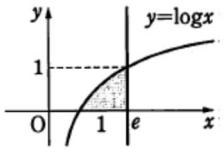
次の曲線や直線によって囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) $y=\log x$，x 軸，$x=e$　　(2) $y=2x^2$，$y=x^2+1$

解答　(1) $\frac{\pi}{2}(e^2+1)$　　(2) $\frac{\pi}{2}$

解き方　求める体積を V とする。

(1) $y=\log x$ より，



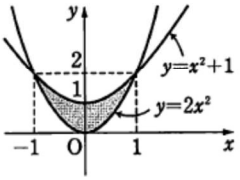
$x=e^y$ であるから，

$V=\pi\int_0^1 e^2dy-\pi\int_0^1(e^y)^2dy$

$=\pi\int_0^1(e^2-e^{2y})dy=\pi\left[e^2y-\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1$

$=\frac{\pi}{2}(e^2+1)$

(2)



$V=\pi\int_0^2\frac{y}{2}dy-\pi\int_1^2(y-1)dy$

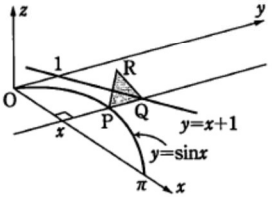
$=\pi\left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2-\pi\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_1^2=\frac{\pi}{2}$

③**11-A-4**

点Pは曲線 $y=\sin x$ 上を動くものとする。点Pを通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x+1$ との交点をQとする。線分PQを含み座標平面に垂直な平面上に点Rをとり，正三角形PQRを作る。点Pが原点から点 $(\pi,\ 0)$ まで動くとき，△PQRが通過してできる立体の体積を求めよ。ただし，点Rは座標平面に関して常に同じ側にとることにする。　●千葉大●

解答　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{\pi^3}{3}+\pi^2-\dfrac{\pi}{2}-4\right)$

解き方



$P(x,\ \sin x)$ とおくと，$Q(x,\ x+1)$ であるから，$PQ=x+1-\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$

正三角形PQRの面積を $S(x)$ とすると，

$$S(x)=\frac{1}{2}PQ^2\sin 60^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+1-\sin x)^2$$

よって，求める立体の体積を V とすると，

$$V=\int_0^\pi S(x)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi(x+1-\sin x)^2dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi\{(x+1)^2-2(x+1)\sin x+\sin^2 x\}dx$$

ここで，$\int_0^\pi(x+1)^2dx=\left[\dfrac{(x+1)^3}{3}\right]_0^\pi$

$$=\frac{\pi^3}{3}+\pi^2+\pi$$

$$\int_0^\pi(x+1)\sin x\,dx=\int_0^\pi(x+1)(-\cos x)'dx$$
$$=\left[(x+1)(-\cos x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx$$
$$=(\pi+2)+\left[\sin x\right]_0^\pi=\pi+2$$

$$\int_0^\pi\sin^2 x\,dx=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

よって，

$$V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{\pi^3}{3}+\pi^2+\pi\right)-2(\pi+2)+\frac{\pi}{2}\right\}$$

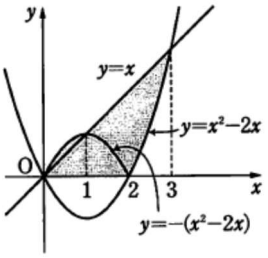
B 問題

③**11-B-1**

曲線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x$ によって囲まれた部分を，x 軸の周りに一回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　$\dfrac{20}{3}\pi$

解き方　回転させる図形の，x 軸より下側にある部分を，x 軸に関して対称に移した，右図の影の部分を考える。求める立体



転させてできる立体の体積に等しい。

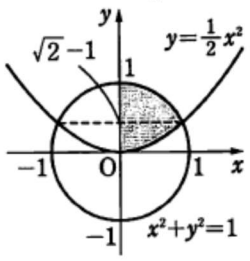
よって，求める体積 V は，

$$V=\pi\int_0^1\{-(x^2-2x)\}^2dx$$
$$+\pi\int_1^3x^2dx-\pi\int_2^3(x^2-2x)^2dx$$
$$=\frac{8}{15}\pi+\frac{26}{3}\pi-\frac{38}{15}\pi=\frac{20}{3}\pi$$

③**11-B-2**

xy 平面の第1象限内で，y 軸と円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ とが囲む部分を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　$\dfrac{7-4\sqrt{2}}{3}\pi$



第1象限での2曲線の交点の y 座標は，

$y=\sqrt{2}-1$

よって，求める体積 V は，

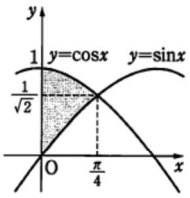
$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}-1}2y\,dy+\pi\int_{\sqrt{2}-1}^1(1-y^2)dy$$
$$=\pi\left[y^2\right]_0^{\sqrt{2}-1}+\pi\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_{\sqrt{2}-1}^1=\frac{7-4\sqrt{2}}{3}\pi$$

③**11-B-3**

409　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ および y 軸で囲まれる部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。●宮崎大●

解答　$\dfrac{(\sqrt{2}\,\pi-4)\pi}{2}$

解き方　2 曲線 $y=\sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$，$y=\cos x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を，それぞれ，V_1，V_2 とすると，



$$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2\,dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\frac{dy}{dx}\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos x\,dx$$
$$V_2=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} x^2\,dy=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} x^2\frac{dy}{dx}\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin x\,dx$$

よって，求める体積を V とすると，

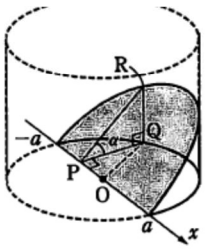
$$V=V_1+V_2=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2(\cos x+\sin x)\,dx$$
$$=\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$
$$=\sqrt{2}\,\pi\left\{\left[-x^2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx\right\}$$
$$=2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$
$$=2\sqrt{2}\,\pi\left[x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}\pi-4)\pi}{2}$$

③**11-B-4**

底面の半径が a の直円柱がある。底面の直径を通り，底面と角 α をなす平面でこの直円柱を側面を通るように切ったとき，この平面と直円柱の底面および側面で囲まれた立体の体積 V を求めよ。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

解答　$\dfrac{2}{3}a^3\tan\alpha$　395 が別解

底面の円の中心を原点 O とし，切り口の直径を x 軸にとる。x 軸上の点 $P(x)$ $(|x| \leqq a)$ を通り，x 軸に垂直な平面による切り口の三角形 PQR の面積を $S(x)$ とすると，



右図において，

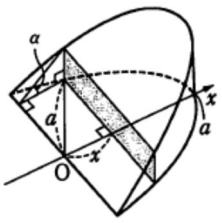
$PQ=\sqrt{a^2-x^2}$，$QR=PQ\tan\alpha$ であるから，

$$S(x)=\frac{1}{2}PQ\cdot QR=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2-x^2})^2\tan\alpha$$

よって，$V=\displaystyle\int_{-a}^{a} S(x)\,dx=2\int_0^a \frac{1}{2}(a^2-x^2)\tan\alpha\,dx=\tan\alpha\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3\tan\alpha$

（別解）

解き方　x 軸上の座標 x $(0 \leqq x \leqq a)$ の点を通り，x 軸に垂直な平面で切ったときの切り口の長方形の面積を $S(x)$ とすると，



$$S(x)=2\sqrt{a^2-x^2}\cdot x\tan\alpha$$

よって，$V=\displaystyle\int_0^a S(x)\,dx$

$$=\int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\tan\alpha\,dx$$

ここで，$a^2-x^2=u$ とおくと，$-2x\dfrac{dx}{du}=1$

x	$0 \longrightarrow a$
u	$a^2 \longrightarrow 0$

ゆえに，$V=\tan\alpha\displaystyle\int_{a^2}^0 \sqrt{u}\,(-1)\,du$

$$=\tan\alpha\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2}$$
$$=\frac{2}{3}a^3\tan\alpha$$

③**11-B-5**

曲線 $x=\sin t,\ y=t\cos t$ $\left(0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{\pi^2-4}{16}$

よって，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ では，$y \geqq 0$ であるから，求める面積 S は，

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\cdot\cos t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1+\cos 2t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos 2t\,dt$$

x 軸との交点の座標を与える t は，

$y=0$ より，$t=0,\ \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{dx}{dt}=\cos t,\ \dfrac{dy}{dt}=\cos t-t\sin t$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ を満たす t の値を $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

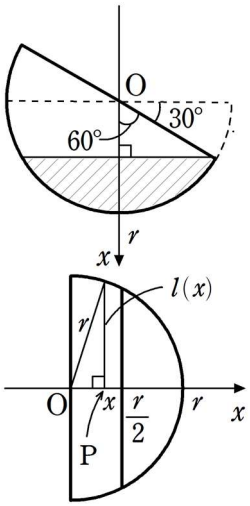
とすると，x, y の増減表は，次のようになる。

t	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
x	0	↗	$\sin\alpha$	↗	1
y	0	↗	$\alpha\cos\alpha$	↘	0

③**11-B-6**

半径 r の半球形の容器に水が満たされている。この容器を静かに $30°$ だけ傾けると，どれだけの水が「残る」かを求めよ。

解 答　$\dfrac{7}{8}\pi r^3$



容器を $30°$ だけ傾けたときの水面の中心を通り，水面に垂直な直線上に x 軸をとり，半球の中心を原点 O とする。また，x 軸上の点 $\mathrm{P}(x)$ を通り，x 軸に垂直な平面による半球の断面の半径を $l(x)$ とする。

原点 O から水面までの距離は $r\cos 60°=\dfrac{1}{2}r$

また $\{l(x)\}^2=r^2-x^2$　よって，「残る」水の体積は

$$\int_{\frac{r}{2}}^{r}\pi\{l(x)\}^2dx=\pi\int_{\frac{r}{2}}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{r}{2}}^{r}=\frac{7}{8}\pi r^3$$

③**11-B-7**

(1)　媒介変数 t を用いて表された曲線 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ の $0\leq t\leq 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

(2)　$a>0$ とする。$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ において，サイクロイド

$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$

を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　●日本女子大●

解 答　(1) $\boldsymbol{3\pi a^2}$,　(2) $\boldsymbol{5\pi^2a^3}$

x 軸との交点を与える t の値を求めると，$y=0$ より，$\cos t=1\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$

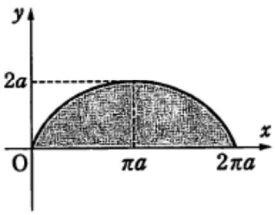
ゆえに，$t=0,\ 2\pi$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ における x，y の増減表は，

t	0	…	π	…	2π
x	0	↗	πa	↗	$2\pi a$
y	0	↗	$2a$	↘	0

$\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\ \dfrac{dy}{dt}=a\sin t$

から，右のようになる。



よって，この曲線は，右図のようになる。

$0\leqq x\leqq 2\pi a$ で，$y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は，

$$S=\int_0^{2\pi a}y\,dx=\int_0^{2\pi}y\frac{dx}{dt}\,dt$$

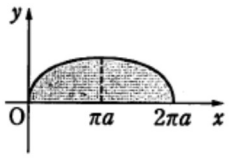
$$=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\left[t-2\sin t+\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{3\pi a^2}$$

$$=2\pi a^3\int_0^{\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta$$

ここで，$\int_0^{\pi}d\theta=\pi$，$\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta=0$

解き方　サイクロイドは，直線 $x=\pi a$ に関して対称であるから，求める体積 V は，



$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2dx=2\pi\int_0^{\pi a} y^2dx$$

ここで，$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$

x	$0 \longrightarrow \pi a$
θ	$0 \longrightarrow \pi$

$$V=2\pi\int_0^{\pi} y^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$

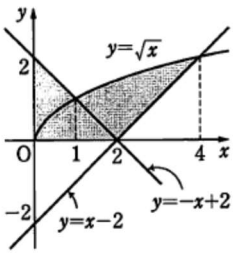
$$=2\pi\int_0^{\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\cdot a(1-\cos\theta)d\theta$$

③11-B-8（練習用）

曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x-2$ および y 軸によって囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解 答　$\dfrac{43}{6}\pi$

解き方　求める体積 V は，回転させる図形の x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に移した，右図の影の部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積に等しい。よって，



$$V=\pi\int_0^1(-x+2)^2dx+\pi\int_1^4(\sqrt{x})^2dx$$
$$-\pi\int_2^4(x-2)^2dx$$

$$=\frac{7}{3}\pi+\frac{15}{2}\pi-\frac{8}{3}\pi=\frac{43}{6}\pi$$

C 問題

③11-C-1

次の曲線または直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{\log x}{x^2}$，$y=\dfrac{1}{4}\log x$ ●神戸大●　(2)*　$y=\log x+(\log x)^2$，x 軸

●神戸大　●東京学芸大

解答　(1)　$\dfrac{3}{4}-\log 2$　　(2)　$\dfrac{3}{e}-1$

解き方　(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$，$g(x)=\dfrac{1}{4}\log x$

とおくと，2 曲線の交点の x 座標は，

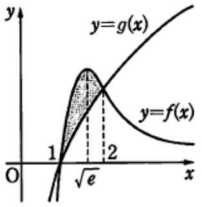
$\dfrac{(x+2)(x-2)}{4x^2}\log x=0$　$(x>0)$

$x=1,\ 2$

よって，

求める面積 S は，

$$S=\int_1^2\left(\frac{\log x}{x^2}-\frac{1}{4}\log x\right)dx$$
$$=\int_1^2\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx-\frac{1}{4}\int_1^2\log x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{x}\log x-\frac{1}{x}\right]_1^2-\frac{1}{4}\left[x\log x-x\right]_1^2$$
$$=\frac{3}{4}-\log 2$$



(2)　x 軸との交点の x 座標は，

$y=0$ より，$\log x(\log x+1)=0$

$x=1,\ \dfrac{1}{e}$　　$y'=\dfrac{1+2\log x}{x}$

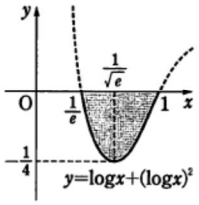
$y'=0$ より，$x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

x	$\frac{1}{e}$	…	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	…	1
y'		−	0	+	
y	0	↘	極小	↗	0

増減表から，$\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq 1$ では，$y\leqq 0$ であるから，求める面積 S は，

$$S=-\int_{\frac{1}{e}}^1 y\,dx=\int_1^{\frac{1}{e}}\{\log x+(\log x)^2\}dx$$
$$=\left[x(\log x)^2-x\log x+x\right]_1^{\frac{1}{e}}=\frac{3}{e}-1$$

注　グラフは下図のようになる。



③11-C-2

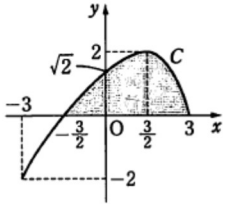
xy 平面上に，$C:\begin{cases}x=3\cos 2t\\ y=2\sin 3t\end{cases}\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される曲線 C がある。曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。　●東京理科大●

解答　$\dfrac{18\sqrt{3}}{5}$

解き方　$\dfrac{dx}{dt}=-6\sin 2t$，$\dfrac{dy}{dt}=6\cos 3t$

t の関数 x，y の増減表は下のようになる。

t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{2}$
x	3	↘	$\frac{3}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{3}{2}$	↘	−3
y	0	↗	2	↘	$\sqrt{2}$	↘	0	↘	−2

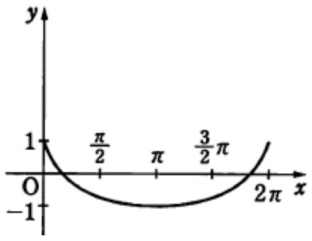


曲線の概形から，求める面積 S は，

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^3 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^0 y\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^0 2\sin 3t\cdot(-6\sin 2t)\,dt$$
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 3t\sin 2t\,dt$$
$$=-6\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos 5t-\cos t)\,dt$$
$$=6\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos t-\cos 5t)\,dt$$
$$=6\left[\sin t-\frac{\sin 5t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

③11-C-3

媒介変数 t を用いて $x=t-\sin t$,
$y=\cos t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ と表される曲線を C とする。
(1)　C と x 軸との交点の x 座標を求めよ。
(2)　C と x 軸および 2 直線 $x=0$, $x=2\pi$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和を求めよ。



●北見工業大

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{2}-1$, $\dfrac{3}{2}\pi+1$　　(2)　4

解き方　(1)　x 軸との交点は $y=0$ より
$\cos t=0$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ から, $t=\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3}{2}\pi$
これらを $x=t-\sin t$ に代入して,
$x=\dfrac{\pi}{2}-1$, $\dfrac{3}{2}\pi+1$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$
求める面積の和は

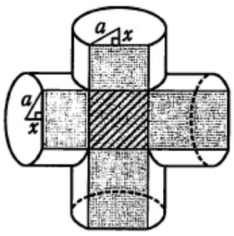
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-1} y\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{3}{2}\pi+1} y\,dx+\int_{\frac{3}{2}\pi+1}^{2\pi} y\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(1-\cos t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos t(1-\cos t)dt+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos t(1-\cos t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos t-\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\cos t-\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\left(\cos t-\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$=\left[\sin t-\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin t-\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}+\left[\sin t-\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$
$$=4$$

③**11-C-4**

半径がともに a の 2 つの円柱の軸が直交して，互いにつきぬけているとき，これらの円柱の共通部分の体積を求めよ。　●明治薬科大●

解答　$\dfrac{16}{3}a^3$

解き方　2 つの円柱の軸の交点を原点とし，2 つの軸が定める平面に垂直な直線を x 軸にとる。座標 x $(|x|\leqq a)$ の点を通り，x 軸に垂直な平面で切った切り口は上図のようになり，共通部分の断面は正方形になる。その断面積を $S(x)$ とすると，正方形の 1 辺は $2\sqrt{a^2-x^2}$ であるから，$S(x)=(2\sqrt{a^2-x^2})^2=4(a^2-x^2)$
よって，求める体積を V とすると，



$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=2\int_0^a 4(a^2-x^2)dx$$
$$=8\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{16}{3}a^3$$

③**11-C-5**

高さが 1 で，底面が xy 平面上にのっている立体があり，
$x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とこの立体との交わりは
$\{(x,\ y,\ z)|x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ (x+t+1)(y+t+1)\leqq 4\}$
である。この立体の体積 V を求めよ。　●姫路工業大●

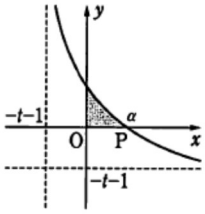
解答　$\dfrac{19}{3}-8\log 2$

解き方　$x\geqq 0$，$t\geqq 0$ より $x+t+1>0$

$(x+t+1)(y+t+1)\leqq 4$

から，

$y\leqq \dfrac{4}{x+t+1}-t-1$



x 軸との交点を $\mathrm{P}(\alpha,\ 0)$ とすると，

$\alpha=\dfrac{4}{t+1}-t-1$ ……①

これより，$z=t$ による断面積を $S(t)$ とすると，

$S(t)=\displaystyle\int_0^{\alpha}\left(\frac{4}{x+t+1}-t-1\right)dx$

$=\left[4\log|x+t+1|-(t+1)x\right]_0^{\alpha}$

$=4\log(\alpha+t+1)-4\log(t+1)-(t+1)\alpha$

ここに①を代入して，

$S(t)=-8\log(t+1)+8\log 2+(t+1)^2-4$

したがって，求める体積 V は

$V=\displaystyle\int_0^1 S(t)dt=\left[-8\{(t+1)\log(t+1)-t\}\right.$

$\left.+(8\log 2)t+\dfrac{1}{3}(t+1)^3-4t\right]_0^1$

$=\dfrac{19}{3}-8\log 2$

③**11-C-6**

(1)　直線 l は 2 曲線 $C_1:y=e^x$，$C_2:y=e^{2x}$ の両方に接するとする。このとき，l と C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。　●東北大●

解 答　$\dfrac{3}{16}e-\dfrac{1}{2}$

解き方　(1)　C_1 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ e^{\alpha})$ における接線は，

$y=e^{\alpha}(x-\alpha)+e^{\alpha}$

$=e^{\alpha}x+(1-\alpha)e^{\alpha}$ ……①

C_2 上の点 $\mathrm{Q}(\beta,\ e^{2\beta})$ における接線は，

$y=2e^{2\beta}(x-\beta)+e^{2\beta}$

$=2e^{2\beta}x+(1-2\beta)e^{2\beta}$ ……②

①と②が一致するとき，これが共通接線より，

$e^{\alpha}=2e^{2\beta}$ ……③

$(1-\alpha)e^{\alpha}=(1-2\beta)e^{2\beta}$ ……④

③を④に代入して，$(1-\alpha)2e^{2\beta}=(1-2\beta)e^{2\beta}$

両辺を $e^{2\beta}$ で割って，

$2-2\alpha=1-2\beta$ より $2\beta=2\alpha-1$

これを③に代入して，$e^{\alpha}=2e^{2\alpha-1}$

$1=2e^{\alpha-1}$

両辺の対数をとって，$\alpha=1-\log 2$

また，$e^{\alpha}=\dfrac{e}{2}$ より共通接線は，

$y=\dfrac{e}{2}(x+\log 2)$

これから求める面積は $\alpha=1-\log 2$，

$\beta=\dfrac{1}{2}-\log 2$ $(\beta<\alpha)$ として，

$\displaystyle\int_{\beta}^{0}e^{2x}dx+\int_0^{\alpha}e^x dx-\int_{\beta}^{\alpha}\frac{e}{2}(x+\log 2)dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}e^{2x}\right]_{\beta}^{0}+\left[e^x\right]_0^{\alpha}-\dfrac{e}{2}\left[\dfrac{x^2}{2}+x\log 2\right]_{\beta}^{\alpha}$

$=\dfrac{1}{2}(1-e^{2\beta})+(e^{\alpha}-1)-\dfrac{e}{4}(\alpha^2-\beta^2)$

$-\dfrac{e}{2}(\alpha-\beta)\log 2$

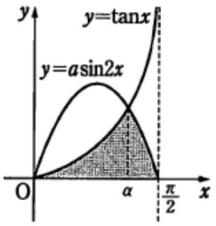
$=\dfrac{3}{16}e-\dfrac{1}{2}$

③**11-C-7**

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，2 曲線 $y=\tan x$，$y=a\sin 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が 1 となるように，正の定数 a の値を求めよ。　●群馬大●

解 答　$a=\dfrac{e}{2}$

) $y=\tan x$ と
$y=a\sin 2x$ の交点
の x 座標を
$x=\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$
とすると，



$\tan\alpha=a\sin 2\alpha$ より，
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=a\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$ から，

$\cos^2\alpha=\frac{1}{2a}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ から，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2a}}$，

$\cos^2\alpha<1$ より，$\frac{1}{2a}<1$

$a>\frac{1}{2}$

影をつけた部分の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\alpha}\tan x\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}a\sin 2x\,dx$$
$$=\left[-\log|\cos x|\right]_0^{\alpha}-\left[\frac{a}{2}\cos 2x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\log|\cos\alpha|-\frac{a}{2}(-1-\cos 2\alpha)$$
$$=-\log|\cos\alpha|+\frac{a}{2}\cdot 2\cos^2\alpha$$
$$=-\log\frac{1}{\sqrt{2a}}+a\cdot\frac{1}{2a}$$
$$=\frac{1}{2}\log 2a+\frac{1}{2}$$

$S=1$ より $\log 2a=1$　　$a=\frac{e}{2}$

③**11-C-8**

xyz 空間の 2 点 $(0,\ -1,\ 2)$，$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 4\right)$ を通る直線を l とし，xy 平面内で，$y=e^{-x}$ のグラフ，x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ によって囲まれた平面図形を D とする。

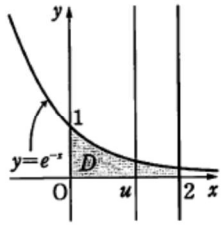
(1)　平面 $x=u$ $(0\leqq u\leqq 2)$ と直線 l の交点を P とし，図形 D との共通部分である線分を QR とする。このとき $\triangle$PQR の面積を求めよ。

(2)　u が $0\leqq u\leqq 2$ の範囲を動くとき，(2)の $\triangle$PQR が動いてできる立体の体積を求めよ。　●青山学院大●

解答　(1)　$e^{-u}(2u+1)$　　(2)　$3-\frac{7}{e^2}$

(1)　A$(0,\ -1,\ 2)$，B$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 4\right)$

より，
$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\ 2,\ 2\right)$
直線 l 上の点を P
とすると，
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$
ここで，P$(u,\ y,\ z)$
とおくと，



$(u,\ y,\ z)=(0,\ -1,\ 2)+t\left(\frac{1}{2},\ 2,\ 2\right)$ から，

$u=\frac{1}{2}t$，$y=2t-1$，$z=2t+2$

これより，点 P を u で表すと，
P$(u,\ 4u-1,\ 4u+2)$
よって，QR を底辺とするとき，高さは
$4u+2$ だから，求める面積を $S(u)$ とする
と，$S(u)=\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot(4u+2)$
ここで，$\mathrm{QR}=e^{-u}$ より，
$S(u)=e^{-u}(2u+1)$

(2)　求める体積を V とすると，

$$V=\int_0^2 S(u)du=\int_0^2 e^{-u}(2u+1)du$$
$$=\left[-e^{-u}(2u+1)\right]_0^2+\int_0^2 2e^{-u}du$$
$$=3-\frac{7}{e^2}$$

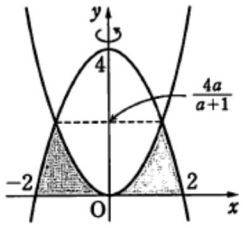
③**11-C-9**

2 つの放物線 $y=4-x^2$ と $y=ax^2$ $(a>0)$ および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。●信州大●

解答　$\frac{8a}{a+1}\pi$

考え方 (1)　$y=4-x^2$ と $y=ax^2$ の交点の y 座標は x^2 を消去して，

$$y=\frac{4a}{a+1}$$



求める立体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^{\frac{4a}{a+1}}\left(4-y-\frac{y}{a}\right)dy$$

$$=\pi\int_0^{\frac{4a}{a+1}}\left(4-\frac{a+1}{a}y\right)dy$$

$$=\pi\left[4y-\frac{a+1}{2a}y^2\right]_0^{\frac{4a}{a+1}}=\frac{8a}{a+1}\pi$$

③**11-C-10**

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ の交点のうち原点 O 以外の点を A とする。放物線の O と A を両端とする部分を曲線 C とする。線分 $\overline{OA}$ 上の点を P とし，$\overline{OP}$ の長さを s とする。P を通り $\overline{OA}$ に垂直な直線と C との交点を $Q(t,\ t^2)$ とする。

(1)　s と t の関係式を求めよ。

(2)　$\overline{PQ}$ を $y=x$ の周りに 1 回転させた円の面積を t で表せ。

(3)　$\overline{OA}$ と C で囲まれた図形を直線 $y=x$ の周りに 1 回転させたときの回転体の体積を求めよ。　●名古屋市立大●

解答　(1)　$s=\dfrac{t^2+t}{\sqrt{2}}$　(2)　$\pi\left(\dfrac{1}{2}t^4-t^3+\dfrac{1}{2}t^2\right)$　(3)　$\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$

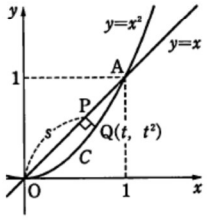
(1)　$\overline{OP}=s$ より点 P の座標は

$P\left(\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

$\overline{PQ}\perp\overline{OA}$ より，

$\dfrac{t^2-\frac{s}{\sqrt{2}}}{t-\frac{s}{\sqrt{2}}}=-1$ から

$$s=\frac{t^2+t}{\sqrt{2}}$$



(2)　求める面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\pi\overline{PQ}^2=\pi\left\{\left(t-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(t^2-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$

この式に $s=\dfrac{t^2+t}{\sqrt{2}}$ を代入して，

$$S(t)=\pi\left\{\left(t-\frac{t^2+t}{2}\right)^2+\left(t^2-\frac{t^2+t}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}t^4-t^3+\frac{1}{2}t^2\right)$$

(3)　$\overline{OA}=\sqrt{2}$ より，求める体積を V とすると，$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(t)ds$

$$ds=\frac{2t+1}{\sqrt{2}}dt \qquad \begin{array}{c|ccc} s & 0 & \longrightarrow & \sqrt{2} \\ t & 0 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{1}{2}t^4-t^3+\frac{1}{2}t^2\right)\cdot\frac{2t+1}{\sqrt{2}}dt$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(2t^5-3t^4+t^2)dt$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}t^6-\frac{3}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

練習用問題

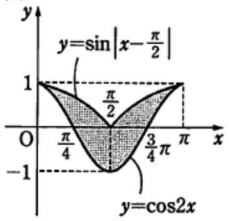
③**11-C-11**

$0 \leqq x \leqq \pi$ において，2 曲線 $y=\sin\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$，$y=\cos 2x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

●名古屋工業大

解答　$\frac{\pi}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$

(1)　図 1



$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

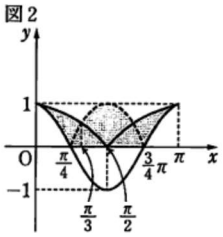
$\sin\left|x-\frac{\pi}{2}\right|=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$\frac{\pi}{2}<x \leqq \pi$ のとき

$\sin\left|x-\frac{\pi}{2}\right|=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

これより，$y=\sin\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$ と $y=\cos 2x$ で囲まれる図形は図の影をつけた部分になる。これを x 軸の周りに 1 回転させた立体の体積を求めるには，図 2 の影をつけた部分を x 軸の周りに 1 回転させた立体の体積を求めればよい。

図 2



$\cos x=-\cos 2x$ より，$2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ より，$x=\frac{\pi}{3}$

よって，求める体積を V とすると，図形の対称性から，

$V=2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx\right)$

$=\pi\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4x)dx\right\}$

$=\pi\left\{\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$

$=\frac{\pi}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$

③**11-C-12**

曲線 $|y|+|\log x|=1$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

●浜松医科大●

解答　$\frac{2(e^2-2e-1)}{e}\pi$

) $x \geqq 1$，$y \geqq 0$ のとき　$y+\log x=1$

$x \geqq 1$，$y \leqq 0$ のとき　$-y+\log x=1$

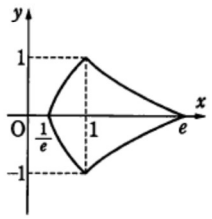
$0<x<1$，$y \geqq 0$ のとき　$y-\log x=1$

$0<x<1$，$y \leqq 0$ のとき　$-y-\log x=1$

よって，

$|y|+|\log x|=1$

を図示すると右図のようになる。これより求める体積を V とすると，



$V=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{1}(\log x+1)^2dx+\pi\int_1^e(-\log x+1)^2dx$

$=\pi\int_{\frac{1}{e}}^{1}\{(\log x)^2+2\log x+1\}dx+\pi\int_1^e\{(\log x)^2-2\log x+1\}dx$

ここで，$\int(\log x)^2dx=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$

$=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+C$ より

$V=\pi\left[x(\log x)^2-2(x\log x-x)+2(x\log x-x)+x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\pi\left[x(\log x)^2-2(x\log x-x)-2(x\log x-x)+x\right]_1^e$

$=2\pi\left(e-\frac{1}{e}-2\right)=\frac{2(e^2-2e-1)}{e}\pi$

③**11-C-13**

2 曲線 $y=x^2$ ……①，$y=\log(x-p)+q$ ……② は点 $(1, 1)$ において共通の接線をもつ。このとき p，q の値を求め，さらに，曲線①，②および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

●室蘭工業大●

解答　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=1+\log 2$，　体積 $\dfrac{3e^2-4e-1}{8e^2}\pi$

) $y=x^2$ の点 (1, 1) における接線は

$y=2x-1$ ……③

$y=\log(x-p)+q$ の点 (1, 1) における接線は

$y=\dfrac{1}{1-p}x-\dfrac{p}{1-p}$ ……④

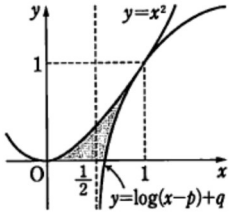
③と④が一致するから，$p=\dfrac{1}{2}$

②が点 (1, 1) を通るから $1=\log(1-p)+q$

この式に $p=\dfrac{1}{2}$ を代入して，$q=1+\log 2$

右図の影をつけた部分を y 軸の周りに 1 回転した立体が，求める体積である。②は，

$y=\log\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+1+\log 2$



$=\log e(2x-1)$

より，

$e(2x-1)=e^y$　　$2x-1=e^{y-1}$

$x=\dfrac{1}{2}(e^{y-1}+1)$

よって，$x^2=\dfrac{1}{4}(e^{y-1}+1)^2$

求める体積を V とすると，

$V=\pi\displaystyle\int_0^1\left\{\frac{1}{4}(e^{y-1}+1)^2-y\right\}dy$

$=\pi\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}e^{y-1}+\frac{1}{4}e^{2y-2}-y\right)dy$

$=\pi\left[\dfrac{y}{4}+\dfrac{1}{2}e^{y-1}+\dfrac{1}{8}e^{2y-2}-\dfrac{y^2}{2}\right]_0^1$

$=\dfrac{3e^2-4e-1}{8e^2}\pi$

③**11-C-14**

媒介変数 t により $x=e^t-e^{-t}$，$y=e^{3t}+e^{-3t}$ で表される曲線 C，x 軸，2 直線 $x=\pm1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。　●東北大●

解答　$\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

考え方　(1)　$x^2=e^{2t}+e^{-2t}-2$ より

$x^2+4=e^{2t}+e^{-2t}+2=(e^t+e^{-t})^2$

$e^t+e^{-t}=\sqrt{x^2+4}$

ここで，$y=e^{3t}+e^{-3t}$

$=(e^t+e^{-t})(e^{2t}-1+e^{-2t})$

$=(e^t+e^{-t})\{(e^t+e^{-t})^2-3\}$

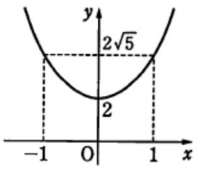
$=(x^2+1)\sqrt{x^2+4}$

これを $f(x)$ とおくと，

$f'(x)=\dfrac{3x^3+9x}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{3x(x^2+3)}{\sqrt{x^2+4}}$

x	…	0	…
y'	−	0	+
y	↘	2	↗

また，$f(-x)=f(x)$ から，$y=f(x)$ のグラフは右図のように y 軸について対称だから，求める面積を



S とすると，$S=2\displaystyle\int_0^1 y\,dx$

ここで，$\dfrac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$

x	0 ⟶ 1
t	α ⟶ β

とする。

$S=2\displaystyle\int_\alpha^\beta(e^{3t}+e^{-3t})(e^t+e^{-t})dt$

$=2\displaystyle\int_\alpha^\beta(e^{4t}+e^{2t}+e^{-2t}+e^{-4t})dt$

$=2\left[\dfrac{1}{4}e^{4t}+\dfrac{1}{2}e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}-\dfrac{1}{4}e^{-4t}\right]_\alpha^\beta$

$=\dfrac{1}{2}(e^{4\beta}-e^{4\alpha})+e^{2\beta}-e^{2\alpha}$

$-(e^{-2\beta}-e^{-2\alpha})-\dfrac{1}{2}(e^{-4\beta}-e^{-4\alpha})$　……①

ここで，$x=0$ のとき $t=\alpha$ だから，

$e^\alpha-e^{-\alpha}=0$

$e^\alpha=e^{-\alpha}$ より，$\alpha=0$

また，同様に $e^\beta-e^{-\beta}=1$ ……② で，この式の両辺を 2 乗すると，

$e^{2\beta}+e^{-2\beta}=3$

$(e^\beta+e^{-\beta})^2=5$

よって，$e^\beta+e^{-\beta}=\sqrt{5}$ ……③

②，③を連立して，

$e^\beta=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$e^{-\beta}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

これらと①から，$S=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

③**11-C-15**

放物線 $y=x^2$ の上の点 $P(t, t^2)$，$Q(s, s^2)$ $(t\neq s)$ における法線の交点を R とする。s を限りなく t に近づけるときの R の極限を X とする。t を動かすときの X の軌跡と $y=x^2$ とで囲まれる図形の面積を求めよ。

●学習院大

解答　$\dfrac{22\sqrt{2}}{15}$

点P$(t,\ t^2)$における法線は

$$y=-\frac{x}{2t}+t^2+\frac{1}{2}$$

点Q$(s,\ s^2)$における法線は

$$y=-\frac{x}{2s}+s^2+\frac{1}{2}$$

これらを連立して，

$$x=-2st(t+s),\quad y=s^2+t^2+st+\frac{1}{2}$$

これより，$\lim_{s\to t} x=-4t^3$，$\lim_{s\to t} y=3t^2+\frac{1}{2}$

よって，$X\left(-4t^3,\ 3t^2+\frac{1}{2}\right)$

これより，X の軌跡は y 軸について対称である。

また，この曲線と $y=x^2$ の交点は，

$$3t^2+\frac{1}{2}=16t^6 \qquad 32t^6-6t^2-1=0$$

$$(2t^2-1)(4t^2+1)^2=0 \qquad t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

このとき，$x=-4\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\mp\sqrt{2}$

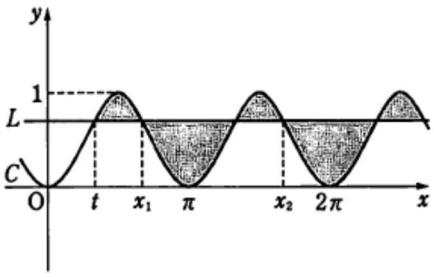
（以上，複号同順）

2 曲線はともに y 軸について対称であり，X の軌跡は $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ において，$y=x^2$ より上側にあるから求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=2\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\frac{dx}{dt}\,dt-\int_0^{\sqrt{2}} x^2dx\right)\\&=2\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(3t^2+\frac{1}{2}\right)(-12t^2)\,dt-\int_0^{\sqrt{2}} x^2dx\right\}\\&=24\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}\left(3t^4+\frac{1}{2}t^2\right)dt-2\int_0^{\sqrt{2}} x^2dx\\&=24\left[\frac{3}{5}t^5+\frac{1}{6}t^3\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}-\frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^{\sqrt{2}}\\&=\frac{22\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

③**11-C-16**

曲線 $C:y=\sin^2 x$ と x 軸に平行な直線 $L:y=\sin^2 t\ \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ がある。$\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi<x<n\pi$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ における C と L との交点の x 座標を x_n とする。$t\leqq x\leqq x_n$ なる範囲において，C と L により囲まれた $2n-1$ 個の部分の面積の総和を求めよ。　●防衛大●



解 答　$\left(\frac{n\pi}{2}-2nt+t\right)\cos 2t+\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin 2t$

③**11-C-17**

次の定積分を計算せよ。ただし，n は自然数，$a,\ b$ は実数の定数とする。

$$\int_0^{\pi}|a\sin nx+b\cos nx|dx$$

解 答

第 12 章　数学Ⅲの積分の応用（２）

《学習項目》

・積分方程式（2種）

・区分求積法

・弧長

A 問題

③12-A-1

次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)=x+\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$　　(2)　$xf(x)-x=\int_1^{x} f(t)dt$　$(x>0)$

解答　(1) $\boldsymbol{f(x)=x-\pi}$　(2) $\boldsymbol{f(x)=\log x+1}$

(1)　$\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$ は定数であるから，$\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt=A$ とおくと，$f(x)=x+A$

ゆえに，

$$A=\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt=\int_0^{\pi}(t+A)\sin t\,dt=\int_0^{\pi}(t+A)(-\cos t)'\,dt$$

$$=\Big[(t+A)(-\cos t)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(t+A)'(-\cos t)dt=\pi+2A+\int_0^{\pi}\cos t\,dt=\pi+2A$$

よって，$A=\pi+2A$ より，$A=-\pi$　　したがって，$\boldsymbol{f(x)=x-\pi}$

(2)　与式の両辺を x で微分すると，$f(x)+xf'(x)-1=f(x)$

よって，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

したがって，$f(x)=\int\dfrac{dx}{x}=\log x+C$

ここで，与式より $f(1)-1=0$ から $f(1)=1$　　$C=1$

ゆえに，$\boldsymbol{f(x)=\log x+1}$ $\boldsymbol{(x>0)}$

③12-A-2

極限値 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$ を求めよ。

解答　$\boldsymbol{\log 2}$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

であるから，$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とおくと，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$$

$$=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\boldsymbol{\log 2}$$

③12-A-3

次の曲線の長さ L を求めよ。ただし，(3)では，$a>0$ とする。

(1) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 2)$　　(2)* $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=e^t+e^{-t} \end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$

(3)* $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(4) $\begin{cases} x=3\cos t+\cos 3t \\ y=3\sin t-\sin 3t \end{cases}$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(5) $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$　ただし a は正の定数とする。

解答　(1) **14**　(2) $\boldsymbol{e-\dfrac{1}{e}}$　(3) $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}a}$　(4) **6**　(5) $8a$

(1) $L=\int_0^2\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^2\sqrt{(6t)^2+(3-3t^2)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{9(1+t^2)^2}\,dt$

$=\int_0^2 3(1+t^2)\,dt=14$

(2) $L=\int_0^1\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^1\sqrt{4+(e^t-e^{-t})^2}\,dt$

$=\int_0^1\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}\,dt=\int_0^1(e^t+e^{-t})\,dt$

$=e-\dfrac{1}{e}$

(3) $\dfrac{dx}{d\theta}=-3a\cos^2\theta\sin\theta$,

$\dfrac{dy}{d\theta}=3a\sin^2\theta\cos\theta$

$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$

$=9a^2\cos^4\theta\sin^2\theta+9a^2\sin^4\theta\cos^2\theta$

$=9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta$

$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{3a}{2}|\sin 2\theta|\,d\theta$

$=\dfrac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=\dfrac{3}{2}a$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t-3\sin 3t$,

$\dfrac{dy}{dt}=3\cos t-3\cos 3t$

$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

$=18-18\cos 4t$

$=36\sin^2 2t$

$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$

$=6\left[\dfrac{-\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6$

③**12-A-4**

次の曲線の長さ L を求めよ。

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\right)$　　(2)* $y=\log(1-x^2)$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\log x$ $(1\leqq x\leqq 2)$　　(4)* $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ $(1\leqq x\leqq 2)$

(5) $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(-a\leq x\leq a)$　ただし a は正の定数とする。

解答　(1) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$　(2) $\boldsymbol{\log 3-\dfrac{1}{2}}$　(3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}(3+2\log 2)}$　(4) $\boldsymbol{\dfrac{17}{12}}$　(5) $\boldsymbol{a\left(e-\dfrac{1}{e}\right)}$

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ より，

$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2=\frac{9}{9-x^2}$

ゆえに，$L=\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

ここで，$x=3\sin\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9\cos^2\theta}=|3\cos\theta|=3\cos\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$

x	$0\longrightarrow\frac{3}{2}$
t	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

よって，$L=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{3}{3\cos\theta}\cdot 3\cos\theta\,d\theta$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{1-x^2}$ より，

$L=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$

$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$

$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=-\left[x+\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}=\log 3-\frac{1}{2}$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ であるから，

$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$

$=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\log x\right]_1^2$

$=\frac{1}{4}(3+2\log 2)$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ であるから，

$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$=\int_1^2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$

$=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$

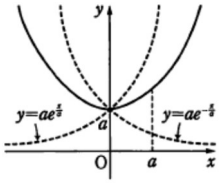
$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{17}{12}$

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$ であるから，

$L=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2}\,dx$

$=2\int_0^a\frac{1}{2}|e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}|dx=\int_0^a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})dx=\boldsymbol{a\left(e-\frac{1}{e}\right)}$



この曲線を**カテナリー**（懸垂線）という。

B 問題

③**12-B-1**

次の 2 つの式を同時に満たす連続関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

$f(x)=x^2+\int_0^1 tg(t)\,dt$，$g(x)=e^{-x}+x\int_0^1 f(t)\,dt$　●九州大●

解答

$\boldsymbol{f(x)=x^2+\frac{5}{3}-\frac{3}{e}}$，$\boldsymbol{g(x)=e^{-x}+\left(2-\frac{3}{e}\right)x}$

$a=\int_0^1 tg(t)\,dt$，$b=\int_0^1 f(t)\,dt$　（a，b は定数）

とおくと，

$f(x)=x^2+a$，$g(x)=e^{-x}+bx$ ……①

これらから，

$a=\int_0^1 t(e^{-t}+bt)\,dt$

$=\left[(-te^{-t}-e^{-t})+\frac{b}{3}t^3\right]_0^1$

$=-2e^{-1}+\frac{b}{3}+1$

また，$b=\int_0^1(t^2+a)\,dt=\frac{1}{3}+a$

③**12-B-2**

すべての実数 x に対して，次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin(t+x)\,dt+1$　●東京学芸大●

解答　$f(x)=\dfrac{4}{2-\pi}(\sin x+\cos x)+1$

加法定理により，

$$f(x)=\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt+\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt+1$$

ここで，

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt=a$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=b$　（a，b は定数）……①

とおくと，$f(x)=a\cos x+b\sin x+1$ ……②

①，②より，

$$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t\sin t+b\sin^2 t+\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{a}{2}\sin 2t+\frac{b}{2}(1-\cos 2t)+\sin t\right\}dt$$

$$=\frac{a}{2}+\frac{\pi b}{4}+1$$

$2a-\pi b=4$ ……③

同様に，$b=\dfrac{\pi a}{4}+\dfrac{b}{2}+1$ より，

$\pi a-2b=-4$ ……④

③，④より，$a=b=\dfrac{4}{2-\pi}$

これらを②に代入して $f(x)$ を求める。

③**12-B-3**

連続関数 $f(x)$ が，$f(x)=x+\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(x-t)dt$ を満たすとき，

(1)　$f''(x)=x$ を示せ。　　(2)　$f(x)$ を求めよ。

解答　(1)下参照　(2)　$f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+x$

(1)　$f(x)=x+\displaystyle\int_0^x f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$

$$=x+\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$$ ……①

$$f'(x)=1+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+f(x)\sin x\cos x+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt-f(x)\sin x\cos x$$

$$=1+\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$$ ……②

$$f''(x)=-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+f(x)\cos^2 x+\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt+f(x)\sin^2 x$$

$$=f(x)-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt+\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$$ ……③

①，③より，$f''(x)=x$ ……④

(2)　①，②より，$f'(0)=1$，$f(0)=0$

④より，$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^2+C_1$ で，$f'(0)=1$ より，

$C_1=1$　　$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1$

よって，$f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+x+C_2$

$f(0)=0$ より，$C_2=0$

ゆえに，$f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+x$

③**12-B-4**

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+2}+\frac{2}{n+4}+\cdots\cdots+\frac{2}{n+2n}\right)$

(2)* $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right\}$

解答　(1)　$\log 3$　　(2)　$\frac{\pi}{4}$

(1)　与式$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n+2k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n+2k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{1+2\cdot\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{2}{1+2x}\,dx$

$=\int_0^1\frac{(1+2x)'}{1+2x}\,dx=\left[\log|1+2x|\right]_0^1=\log 3$

$x=\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって，$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

(2)　与式$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2}{n^2+k^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$

③12-B-5

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\log(n+k)-\log n}{n+k}$

●芝浦工業大

(2)　$\lim_{n\to\infty}\log\left[\frac{1}{n}\left\{\frac{(2n)!}{n!}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]$

●東京電機大

解答　(1)　$\frac{1}{2}(\log 2)^2$　　(2)　$2\log 2-1$

(1)　与式$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\log\frac{n+k}{n}}{n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\log\left(1+\frac{k}{n}\right)}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x}\,dx$

ここで，$\log(1+x)=t$ とおくと，

$\frac{1}{1+x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow\log 2$

よって，与式$=\int_0^{\log 2}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\log 2}$

$=\frac{1}{2}(\log 2)^2$

(2)　与式$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(n+n)(n+n-1)\cdots(n+1)}{n^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\right.$

$\left.\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)\,dx$

$=\left[(1+x)\log(1+x)-x\right]_0^1$

$=2\log 2-1$

③12-B-6

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{n\to\infty}\left[\log\{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)\}^{\frac{1}{n}}-\log n\right]$

解答　$2\log 2-2$

(1)　与式$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots\cdots+\log(n+n)\right\}-\log n\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\{\log(n+1)-\log n\}+\{\log(n+2)-\log n\}+\cdots\cdots+\{\log(n+n)-\log n\}\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)\,dx$

$=\left[(1+x)\log(1+x)-x\right]_0^1=2\log 2-1$

③**12-B-7**

次の極限値を求めよ。$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n+1}{n+k}\right)$　●東京理科大

解答　$\log\frac{3}{2}$

与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{n}{n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{n}{n+n}+\frac{n}{n+(n+1)}+\frac{n}{n+(n+2)}+\cdots\cdots+\frac{n}{n+(n+n)}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{2n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}$

$=\int_0^1\frac{1}{2+x}\,dx=\left[\log(x+2)\right]_0^1=\log 3-\log 2$

③**12-B-8**

a を正の定数とする。サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ 上に点 P をとったとき，点 P における接線の傾きが $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であったとする。原点を O とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　接点 P の座標を求めよ。

(2)　サイクロイド上の弧 OP の長さを求めよ。　●千葉大・改●

解答　(1)　$\mathrm{P}\left(\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\ \frac{3}{2}a\right)$　(2)　$2a$

(1)　条件より，点 P において，

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

また，$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

よって，$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ より，

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$

よって，$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$

$0<\theta<2\pi$ $\left(\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13}{6}\pi\right)$ で解くと，

$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$ より $\theta=\frac{2}{3}\pi$

よって，$\mathrm{P}\left(\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\ \frac{3}{2}a\right)$

(2)　弧 $\mathrm{OP}=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos\theta)}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{2a^2\cdot2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$

$=2a\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta=2a\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$

$=2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=2a$

C 問題

③12-C-1

等式 $f(x)=(x^2+1)e^{-x}+\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。　●金沢大●

解答　$\boldsymbol{f(x)=-2(x+1)e^{-x}+3}$

$f(x)=(x^2+1)e^{-x}+\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt$ ……①

$x-t=u$ とおくと，$\frac{dt}{du}=-1$

t	$0 \longrightarrow x$
u	$x \longrightarrow 0$

$\int_0^x f(x-t)e^{-t}dt=\int_x^0 f(u)e^{u-x}\cdot(-1)du$

$=e^{-x}\int_0^x f(u)e^u du$

これを①に代入すると，

$f(x)=e^{-x}\left\{x^2+1+\int_0^x f(u)e^u du\right\}$

両辺を x で微分すると，

$f'(x)=-e^{-x}\left\{x^2+1+\int_0^x f(u)e^u du\right\}$

$+e^{-x}\{2x+f(x)e^x\}$

$=-f(x)+2xe^{-x}+f(x)=2xe^{-x}$

よって，$f(x)=\int 2xe^{-x}dx$

$=-2(x+1)e^{-x}+C$ ……②

①より $f(0)=1$，②より $f(0)=-2+C$

$1=-2+C$ より，$C=3$

よって，$f(x)=-2(x+1)e^{-x}+3$

③12-C-2

任意の実数 x に対して，次の等式が成り立つような連続関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ。

$e^x(x^2+ax)=\int_0^x tf(t)dt+\int_x^1 xf(t)dt$　●早稲田大●

解答　$\boldsymbol{f(x)=-e^x\left(x^2+\frac{5}{2}x-1\right)}$，$\boldsymbol{a=-\frac{3}{2}}$

与式を変形して，

$e^x(x^2+ax)=\int_0^x tf(t)dt-x\int_1^x f(t)dt$

この両辺を x で微分すると，

$e^x(x^2+ax)+e^x(2x+a)$

$=xf(x)-\int_1^x f(t)dt-xf(x)$

よって，

$e^x\{x^2+(a+2)x+a\}=-\int_1^x f(t)dt$ ……①

さらに，この両辺を x で微分すると，

$e^x\{x^2+(a+2)x+a\}+e^x(2x+a+2)=-f(x)$

$f(x)=-e^x\{x^2+(a+4)x+2a+2\}$

①において，$x=1$ とおくと，$e(3+2a)=0$

より，$a=-\frac{3}{2}$

よって，$f(x)=-e^x\left(x^2+\frac{5}{2}x-1\right)$

③12-C-3

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

●東京工業大

解答　$\boldsymbol{\frac{27}{16}}$

) $a_n=\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ とおくと，

$$\log a_n=\frac{1}{n}\log\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}$$

$$=\frac{1}{n}\log\left\{\frac{(3n)!}{n!(2n)!}\div\frac{(2n)!}{n!n!}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{3n(3n-1)(3n-2)\cdots(2n+1)}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\log\frac{2n+1}{n+1}+\log\frac{2n+2}{n+2}\right.$$

$$\left.+\log\frac{2n+3}{n+3}+\cdots\cdots+\log\frac{3n}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2n+k}{n+k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}$$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}\,dx$$

$$=\int_0^1\{\log(2+x)-\log(1+x)\}dx$$

$$=\Big[(2+x)\log(2+x)-x\Big]_0^1$$

$$-\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1$$

$$=(3\log 3-2\log 2-1)-(2\log 2-1)$$

$$=3\log 3-4\log 2=\log\frac{27}{16}$$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{27}{16}$$

③12-C-4

定積分を用いて次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}$　$(a>0)$　●東京工業大●

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}$　([　]はガウス記号)　●大阪大●

解答　(1) $\log 2$　(2) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

(1) 関数 $y=\frac{1}{a+x}$ のグラフは単調に減少するから，$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}$ は図1の斜線部分の面積に等しい。また，$\int_n^{2n+1}\frac{1}{a+x}dx$ は図2の斜線部分の面積に等しく，$\int_{n-1}^{2n}\frac{1}{a+x}dx$ は図3の斜線部分の面積に等しい。これらの斜線部分の面積の大小から次の不等式が成り立つ。

図1

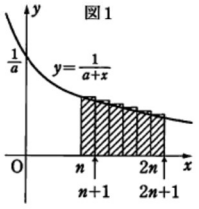


図2

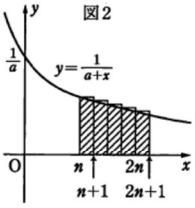
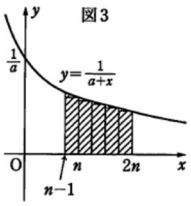


図3



$$\int_n^{2n+1}\frac{1}{a+x}dx<\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}<\int_{n-1}^{2n}\frac{1}{a+x}dx \quad \cdots\cdots①$$

ここで，

$$\int_n^{2n+1}\frac{1}{a+x}dx=\Big[\log(a+x)\Big]_n^{2n+1}=\log\frac{a+2n+1}{a+n}$$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{2n+1}\frac{1}{a+x}dx=\lim_{n\to\infty}\log\frac{\frac{a}{n}+2+\frac{1}{n}}{\frac{a}{n}+1}=\log 2$$

$$\int_{n-1}^{2n}\frac{1}{a+x}dx=\Big[\log(a+x)\Big]_{n-1}^{2n}=\log\frac{a+2n}{a+n-1}$$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n-1}^{2n}\frac{1}{a+x}dx=\lim_{n\to\infty}\log\frac{\frac{a}{n}+2}{\frac{a}{n}+1-\frac{1}{n}}=\log 2$$

よって，①で，はさみ打ちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}=\log 2$$

(2) $f(a)=\int_0^a e^{-x}\sin tx\,dx$ とおくと，

$$f(a)=\Big[-e^{-x}\sin tx\Big]_0^a+t\int_0^a e^{-x}\cos tx\,dx$$
$$=-e^{-a}\sin ta-t\Big[e^{-x}\cos tx\Big]_0^a-t^2\int_0^a e^{-x}\sin tx\,dx$$
$$=-e^{-a}(\sin ta+t\cos ta)+t-t^2f(a)$$

これから，

$$f(a)=\frac{1}{t^2+1}\{t-e^{-a}(\sin ta+t\cos ta)\}$$

ここで，$\lim_{a\to\infty}e^{-a}(\sin ta+t\cos ta)$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sin ta+t\cos ta}{e^a}=0$$

よって，与式$=\lim_{a\to\infty}f(a)=\frac{t}{t^2+1}$

補充問題

③**12-C-5**

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)* $f(x)=2\sin x+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(2t-x)\,dt$　●東京都立大●

(2) $\displaystyle\int_0^{x} f(t)\,dt=x-\sin x\cos x+\frac{x}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$　●東京理科大●

解答　(1) $f(x)=\dfrac{6\pi}{3\pi-4}\sin x$　(2) $f(x)=2\sin^2 x-2$

(1) 与式$=2\sin x$

$+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)(\sin 2t\cos x-\cos 2t\sin x)\,dt$

$=2\sin x+\dfrac{2}{\pi}\cos x\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin 2t\,dt$

$\qquad -\dfrac{2}{\pi}\sin x\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos 2t\,dt$

$=\left\{2-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos 2t\,dt\right\}\sin x$

$\qquad +\left\{\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin 2t\,dt\right\}\cos x$

ここで，$A=2-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos 2t\,dt$ ……①

$B=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin 2t\,dt$ ……②

とおくと，$f(x)=A\sin x+B\cos x$ ……③

①，③から，

$A=2-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(A\sin t+B\cos t)\cos 2t\,dt$

$=2-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(A\sin t+B\cos t)$

$\qquad\qquad\times(2\cos^2 t-1)\,dt$

ここで $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos t\,dt=0$，$\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^3 t\,dt=0$ より

$A=2-\dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(2\cos^2 t-1)\sin t\,dt$

$=2-\dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(2\cos^2 t\sin t-\sin t)\,dt$

$=2-\dfrac{2A}{\pi}\left[-\dfrac{2}{3}\cos^3 t+\cos t\right]_0^{\pi}$

$=2+\dfrac{4A}{3\pi}$　　これより，$A=\dfrac{6\pi}{3\pi-4}$

同様に，

$B=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(A\sin t+B\cos t)\sin 2t\,dt$

$=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(A\sin^2 t\cos t+B\sin t\cos^2 t)\,dt$

$=\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{A}{3}\sin^3 t-\dfrac{B}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi}=\dfrac{8B}{3\pi}$

これより，$B=0$

以上より，$f(x)=\dfrac{6\pi}{3\pi-4}\sin x$

注 $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^3 t\,dt=\int_0^{\pi}\cos t(1-\sin^2 t)\,dt$

$=\left[\sin t-\dfrac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi}$

$=0$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt=A$ ……① とおくと，

$\displaystyle\int_0^{x} f(t)\,dt=x-\sin x\cos x+\frac{A}{\pi}x$

この両辺を x で微分して，

$f(x)=1-\cos^2 x+\sin^2 x+\dfrac{A}{\pi}$

$\qquad=2\sin^2 x+\dfrac{A}{\pi}$ ……②

②を①に代入して，

$A=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\sin^2 t+\frac{A}{\pi}\right)dt$

$=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\cos 2t+\frac{A}{\pi}\right)dt$

$=2\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2t+\frac{A}{\pi}\right)dt$

$=2\left[t-\dfrac{1}{2}\sin 2t+\dfrac{A}{\pi}t\right]_0^{\pi}=2\pi+2A$

これより，$A=-2\pi$ を②に代入して

$f(x)=2\sin^2 x-2$

③**12-C-6**

(1)* $x>0$ に対し，$\displaystyle\int_a^{\log x} f(t)\,dt=\frac{1}{4}x^2(2\log x-1)$ を満たす関数 $f(t)$ と定数 $(a>0)$ を求めよ。　●筑波大●

(2) $f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin(x-t)\,dt$，$g(x)=x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。　●工学院大●

解答　(1) $f(t)=te^{2t}$，$a=\dfrac{1}{2}$　(2) $f(x)=(\pi-3)\sin x-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cos x$，$g(x)=x+\dfrac{\pi}{2}-2$

考え方　(1)　$f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすると，

$\displaystyle\int_a^{\log x} f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_a^{\log x}=F(\log x)-F(a)$

ここで，$F(\log x)$ を x で微分すると，

$f(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}$ より，条件式の両辺を x で微分すると，

$\dfrac{1}{x}f(\log x)=\dfrac{1}{2}x(2\log x-1)+\dfrac{1}{4}x^2\cdot\dfrac{2}{x}$

$=x\log x$ から，

$f(\log x)=x^2\log x$

ここで，$t=\log x$ とおくと，$x=e^t$ より

$f(t)=t(e^t)^2=te^{2t}$

$\log x=a$ のとき，すなわち $x=e^a$ のとき，これを条件式に代入して，

$0=\dfrac{1}{4}e^{2a}(2a-1)$ より　$a=\dfrac{1}{2}$

(2)　$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$

$=\sin x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\cos t\,dt$

$-\cos x\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin t\,dt$

ここで　$A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\cos t\,dt$,

$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin t\,dt$　とおくと，

$f(x)=A\sin x-B\cos x$

また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=C$　とおくと，

$g(x)=x+C$　より，

$A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+C)\cos t\,dt$

$=\Big[(t+C)\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

$=\dfrac{\pi}{2}+C+\Big[\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{\pi}{2}+C-1$

よって，$A=\dfrac{\pi}{2}+C-1$ ……①

同様に，$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+C)\sin t\,dt=C+1$ より，

$B=C+1$ ……②

$C=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(A\sin t-B\cos t)dt=A-B$ より，

$C=A-B$ ……③

①～③を解いて，$A=\pi-3$，$B=\dfrac{\pi}{2}-1$，

$C=\dfrac{\pi}{2}-2$

③**12-C-7**

次の等式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)* $\displaystyle\int_1^x u(\log u)^2du=\frac{x^2}{2}(\log x)^2+f(x)\quad(x\geqq 1)$　●防衛医科大●

(2)　$(x+1)\{f(x)-\log(x+1)+1\}=\displaystyle\int_0^x f(t)dt\quad(x>-1)$　●静岡大●

(3)　$f(0)=\log 2$，$xf(x)-\displaystyle\int_0^x f(t)dt=x+\log(\sqrt{x^2+1}-x)$　●芝浦工業大●

解答　(1)　$f(x)=-\dfrac{x^2}{2}\log x+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{4}$　(2)　$f(x)=\dfrac{1}{2}\{\log(x+1)\}^2-1$　(3)　$f(x)=\log(\sqrt{x^2+1}+1)$

(1)　条件式の両辺を x で微分すると，

$x(\log x)^2=x(\log x)^2$

$+\dfrac{x^2}{2}\cdot 2(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}+f'(x)$

これより，$f'(x)=-x\log x$

$f(x)=\displaystyle\int(-x\log x)dx$

$=-\dfrac{x^2}{2}\log x+\displaystyle\int\frac{x}{2}dx$

$=-\dfrac{x^2}{2}\log x+\dfrac{x^2}{4}+C$ ……①

条件式に $x=1$ を代入して，

$f(1)=0$

したがって，①に $x=1$ を代入して，

$\dfrac{1}{4}+C=0$ から，$C=-\dfrac{1}{4}$

よって，$f(x)=-\dfrac{x^2}{2}\log x+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{4}$

(2)　条件式の両辺を x で微分すると，

$f(x)-\log(x+1)+1$

$+(x+1)\left\{f'(x)-\dfrac{1}{x+1}\right\}=f(x)$

より，$f'(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x+1}$

$f(x)=\displaystyle\int\frac{\log(x+1)}{x+1}dx$

$=\dfrac{1}{2}\{\log(x+1)\}^2+C$ ……①

条件式に $x=0$ を代入して，

$f(0)=-1$

したがって，①に $x=0$ を代入して，

$C=-1$

よって，$f(x)=\dfrac{1}{2}\{\log(x+1)\}^2-1$

(3)　条件式の両辺を x で微分して，

$f(x)+xf'(x)-f(x)$

$=1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$

これから，$xf'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

よって $x\neq 0$ のとき，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

より，

$f(x)=\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$=\log|x|-\int\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$

ここで，$\sqrt{x^2+1}=t$ とおくと，$x^2+1=t^2$ より，

$x\,dx=t\,dt$

$\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$=\displaystyle\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int\frac{t}{(t^2-1)t}\,dt$

$=\displaystyle\int\frac{1}{t^2-1}\,dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$=\dfrac{1}{2}\{\log|t-1|-\log|t+1|\}+C$

$=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|+C$

$=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}+C$

これから，$x\neq 0$ のとき

$f(x)=\log|x|-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}+C$

$=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{\sqrt{x^2+1}-1}+C$

$=\dfrac{1}{2}\log(\sqrt{x^2+1}+1)^2+C$

$=\log(\sqrt{x^2+1}+1)+C$

ここで，$f(x)$ は連続関数だから，

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=\log 2$ である。

すなわち，$\lim\limits_{x\to 0}\{\log(\sqrt{x^2+1}+1)+C\}=\log 2$

より，$C=0$

③ **12-C-8**

次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x\frac{(1+\cos t)^2}{x}\,dt$

(2)*　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\sin tx\,dx$　●東京学芸大●

(3)　$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$，$h_n(x)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}}g(t)dt$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}h_n'(x)$　●防衛大●

解答　(1)　**4**　(2)　$\dfrac{t}{t^2+1}$　(3)　$f(x)$

解き方　(1)　$\displaystyle\int_0^x(1+\cos t)^2dt$

$=\displaystyle\int_0^x(1+2\cos t+\cos^2 t)dt$

$=\displaystyle\int_0^x\left(1+2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$

$=\left[t+2\sin t+\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin 2t}{4}\right]_0^x$

$=\dfrac{3}{2}x+2\sin x+\dfrac{\sin 2x}{4}$

これから，

与式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+\cos t)^2dt$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{2\sin x}{x}+\dfrac{\sin 2x}{4x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{2}+2\cdot\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)=4$

(2)　$f(a)=\displaystyle\int_0^a e^{-x}\sin tx\,dx$ とおくと，

$f(a)=\left[-e^{-x}\sin tx\right]_0^a+t\displaystyle\int_0^a e^{-x}\cos tx\,dx$

$=-e^{-a}\sin ta-t\left[e^{-x}\cos tx\right]_0^a$

$\qquad-t^2\displaystyle\int_0^a e^{-x}\sin tx\,dx$

$=-e^{-a}(\sin ta+t\cos ta)$

$\qquad+t-t^2f(a)$

これから，

$f(a)=\dfrac{1}{t^2+1}\{t-e^{-a}(\sin ta+t\cos ta)\}$

ここで，$\lim\limits_{a\to\infty}e^{-a}(\sin ta+t\cos ta)$

$=\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{\sin ta+t\cos ta}{e^a}=0$

よって，与式$=\lim\limits_{a\to\infty}f(a)=\dfrac{t}{t^2+1}$

(3)　$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると，

$h_n(x)=n\left[G(t)\right]_x^{x+\frac{1}{n}}$

$=n\left\{G\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-G(x)\right\}$

よって，$h_n'(x)=n\left\{G'\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-G'(x)\right\}$

$=n\left\{g\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-g(x)\right\}$

$=\dfrac{g\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-g(x)}{\dfrac{1}{n}}$

ここで，$\dfrac{1}{n}=h$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $h\to 0$ より，

$\lim\limits_{n\to\infty}h_n'(x)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}=g'(x)$

$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ より，$g'(x)=f(x)$

すなわち，$\lim\limits_{n\to\infty}h_n'(x)=f(x)$

第 13 章　物理問題

《学習項目》

A 問題

③13-A-1

原点を出発して x 軸上を運動する点Pの t 秒後 $(t \geqq 0)$ の座標 x が，$x=3t^2-t^3$ で表されるとき，3秒後の速度，加速度を求めよ。また，運動の向きを変える時刻を求めよ。

解答　3秒後の速度-9，加速度-12，運動の向きを変える時刻　2秒後

速度 $v=\dfrac{dx}{dt}=6t-3t^2$,

加速度 $a=\dfrac{dv}{dt}=6-6t$

$t=3$ を代入して，$v=-9$，$a=-12$

運動の向きが変わるところで v の符号が変わるから，$6t-3t^2=0$　　$t \neq 0$ より $t=2$

③13-A-2

座標平面上の動点Pの，時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，次の式で与えられているとき，(　)内の時刻 t における速度 $\vec{v}$ と加速度 $\vec{\alpha}$ を求めよ。また，そのときのPの速さ $|\vec{v}|$ と加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を求めよ。

(1) $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t-3t^2 \end{cases}$ $(t=2)$　　(2)* $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sqrt{3}\sin 2t \end{cases}$ $\left(t=\dfrac{\pi}{6}\right)$

解答　(1)　$\vec{v}=(1,\ -11)$，$\vec{\alpha}=(0,\ -6)$　$|\vec{v}|=\sqrt{122}$，$|\vec{\alpha}|=6$

(2)　$\vec{v}=(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$，$\vec{\alpha}=(-2,\ -6)$　$|\vec{v}|=\sqrt{6}$，$|\vec{\alpha}|=2\sqrt{10}$

(1)　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(1,\ 1-6t)$

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(0,\ -6)$

$t=2$ のとき，$\vec{v}=(1,\ -11)$，$\vec{\alpha}=(0,\ -6)$

(2)　$\vec{v}=(-2\sin 2t,\ 2\sqrt{3}\cos 2t)$

$\vec{\alpha}=(-4\cos 2t,\ -4\sqrt{3}\sin 2t)$

$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，

$\vec{v}=(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$，$\vec{\alpha}=(-2,\ -6)$

③13-A-3

$|x|$ が十分小さいとき，次の関数の1次近似式を作れ。

(1)* $\sin x$　　(2) $\log(1+x)$　　(3)* e^x

解答　(1) $\sin x \fallingdotseq x$　(2) $\log(1+x) \fallingdotseq x$　(3) $e^x \fallingdotseq 1+x$

(1)　$f(x)=\sin x$ とおくと，$f'(x)=\cos x$，$f(0)=0$，$f'(0)=1$

$|x|$ が十分小さいとき，$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ より，

$\sin x \fallingdotseq 0+1\cdot x$

(2)　$f(x)=\log(1+x)$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f(0)=\log 1=0$，$f'(0)=1$

$|x|$ が十分小さいとき，

$\log(1+x) \fallingdotseq 0+1\cdot x$

(3)　$f(x)=e^x$ とおくと，$f'(x)=e^x$

$f(0)=1$，$f'(0)=1$

$|x|$ が十分小さいとき，

$e^x \fallingdotseq 1+1\cdot x$

③13-A-4

$(1+x)^p$ の1次近似式を用いて，次の近似値を小数第3位まで求めよ。

(1) $\dfrac{1}{0.999}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{4.08}}$

解答　(1) **1.001**　(2) **0.495**　$(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$ を用いる。

(1) $\dfrac{1}{0.999}=\dfrac{1}{1-0.001}=(1-0.001)^{-1}$
$\fallingdotseq 1+(-1)\times(-0.001)$
$=1.001$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{4.08}}=\dfrac{1}{\sqrt{4(1+0.02)}}=\dfrac{1}{2}(1+0.02)^{-\frac{1}{2}}$
$\fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 0.02\right\}=\dfrac{1}{2}\times 0.99=0.495$

③**13-A-5**

x 軸上を運動している点 P の時刻 t における位置 x は，

$x=\dfrac{1}{3}t^3-5t^2+16t$ で表される。

(1)　この点 P が向きを変える時刻 t を求めよ。

(2)　$t=2$ から $t=9$ までの間で速さ $|v|$ の最大値を求めよ。

(3)　$t=2$ から $t=9$ までに点 P が動いた道のり L を求めよ。

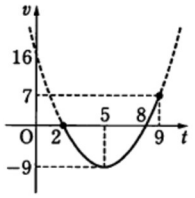
解答　(1)　$t=2,\ 8$　(2)　9（$t=5$ のとき）　(3)　$\dfrac{118}{3}$

(1)　点 P の t 秒後の速度 v は，

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2-10t+16=(t-2)(t-8)$

点 P が向きを変えるとき v の符号が変わるから，$v=0$ より，$t=2,\ 8$ のときである。

(2)　$v=(t-5)^2-9$ $(2\leqq t\leqq 9)$ より，グラフは下の図のようになる。したがって，$|v|$ の最大値は 9（$t=5$ のとき）



(3)　$L=\int_2^9|v|dt=\int_2^8(-v)dt+\int_8^9 v\,dt$
$=-\left[\dfrac{t^3}{3}-5t^2+16t\right]_2^8+\left[\dfrac{t^3}{3}-5t^2+16t\right]_8^9$
$=\dfrac{118}{3}$

B 問題

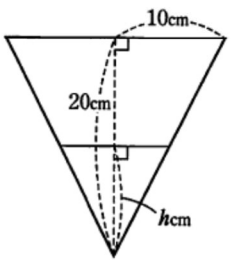
③**13-B-1**

深さが 20 cm，上面の半径が 10 cm の直円錐の容器がある。これに毎分 15 cm^3 の割合で水を入れるとき，水の深さが 8 cm のときの水面の上昇速度を求めよ。ただし，直円錐とは頂点から底面に下ろした垂線が底面の中心を通るような円錐をいう。

解答　$\dfrac{15}{16\pi}$ cm/分

注水を始めてから t 分後の水の深さを h cm とすると，そのときの水面の半径は $\dfrac{h}{2}$ cm であるから，水量 $V\text{cm}^3$ は，

$V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{h}{2}\right)^2 h=\dfrac{\pi}{12}h^3$



V は h の関数，h は t の関数であるから，V を t で微分すると，

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{12}\cdot 3h^2\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{\pi h^2}{4}\cdot\dfrac{dh}{dt}$

よって，$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{4}{\pi h^2}\cdot\dfrac{dV}{dt}$

よって，$h=8$，$\dfrac{dV}{dt}=15$ のとき，

$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{15}{16\pi}$ (cm/分)

③**13-B-2**

球形のしゃぼん玉の半径が毎秒 1 cm の割合で増加している。半径が 6 cm になった瞬間の体積の変化する割合を求めよ。

解答　$144\pi\ \text{cm}^3$/秒

t 秒後のしゃぼん玉の半径を r cm，体積を V cm³ とすると，$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

V は r の関数で，r は t の関数であるから，V を t で微分すると，$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

ここで，$\frac{dr}{dt}=1$，$r=6$ より，

$\frac{dV}{dt}=144\pi$ (cm³/秒)

③**13-B-3**

直径が 8 cm で，深さが 10 cm の直円錐形の容器が，軸を鉛直に頂点を下に向けて置かれている。これに毎秒 3 cm³ の割合で水を注ぎ入れる。水面の高さが 5 cm に達したとき，

(1)　水面の上昇する速さを求めよ。

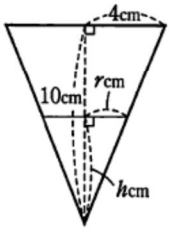
(2)　水面の面積の広がる速さを求めよ。　●芝浦工業大●

解答　(1)　$\frac{3}{4\pi}$ cm/秒　(2)　$\frac{6}{5}$ cm²/秒

(1)　深さ h cm のときの水面の半径を r cm とすると，

4：10＝r：h より，

$r=\frac{2}{5}h$ ……①



このときの水の量を V cm³ とすると，

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{5}h\right)^2h=\frac{4}{75}\pi h^3$

V，h は，時刻 t の関数だから，

両辺を t で微分すると，$\frac{dV}{dt}=\frac{4\pi}{75}\cdot3h^2\frac{dh}{dt}$

よって，$\frac{dV}{dt}=3$，$h=5$ のとき，

$\frac{dh}{dt}=\frac{3}{4\pi}$ (cm/秒)

(2)　深さ h cm のときの水面の面積を S cm² とすると，①より，$S=\pi r^2=\frac{4\pi}{25}h^2$

この両辺を時刻 t で微分すると，

$\frac{dS}{dt}=\frac{4\pi}{25}\cdot2h\frac{dh}{dt}$

(1)より，$h=5$ のとき $\frac{dh}{dt}=\frac{3}{4\pi}$ であるから，

$\frac{dS}{dt}=\frac{4\pi}{25}\cdot10\cdot\frac{3}{4\pi}=\frac{6}{5}$ (cm²/秒)

③**13-B-4**

x 軸上の動点 P の，原点を出発してから t 秒後における速度 v が，$v=\sin t+\sin 2t$ で与えられているとき，

(1)　出発してから t 秒後における P の座標を求めよ。

(2)　出発してから π 秒間に P が動く道のりを求めよ。

解答　(1)　$\left(-\cos t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{3}{2},\ 0\right)$　(2)　$\frac{5}{2}$

(1)　求める P の座標 x は，

$x=0+\int_0^t v\,dt=\int_0^t(\sin t+\sin 2t)dt$

$=\left[-\cos t-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^t$

$=-\cos t-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{3}{2}$

(2)　$v=0$ を $0<t<\pi$ で解くと，

$\sin t(1+2\cos t)=0$

よって，$\cos t=-\frac{1}{2}$ より，$t=\frac{2}{3}\pi$

$0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$ では $v\geqq0$，$\frac{2}{3}\pi\leqq t\leqq\pi$ では $v\leqq0$ であるから，求める道のりは，

$\int_0^\pi|v|dt=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}v\,dt+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(-v)dt$

$=\left[-\cos t-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$

$-\left[-\cos t-\frac{\cos 2t}{2}\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{5}{2}$

C 問題

③**13-C-1**

$|x|$ が十分小さいとき，次の関数の 2 次近似式を作れ。

(1)　$\cos x$　　(2)　$\sqrt{1-x+x^2}$

解答　(1)　$\cos x \fallingdotseq 1-\frac{1}{2}x^2$　(2)　$\sqrt{1-x+x^2} \fallingdotseq 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$

(1)　$f(x)=\cos x$ とおくと，

$f'(x)=-\sin x$，$f''(x)=-\cos x$

よって，$|x|$ が十分小さいとき，

$\cos x$

$\fallingdotseq \cos 0+(-\sin 0)\cdot x+(-\cos 0)\cdot\frac{x^2}{2}$

$=1-\frac{1}{2}x^2$

(2)　$f(x)=\sqrt{1-x+x^2}$ とおくと，

$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{1-x+x^2}}$

$f''(x)=\frac{3}{4(1-x+x^2)\sqrt{1-x+x^2}}$

より，$f(0)=1$，$f'(0)=-\frac{1}{2}$，$f''(0)=\frac{3}{4}$

$|x|$ が十分小さいとき，

$\sqrt{1-x+x^2} \fallingdotseq 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2}$

$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$

③**13-C-2**

表面積が 4π cm^2/秒の一定の割合で増加している球がある。半径が 10 cm になった瞬間において，以下のものを求めよ。

(1)　半径の増加する速度　　(2)　体積の増加する速度

解答　(1)　$\frac{1}{20}$ cm/秒　(2)　20π cm^3/秒

(1)　半径が r cm のときの球の表面積を S cm^2 とすると，

$S=4\pi r^2$ より，$\frac{dS}{dt}=8\pi r\frac{dr}{dt}$

条件より $\frac{dS}{dt}=4\pi$ を代入して，

$4\pi=8\pi r\frac{dr}{dt}$ から，$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2r}$

$r=10$ を代入して，$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{20}$ (cm/秒)

(2)　半径が r cm のときの球の体積を V cm^3 とすると，

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ より，$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$

$r=10$ のとき，(1)より $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{20}$ だから，

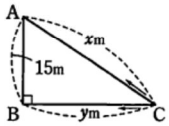
$\frac{dV}{dt}=4\pi\cdot 10^2\cdot\frac{1}{20}=20\pi$ (cm^3/秒)

③**13-C-3**

水面から 15 m の高さの岩壁から，綱で船を引き寄せる。毎秒 2 m の速さで綱をたぐるとき，綱の長さが 25 m になった瞬間の船の速さを求めよ。

解答　$\frac{5}{2}$ m/秒

右図のように，岩壁を AB，船の位置を C として，AC$=x$ m，BC$=y$ m とおくと，x，y は時刻 t の関数で，$x^2=15^2+y^2$



この両辺を t で微分すると，$2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt}$

よって，$\frac{dy}{dt}=\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}$ ……①

$x=25$ のとき，$y^2=25^2-15^2=400$

$y>0$ より $y=20$

また，毎秒 2 m の速さで綱をたぐるから，

$\frac{dx}{dt}=-2$

綱の長さが 25 m になったとき，

①より，

$\frac{dy}{dt}=\frac{25}{20}\cdot(-2)=-\frac{5}{2}$

したがって，船の速さは $\frac{5}{2}$ m/秒 である。