週テスト（科目：数学　講師名：山中）　　**解答**

1　x の 3 次関数 $f(x)=x^3+3kx^2-kx-1$ が極大値も極小値ももたないような定数 k の値の範囲を求めよ。

解答　$-\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq 0$

$f'(x)=3x^2+6kx-k$

$f(x)$ が極値をもたないための条件は，$f'(x)$に符号の変化がないこと，すなわち，

2 次方程式 $f'(x)=0$ が実数解を 1 つだけもつかまたは実数解をもたないことである。

よって，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$f(x)$ が極値をもたないための条件は$D\leqq 0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(3k)^2-3\cdot(-k)\ =3k(3k+1)\leqq 0$　より

よって，求める k の値の範囲は　$-\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq 0$

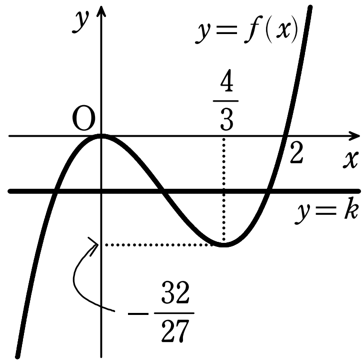
2　x に関する方程式 $x^3-2x^2-k=0$ は異なる 3 つの実数解をもつという。このとき，k のとりうる値の範囲を求めよ。

解答　$-\dfrac{32}{27}<k<0$

$x^3-2x^2-k=0$ から　$x^3-2x^2=k$

$f(x)=x^3-2x^2$ とおくと　$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{32}{27}$	$\nearrow$



方程式 $x^3-2x^2-k=0$ が異なる 3 つの実数解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が共有点を 3 個もつことである。　したがって　$-\dfrac{32}{27}<k<0$

3　次の不定積分，定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3-x^2+5x+1)dx$　　(2)　$\displaystyle\int_{0}^{2}|x^2-1|dx$

解答　(1)　$\dfrac{4}{3}$　　(2)　2

(1)　(与式)$=\displaystyle\int_{-1}^{1}(4x^3+5x)dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=0+2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx=\frac{4}{3}$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|x^2-1|=-(x^2-1)$，$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x^2-1|=x^2-1$

よって　(与式)$=\displaystyle\int_{0}^{1}\{-(x^2-1)\}dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx$

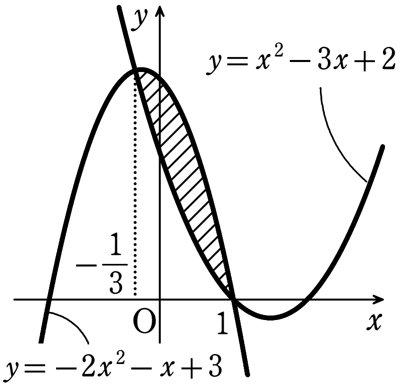
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2=-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)+\left(\frac{2^3}{3}-2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=2$$

4　2 つの放物線 $y=x^2-3x+2$，$y=-2x^2-x+3$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{32}{27}$

$x^2-3x+2=-2x^2-x+3$ を解くと，$x=-\dfrac{1}{3}$，1

求める面積は，右の図から



$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\{(-2x^2-x+3)-(x^2-3x+2)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(-3x^2+2x+1)dx=\Big[-x^3+x^2+x\Big]_{-\frac{1}{3}}^{1}$$

$$=(-1^3+1^2+1)-\left\{-\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{32}{27}$$

別解　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\{(-2x^2-x+3)-(x^2-3x+2)\}dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}(-3x^2+2x+1)dx$

$$=-3\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)dx=-3\left[-\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^3\right]=\frac{32}{27}$$

5　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)\,dt=x^2+2x-3$$

解答　$f(x)=2x+2$；$a=-3$，1

等式の両辺の関数を x で微分すると　$f(x)=2x+2$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから　$0=a^2+2a-3$

これを解くと　$a=-3$，1　　したがって　$f(x)=2x+2$；$a=-3$，1

6　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^2-\int_0^2 xf(t)\,dt+2\int_0^1 f(t)\,dt$$

解答　$f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=a$，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=b$ とおくと

$$f(x)=x^2-ax+2b$$

よって　$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(t^2-at+2b)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{a}{2}t^2+2bt\right]_0^2=\frac{8}{3}-2a+4b$

したがって　$\dfrac{8}{3}-2a+4b=a$　　よって　$9a-12b=8$ ……①

また　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(t^2-at+2b)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{a}{2}t^2+2bt\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+2b$

したがって　$\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}+2b=b$　　よって　$3a-6b=2$ ……②

①，② を解いて　$a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{1}{3}$　したがって　$f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

7　円 C：$x^2+y^2+ax-3ay-5a-5=0$ について

(1)　a の値に関係なく C は定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

(2)　y 軸が C によって切り取られる線分の長さの最小値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

解答　(1)　$(-1,\ -2),(2,\ -1)$　　(2)　$a=-\frac{10}{9}$ のとき 最小値 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

(1)　a について整理すると，C：$(x^2+y^2-5)+a(x-3y-5)=0$

C は a の値に関係なく $x^2+y^2-5=0,\ x-3y-5=0$ の交点を通る．

この連立方程式を解く．$(3y+5)^2+y^2-5=0$ から $y=-1,\ -2$ で，

定点は $(2,\ -1),(-1,\ -2)$

(2)　$x=0$ のとき $y^2-3ay-5a-5=0$　この方程式の 2 つの解を $y_1,\ y_2$ とすると，

線分の長さの平方は $(y_2-y_1)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=(3a)^2-4(-5a-5)$

$$=9a^2+20a+20=9\left(a+\frac{10}{9}\right)^2+\frac{80}{9}$$

ゆえに，$a=-\frac{10}{9}$ のとき最小値 $\frac{80}{9}$ をとる．

$|y_2-y_1|\geqq 0$ であるから，このとき $|y_2-y_1|$ も最小になり，最小値は $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

8　2 点 A (0，0)，B (5，0) からの距離の比が 2：3 である点 P の軌跡を求めよ。

解答　中心 $(-4,\ 0)$，半径 6 の円

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

P の満たす条件は　AP：BP＝2：3

すなわち　3AP＝2BP

よって　$9\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

$\mathrm{AP}^2=x^2+y^2$，$\mathrm{BP}^2=(x-5)^2+y^2$ を代入すると

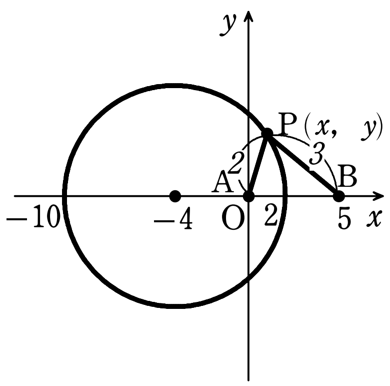
$9(x^2+y^2)=4\{(x-5)^2+y^2\}$

整理すると　$(x+4)^2+y^2=6^2$　……①

ゆえに，条件を満たす点は円 ① 上にある。

逆に，円 ① 上の任意の点は，条件を満たす。

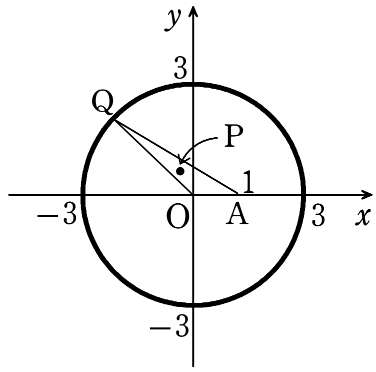
したがって，求める軌跡は　中心 $(-4,\ 0)$，半径 6 の円



9　2 点 O (0，0)，A (1，0) と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点 Q とでできる △OAQ の重心 P の軌跡を求めよ。

解答　中心が点 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$，半径が 1 の円。ただし，2 点 $\left(-\frac{2}{3},\ 0\right)$，$\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$ を除く。

点 P の座標を $(x,\ y)$，点 Q の座標を $(s,\ t)$ とする。



Q が x 軸上にあるとき，図形 OAQ は三角形にならないから　$t \neq 0$ ……①

Q は円 $x^2+y^2=9$ 上にあるから

$$s^2+t^2=9 \quad \cdots\cdots ②$$

P は △OAQ の重心であるから

$$x=\frac{0+1+s}{3},\quad y=\frac{0+0+t}{3}$$

よって　$s=3x-1,\ t=3y$

これを ①，② に代入して　$(3x-1)^2+(3y)^2=9,\ 3y \neq 0$

すなわち　$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=1,\ y \neq 0$ ……③

ゆえに，点 P は図形 ③ 上にある。

逆に，図形 ③ 上の任意の点は，条件を満たす。

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=1$ で，$y=0$ とすると　$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=1$

これを解くと　$x=-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}$

よって，求める軌跡は，中心が点 $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$，半径が 1 の円である。

ただし，2 点 $\left(-\frac{2}{3},\ 0\right)$，$\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$ を除く。

10 放物線 C：$y=x^2-x$ と直線 ℓ ：$y=m(x-1)-1$ は異なる 2 点 A，B で交わっている。このとき，線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

解答　放物線 $y=2x^2-3x$ の $x<0,\ 2<x$ の部分

(1)　$y=x^2-x$ と $y=m(x-1)-1$ から

$$x^2-x=m(x-1)-1$$

整理すると　$x^2-(m+1)x+m+1=0$ ……①

放物線 C と直線 ℓ は異なる 2 点で交わっているから，① の判別式を D とすると

$$D=\{-(m+1)\}^2-4(m+1)=(m+1)(m-3)>0$$

よって　$m<-1,\ 3<m$

(2)　2 点 A，B の x 座標は，2 次方程式 ① の異なる 2 つの実数解 $\alpha,\ \beta$ である。

線分 AB の中点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，解と係数の関係から

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{m+1}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

また，P は直線 ℓ 上の点であるから

$$y=m\left(\frac{m+1}{2}-1\right)-1=\frac{m^2-m-2}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

② から　　$m=2x-1$　$\cdots\cdots$ ④

③ に代入して整理すると

$y=2x^2-3x$

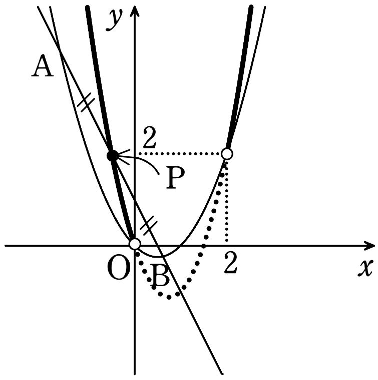
また，(1) の結果と ④ から

$2x-1<-1$，$3<2x-1$

ゆえに　　$x<0$，$2<x$

よって，求める軌跡は

放物線 $y=2x^2-3x$ の $x<0$，$2<x$ の部分



11　連立不等式 $\begin{cases} y \geqq |2x-3| \\ y \leqq x \end{cases}$ の表す領域を D とする。

(1)　領域 D を図示せよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2+y^2 の最小値とそのときの点 $(x,\ y)$ を求めよ。

解答　(1)［図］，境界線を含む。

(2)　点 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ で最小値 $\frac{9}{5}$

(1)　[1]　$2x-3 \geqq 0$ すなわち $x \geqq \frac{3}{2}$ のとき

$y \geqq 2x-3$

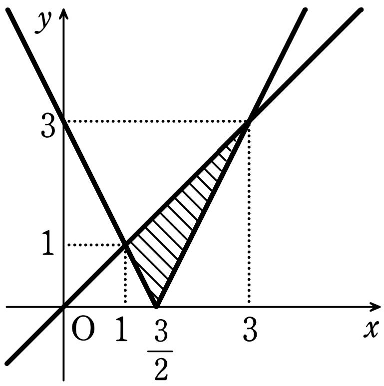
[2]　$2x-3<0$ すなわち $x<\frac{3}{2}$ のとき

$y \geqq -(2x-3)$

よって　$y \geqq -2x+3$

ゆえに，求める領域は右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



(2)　$x^2+y^2=k$（ただし，$k>0$）とすると，これは

中心が原点，半径が $\sqrt{k}$ の円を表す。

原点 O から直線 $y=-2x+3$ に垂線 OH を下ろすと，

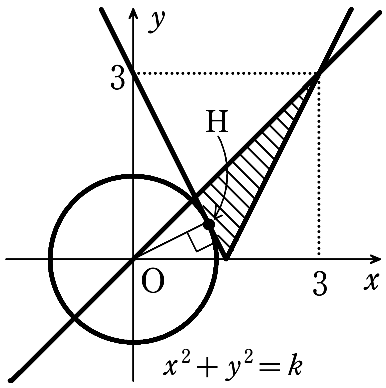
直線 OH の方程式は　　$y=\frac{1}{2}x$

点 H は，2 直線 $y=-2x+3$，$y=\frac{1}{2}x$ の交点である

から，その座標は　　$\left(\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right)$

$1<\frac{6}{5}<\frac{3}{2}$ であるから，点 H は領域 D 内の点である。

よって，点 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ で最小値 $\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{5}$ をとる。



12　t を実数とし，x，y の 1 次方程式 $(t+1)x+y-t-2=0$ ……①，
$(2t+1)x+(t+3)y-4t-3=0$ ……② を考える。座標平面上で①が表す直線を ℓ，②が表す直線を ℓ' とする。t の値が変化するとき，ℓ と ℓ' の交点の軌跡を求めよ。

解答　円 $(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ ただし，点 $(1,\ 2)$ を除く。

ℓ と ℓ' の交点の座標を $(X,\ Y)$ とおく。

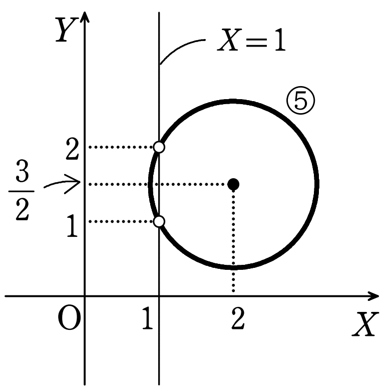
$x=X$，$y=Y$ は連立方程式①，②の解であるから

$$(t+1)X+Y-t-2=0,$$
$$(2t+1)X+(t+3)Y-4t-3=0$$

すなわち　$(X-1)t+X+Y-2=0$　……③

$(2X+Y-4)t+X+3Y-3=0$　……④

[1]　$X\neq1$ のとき，③から　$t=-\dfrac{X+Y-2}{X-1}$



これを④に代入すると

$$(2X+Y-4)\cdot\left(-\frac{X+Y-2}{X-1}\right)+X+3Y-3=0$$

整理すると　$X^2+Y^2-4X-3Y+5=0$

すなわち　$(X-2)^2+\left(Y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　……⑤

ただし，$X=1$ となる⑤上の点 $(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ は除く。

[2]　$X=1$ のとき，③から　$Y=1$

$X=1$，$Y=1$ を④に代入すると　$-t+1=0$

これを解くと　$t=1$

ゆえに，点 $(1,\ 1)$ は ℓ と ℓ' の交点である。

したがって，[1] で除いた点 $(1,\ 1)$ は，求める軌跡に含まれる。

（注）　点 $(1,\ 2)$ は ℓ と ℓ' の交点になり得ない。

以上から，求める軌跡は　円 $(x-2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　ただし，点 $(1,\ 2)$ を除く。

13　中心が点 $\mathrm{C}(0, 2)$ で，x 軸に接する円を C とし，点 $\mathrm{A}(1, 0)$ を通り C に接する x 軸とは異なる直線と，点 $\mathrm{B}(-9, 0)$ を通り C に接する x 軸とは異なる直線の交点を P とする.

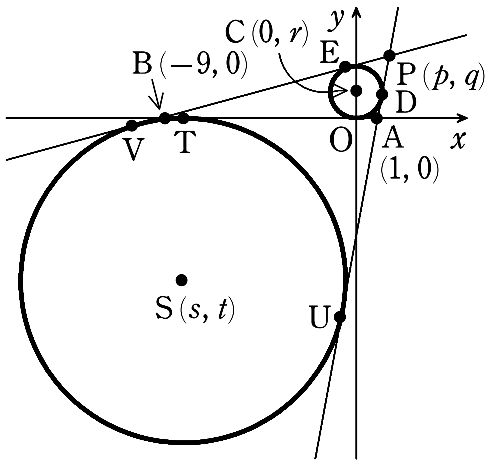
(1)　P の座標を求めよ.

(2)　中心が第 3 象限にあって，3 直線 AB，AP，BP に接する円の中心の座標を求めよ.

解答　(1)　$\left(\dfrac{32}{5}, \dfrac{36}{5}\right)$　　(2)　$\left(-8, -\dfrac{9}{2}\right)$

【改題してあります】$r=2$ として解答を読み替えてください

右図のように座標を定める．



(1)　円 C の方程式は　$x^2+(y-r)^2=r^2$

直線 AP，BP の方程式をそれぞれ，次のようにする．

$ax-y-a=0$，$bx-y+9b=0$

直線 AP，BP はともに円 C に接するから，C$(0, r)$ と直線 AP，BP に関して，点と直線の距離の公式を用いると

$$\frac{|-r-a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|-r+9b|}{\sqrt{b^2+1}}=r$$

よって　$(a+r)^2=r^2(a^2+1)$，$(9b-r)^2=r^2(b^2+1)$

ゆえに　$a=\dfrac{2r}{r^2-1}$，$b=\dfrac{18r}{9^2-r^2}$

ここで，P(p, q) とすると　$a(p-1)=b(p+9)$ から

$$p=\frac{a+9b}{a-b}=\frac{\dfrac{2r}{r^2-1}+\dfrac{9\times18r}{9^2-r^2}}{\dfrac{2r}{r^2-1}-\dfrac{18r}{9^2-r^2}}=\frac{2r(9^2-r^2)+9\times18r(r^2-1)}{2r(9^2-r^2)-18r(r^2-1)}$$

$$=\frac{9^2-r^2+9^2(r^2-1)}{9^2-r^2-9(r^2-1)}=\frac{(9^2-1)r^2}{9^2+9-10r^2}=\frac{80r^2}{90-10r^2}=\frac{8r^2}{9-r^2}$$

$$q=\frac{2r}{r^2-1}\left(\frac{8r^2}{9-r^2}-1\right)=\frac{18r(r^2-1)}{(r^2-1)(9-r^2)}=\frac{18r}{9-r^2}$$

(2)　求める円の中心の座標を S(s, t) とすると

$r:(-t)=\mathrm{PC}:\mathrm{PS}=(q-r):(q-t)=p:(p-s)$ から　$-t(q-r)=r(q-t)$

よって　$(2r-q)t=rq$　　ゆえに　$t=\dfrac{r\times\dfrac{18r}{9-r^2}}{2r-\dfrac{18r}{9-r^2}}=\dfrac{9r^2}{r(9-r^2)-9r}=-\dfrac{9}{r}$

また，$-tp=r(p-s)$ から　　$s=\dfrac{(r+t)p}{r}=\dfrac{\left(r-\dfrac{9}{r}\right)\dfrac{8r^2}{9-r^2}}{r}=\dfrac{r^2-9}{r}\times\dfrac{8r}{9-r^2}=-8$

したがって　$(s, t)=\left(-8, -\dfrac{9}{r}\right)$

注意　次のようにして，$s=-8$ を求めることもできる．上の図のように D, E, T, U, V を定めると

$$\begin{aligned}\mathrm{VE}&=\mathrm{BT}+\mathrm{BE}=\mathrm{BT}+\mathrm{BO}=2\mathrm{BO}-\mathrm{TO}=18-\mathrm{TO}=\mathrm{UD}=\mathrm{UA}+1\\&=\mathrm{TA}+1=\mathrm{TO}+2\end{aligned}$$

ゆえに　TO$=8$