週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**解答解説**

1　$2\cdot(2n-1)+4\cdot(2n-3)+6\cdot(2n-5)+\cdots\cdots+2n\cdot 1$ を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$

$$2\cdot(2n-1)+4\cdot(2n-3)+6\cdot(2n-5)+\cdots\cdots+2n\cdot 1$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2k\{2n-(2k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}\{-4k^2+2(2n+1)k\}=-4\sum_{k=1}^{n}k^2+2(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2(2n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$$

2　次の和 S を求めよ。

$S=1+4x+7x^2+10x^3+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$

解答　$x=1$ のとき $\dfrac{1}{2}n(3n-1)$，　$x\fallingdotseq 1$ のとき $\dfrac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

$$S=1+4x+7x^2+\cdots\cdots+(3n-2)x^{n-1}$$

この等式の両辺に x を掛けると

$$xS=\quad x+4x^2+\cdots\cdots+(3n-5)x^{n-1}+(3n-2)x^n$$

辺々引くと

$$(1-x)S=1+3(x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})-(3n-2)x^n$$

$x\fallingdotseq 1$ のとき

$$(1-x)S=1+\frac{3x(1-x^{n-1})}{1-x}-(3n-2)x^n$$

$$=\frac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{1-x}$$

よって，$x\fallingdotseq 1$ のとき

$$S=\frac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$x=1$ のとき

$$S=1+4+7+10+\cdots\cdots+(3n-2)=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$

$$=\frac{1}{2}n\{3(n+1)-4\}=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

3　$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{5n}{n+1}$ であるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{15}n(n+1)(n+2)$

$T_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{5n}{n+1}$ とおき，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ の一般項を求める。

$n=1$ のとき　$\dfrac{1}{a_n}=T_1=\dfrac{5\cdot 1}{1+1}=\dfrac{5}{2}$

$n \geqq 2$ のとき　$\dfrac{1}{a_n}=T_n-T_{n-1}=\dfrac{5n}{n+1}-\dfrac{5(n-1)}{(n-1)+1}=\dfrac{5}{n(n+1)}$

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{5}{n(n+1)}$ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{5}{n(n+1)}$

よって　$a_n=\dfrac{n(n+1)}{5}$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{5}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)=\frac{1}{15}n(n+1)(n+2)$$

4　$\dfrac{3}{2\cdot 5}+\dfrac{3}{5\cdot 8}+\dfrac{3}{8\cdot 11}+\cdots\cdots+\dfrac{3}{(3n-1)(3n+2)}$ を計算せよ。

解答　$\dfrac{3n}{2(3n+2)}$

$$\frac{3}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}$$

よって

$$(\text{与式})=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{3n-1}}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}=\frac{3n}{2(3n+2)}$$

5　$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{1}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}+\cdots\cdots+\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}}$ を求めよ。

解答　$\sqrt[4]{n+1}-1$

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt[4]{k+1}+\sqrt[4]{k}}=\frac{(\sqrt[4]{k+1}+\sqrt[4]{k})(\sqrt[4]{k+1}-\sqrt[4]{k})}{\sqrt[4]{k+1}+\sqrt[4]{k}}=\sqrt[4]{k+1}-\sqrt[4]{k}$$

よって　$(\text{与式})=(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{1})+(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})+\cdots\cdots+(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n})=\sqrt[4]{n+1}-1$

6　2 点 A$(0,\ -2,\ -3)$，B$(8,\ 4,\ 7)$ を通る直線に，点 P$(3,\ -1,\ 4)$ から垂線 PH を下ろす。このとき，点 H の座標と線分 PH の長さを求めよ。

解答　H$(4,\ 1,\ 2)$，PH$=3$

原点を O とする。点 H は直線 AB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k がある。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(8-0,\ 4-(-2),\ 7-(-3))=(8,\ 6,\ 10)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$=(0,\ -2,\ -3)+k(8,\ 6,\ 10)=(8k,\ -2+6k,\ -3+10k)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(8k-3,\ 6k-1,\ 10k-7)$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　$8(8k-3)+6(6k-1)+10(10k-7)=0$　すなわち　$k=\dfrac{1}{2}$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(4,\ 1,\ 2)$

よって，H の座標は　$(4,\ 1,\ 2)$

また　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(1,\ 2,\ -2)$

したがって　$\mathrm{PH}=\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$

7 座標空間において，点 $(-2,\ 1,\ -1)$ を通り，3 つの座標平面に接する 2 つの球面の方程式を求めよ。

解答　$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$，$(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=9$

3 つの座標平面に接する球面の半径を $r\ (r>0)$ とすると，球面の中心と xy 平面，yz 平面，xz 平面の距離はすべて半径 r に等しい。

さらに，球面は，$x<0$，$y>0$，$z<0$ の範囲にある点 $(-2,\ 1,\ -1)$ を通るから，中心もこの範囲にある。

よって，球面の中心の座標は $(-r,\ r,\ -r)$ とおける。

したがって，求める球面の方程式は　$(x+r)^2+(y-r)^2+(z+r)^2=r^2$

点 $(-2,\ 1,\ -1)$ を通るから　$(-2+r)^2+(1-r)^2+(-1+r)^2=r^2$

整理すると　$r^2-4r+3=0$

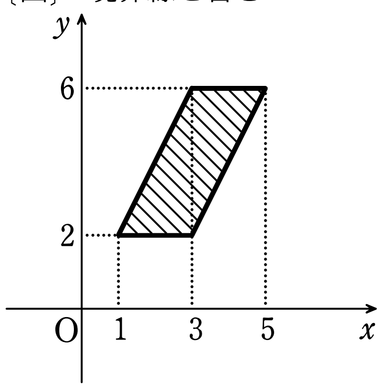
これを解くと　$r=1,\ 3$（ともに $r>0$ を満たす）

よって，求める球面の方程式は

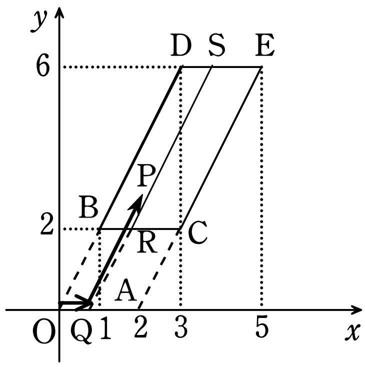
$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1$，$(x+3)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=9$

8 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ がある。次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，　$0\leqq s\leqq 1$，$1\leqq t\leqq 3$

解答　［図］　境界線を含む

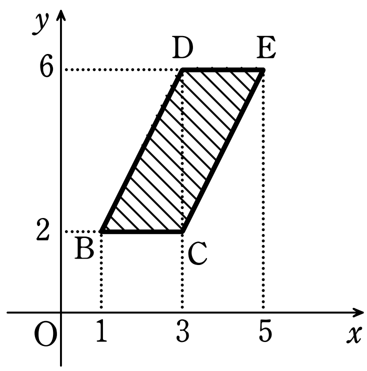


まず，s の値を固定して考える。
$s=k$ (k は定数) とすると，$0 \leqq k \leqq 1$ で
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
t の値が 1 から 3 まで変化すると，点 P は右の図において，線分 RS 上を R から S まで動く。
(ただし，図において
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$)



次に，s すなわち k の値を変化させる。
k の値が 0 から 1 まで変化すると，点 R，S は右上の図において，RS∥BD (∥CE) の状態を保ちながら，それぞれ線分 BC 上，DE 上を，B から C，D から E まで動く。
(ただし，図において　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,\ 6)$，
$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(5,\ 6)$)

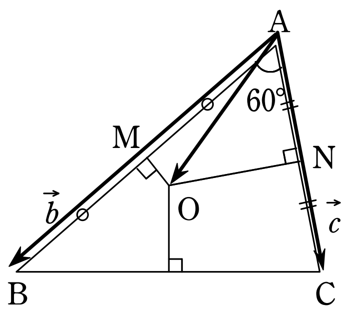
よって，点 P の存在範囲は，平行四辺形 BCED の周および内部で，図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



9 △ABC において，AB＝3，AC＝2，∠A＝60°，外心を O とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

条件から　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$，
$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\times 2\cos 60^\circ=3$



$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ (s，t は実数) とおく。
辺 AB の中点を M とすると，点 O は △ ABC の外心であるから　OM⊥AB
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{2}\vec{b}-(s\vec{b}+t\vec{c})=\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b}-t\vec{c}$$

であるから　$\left\{\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b}-t\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$\left(\frac{1}{2}-s\right)|\vec{b}|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

これに $|\vec{b}|=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ を代入して整理すると　$6s+2t=3$　……①

辺ACの中点をNとすると，点Oは△ABCの外心であるから　$\mathrm{ON}\perp\mathrm{AC}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{2}\vec{c}-(s\vec{b}+t\vec{c})=-s\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}$$

であるから　$\left\{-s\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=0$

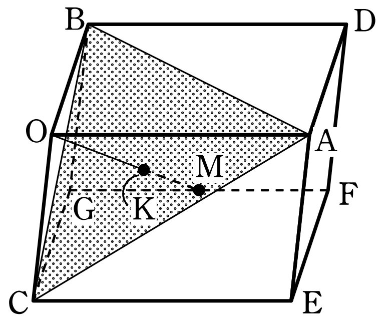
ゆえに　$-s\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{c}|^2=0$

これに $\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，$|\vec{c}|=2$ を代入して整理すると　$3s+4t=2$　……②

①，② を解いて　$s=\frac{4}{9}$，$t=\frac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

10　平行六面体OADB−CEFGにおいて，辺GFの中点をM，直線OMと平面ABCの交点をKとする。$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ で表せ。



解答　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

点Kは直線OM上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ (kは実数) とおける。

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{k}{2}\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$

ところで点Kは平面ABC上にあるから

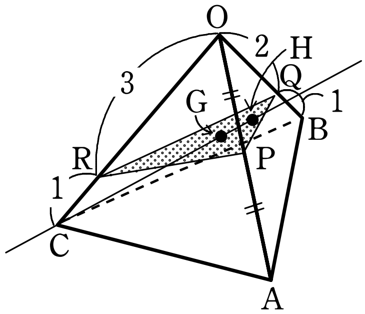
$$\frac{k}{2}+k+k=1$$

よって　$k=\dfrac{2}{5}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$

11 四面体OABCの辺OA，OB，OCを，それぞれ1：1，2：1，3：1に内分する点を，順にP，Q，Rとする。点Cと△PQRの重心Gを通る直線が平面OABと交わる点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{27}\vec{b}$



$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{4}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

Hは直線CG上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=k\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ となる実数 k がある。

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

$=\vec{c}+k\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}-\vec{c}\right)$

$=\dfrac{1}{6}k\vec{a}+\dfrac{2}{9}k\vec{b}+\left(1-\dfrac{3}{4}k\right)\vec{c}$　……①

また，Hは平面OAB上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 s，t がある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$　……②

①，②から　$\dfrac{1}{6}k\vec{a}+\dfrac{2}{9}k\vec{b}+\left(1-\dfrac{3}{4}k\right)\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから

$\dfrac{1}{6}k=s$，$\dfrac{2}{9}k=t$，$1-\dfrac{3}{4}k=0$　　これを解いて　　$k=\dfrac{4}{3}$，$s=\dfrac{2}{9}$，$t=\dfrac{8}{27}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{27}\vec{b}$

別解　（①までは同じ）Hは平面OAB上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ だけで表される。

よって，①から　$1-\dfrac{3}{4}k=0$　　ゆえに　$k=\dfrac{4}{3}$

これを①に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{8}{27}\vec{b}$

12 実数 x に対して，x 以下の最大の整数を $[x]$ と表すことにする。いま，数列 $\{a_n\}$ を

$a_n=\left[\sqrt{2n}+\dfrac{1}{2}\right]$ と定義すると　$a_1=$ ア□，$a_2=$ イ□，$a_3=$ ウ□，

$a_4=$ エ□，$a_5=$ オ□，$a_6=$ カ□，……

となる。このとき，$a_n=10$ となるのは，キ□ $\leqq n \leqq$ ク□ の場合に限られる。また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\text{ク}\square} a_n=$ ケ□ である。

解答　（ア）1　（イ）2　（ウ）2　（エ）3　（オ）3　（カ）3　（キ）46
（ク）55　（ケ）385

自然数 n に対して　$\sqrt{2n}+\dfrac{1}{2}>1$　よって，a_n は 1 以上の整数である。

自然数 m に対して，$a_n=m$ となるのは　$m\leqq\sqrt{2n}+\dfrac{1}{2}<m+1$　すなわち　$m-\dfrac{1}{2}\leqq\sqrt{2n}<m+\dfrac{1}{2}$　……①　のときである。

$m-\dfrac{1}{2}>0$ であるから，① より　$\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq 2n<\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2$

これから　$\dfrac{m(m-1)}{2}+\dfrac{1}{8}\leqq n<\dfrac{m(m+1)}{2}+\dfrac{1}{8}$　……②

ここで，$m(m-1)$，$m(m+1)$ はともに連続する整数の積であるから偶数である。

したがって，$\dfrac{m(m-1)}{2}$，$\dfrac{m(m+1)}{2}$ はともに整数である。

よって，② を満たす自然数 n は　$\dfrac{m(m-1)}{2}+1\leqq n\leqq\dfrac{m(m+1)}{2}$　……③

③ に $m=1$，2，…… を代入すると

$a_n=1$ となる n は　$n=1$

$a_n=2$ となる n は　$n=2$，3

$a_n=3$ となる n は　$n=4$，5，6

ゆえに　$a_1=$ ア1，$a_2=$ イ2，$a_3=$ ウ2，$a_4=$ エ3，$a_5=$ オ3，$a_6=$ カ3

また，$a_n=10$ となる自然数 n のとりうる値の範囲は，③ に $m=10$ を代入して

キ$46\leqq n\leqq$ ク55

③ を満たす自然数 n の個数は　$\dfrac{m(m+1)}{2}-\left\{\dfrac{m(m-1)}{2}+1\right\}+1=m$（個）

よって，a_1，a_2，……，a_{55} の中に，自然数 m $(1\leqq m\leqq 10)$ はちょうど m 個含まれるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{55}a_n=\sum_{m=1}^{10}m\cdot m=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11(2\cdot 10+1)=$ ケ385