週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**問題**

1　座標平面上で x 座標の値と y 座標の値がいずれも整数である点を格子点という。n を自然数として，不等式 $|x|+3|y| \leqq 6n$ が表す座標平面上の領域内の格子点の個数を求めよ。

2　数字の 1，2，3，4，5 がそれぞれ書かれたカードが 1 枚ずつ，合計 5 枚入った袋がある。その袋から 1 枚のカードを取り出し，数字を調べてからもとに戻す。この試行を繰り返し n 回行い，その n 回の試行で取り出したカードの数字の合計が偶数である確率を p_n とする。

(1)　p_1 および p_2 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n の式で表せ。

(3)　p_n を n の式で表せ。

3　正の偶数の列 2，4，6，…… を，第 n 群が n 個の数を含む次のような群に分ける。

$$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 30 \mid 32,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 12 群の 3 番目の数を求めよ。

(2)　472 が第何群の何番目の数かを答えよ。

4　A$(5+6i)$，B$(-1+i)$，C$(-3-5i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を 1：4 に内分する点

(2)　線分 AB の中点

(3)　線分 AB を 5：1 に外分する点

(4)　△ABC の重心

週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**問題**

$\boxed{5}$ $\alpha=1-i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ とする。ただし，偏角は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。　　(2) $\arg\beta^4$，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta^4}\right|$ をそれぞれ求めよ。

$\boxed{6}$ (1) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$ を計算せよ。

(2) 方程式 $z^4=-8-8\sqrt{3}\,i$ の解を求めよ。

$\boxed{7}$ 座標平面上の点 P(3，5) を，原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を Q とするとき，Q の座標を求めよ。

$\boxed{8}$ $\alpha=1+2i$，$\beta=-1+4i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

$\boxed{9}$ (1) 放物線 $y^2=6x$ の焦点の座標，準線の方程式を求めよ。

(2) 楕円 $x^2+9y^2=36$ の焦点の座標，長軸と短軸の長さを求めよ。

(3) 双曲線 $16x^2-9y^2=144$ の頂点と焦点の座標，漸近線の方程式を求めよ。

$\boxed{10}$ 次の曲線について，放物線なら頂点の座標，楕円なら中心の座標，双曲線なら漸近線の方程式を求めよ。また，焦点の座標も求めよ。

(1) $4y^2-8y-3x+1=0$　　(2) $9x^2+y^2-18x+4y+4=0$

(3) $4x^2-9y^2+24x-54y-9=0$

週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**問題**

1 解答　$24n^2+4n+1$

2 解答　(1)　$p_1=\dfrac{2}{5}$，$p_2=\dfrac{13}{25}$　(2)　$p_{n+1}=-\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5}$　(3)　$\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$

3 解答　(1)　138　(2)　第22群の5番目

4 解答　(1)　$\dfrac{19}{5}+5i$　(2)　$2+\dfrac{7}{2}i$　(3)　$-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}i$　(4)　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$

5 解答　(1)　$\alpha\beta=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{23}{12}\pi+i\sin\dfrac{23}{12}\pi\right)$，

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{19}{12}\pi+i\sin\dfrac{19}{12}\pi\right)$

(2)　$\arg\beta^4=\dfrac{2}{3}\pi$，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta^4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{16}$

6 解答　(1)　-1　(2)　$z=\pm(1+\sqrt{3}\,i)$，$\pm(\sqrt{3}-i)$

7 解答　$(-\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$

8 解答　$\gamma=-\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$

9 解答　(1)　焦点の座標は　$\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，準線の方程式は　$x=-\dfrac{3}{2}$

(2)　焦点の座標は　$(4\sqrt{2},\ 0)$，$(-4\sqrt{2},\ 0)$，
長軸の長さは　12，短軸の長さは　4

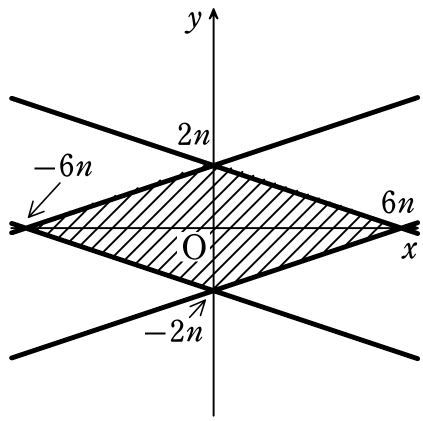
(3)　頂点の座標は　$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，焦点の座標は　$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$，
漸近線の方程式は　$y=\dfrac{4}{3}x$，$y=-\dfrac{4}{3}x$

10 解答　順に　(1)　頂点 $(-1,\ 1)$；焦点 $\left(-\dfrac{13}{16},\ 1\right)$

(2)　中心 $(1,\ -2)$；焦点 $(1,\ 2\sqrt{2}-2)$，$(1,\ -2\sqrt{2}-2)$

(3)　漸近線 $2x-3y-3=0$，$2x+3y+15=0$；
焦点 $(-3,\ \sqrt{13}-3)$，$(-3,\ -\sqrt{13}-3)$

1 不等式 $|x|+3|y| \leqq 6n$ が表す領域は，右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



【以下、四分割による解法を示す。別解あり。】
領域の対称性から，$x>0$，$y>0$ に含まれる格子点の個数を考える。
$x>0$，$y>0$ のとき　　$x+3y \leqq 6n$

連立不等式 $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+3y \leqq 6n \end{cases}$ が表す領域を D とする。

領域 D に含まれる格子点のうち，直線 $y=k$
$(1 \leqq k \leqq 2n)$ 上にある格子点の個数は　　$(6n-3k)$ 個
よって，領域 D に含まれる格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{2n}(6n-3k)=\frac{1}{2}\cdot 2n(6n-3)=6n^2-3n \text{ (個)}$$

図の対称性より，$x<0$ かつ $y>0$，$x<0$ かつ $y<0$，$x>0$ かつ $y<0$ に含まれる格子点の個数も同様にそれぞれ　　$(6n^2-3n)$ 個
また，不等式 $|x|+3|y| \leqq 6n$ が表す領域内の格子点のうち，座標軸上にある格子点の個数は　　$6n\times 2+2n\times 2+1=16n+1$ (個)
したがって，求める格子点の個数は

$$(6n^2-3n)\times 4+16n+1={}^{ア}24n^2+{}^{イ}4n+{}^{ウ}1 \text{ (個)}$$

2 (1)　p_1 は 1 回カードを取り出したとき，偶数のカードを取り出す確率である。

よって　　$p_1=\dfrac{2}{5}$

2 回カードを取り出したとき，取り出したカードの数字の合計が偶数となるのは次の場合である。

[1]　1 回目に偶数のカードを取り出し，2 回目に偶数のカードを取り出す。

[2]　1 回目に奇数のカードを取り出し，2 回目に奇数のカードを取り出す。

[1], [2] は互いに排反であるから

$$p_2=p_1\cdot\frac{2}{5}+(1-p_1)\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{13}{25}$$

(2)　$n+1$ 回カードを取り出したとき，取り出したカードの数字の合計が偶数となるのは

次の場合である。

[1]　n 回の試行で取り出したカードの数字の合計が偶数で，$n+1$ 回目に偶数のカードを取り出す。

[2]　n 回の試行で取り出したカードの数字の合計が奇数で，$n+1$ 回目に奇数のカードを取り出す。

[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{2}{5}+(1-p_n)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$$

よって　$p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$

(3)　(2) から，$p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$ を変形すると　$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}$，公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列であるから　$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

したがって　$p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

3　第 $(n-1)$ 群までの項数は　$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$

よって，第 n 群の最初の数は，偶数の列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 番目の数で

$$2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}=n^2-n+2$$

ゆえに，第 12 群の 1 番目の数は　$12^2-12+2=134$

したがって，第 12 群に含まれる数は　134，136，138，……

であるから，第 12 群の 3 番目の数は　ア138

また，472 は，偶数の列の 236 番目の数である。

472 が第 n 群に含まれるとすると　$\frac{1}{2}n(n-1)<236\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

よって　$(n-1)n<472\leqq n(n+1)$

$21\cdot22=462$，$22\cdot23=506$ であるから　$n=22$

第 21 群までに含まれる項数は　$\frac{1}{2}\cdot21\cdot22=231$

また　$236-231=5$

したがって，472 は第 イ22 群の ウ5 番目の数である。

4 (1) $\dfrac{4(5+6i)+1\cdot(-1+i)}{1+4}=\dfrac{19+25i}{5}=\dfrac{19}{5}+5i$

(2) $\dfrac{(5+6i)+(-1+i)}{2}=\dfrac{4+7i}{2}=2+\dfrac{7}{2}i$

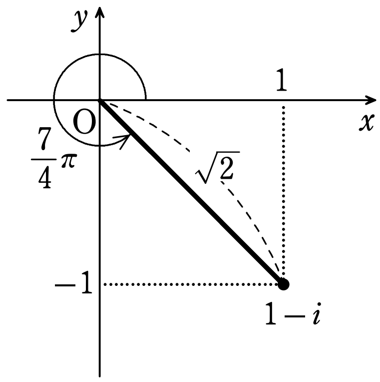
(3) $\dfrac{-1\cdot(5+6i)+5(-1+i)}{5-1}=\dfrac{-10-i}{4}=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}i$

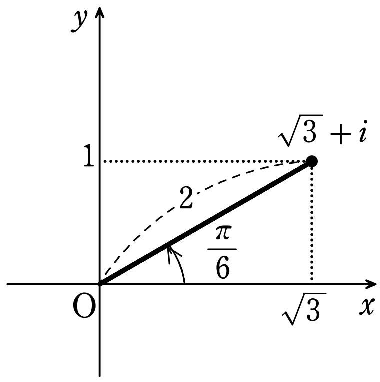
(4) $\dfrac{(5+6i)+(-1+i)+(-3-5i)}{3}=\dfrac{1+2i}{3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$

5 (1) α，β をそれぞれ極形式で表すと

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right),$$

$$\beta=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$





よって

$$\alpha\beta=\sqrt{2}\cdot 2\left\{\cos\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right),$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$$

(2) (1) より　$\arg\beta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$\arg\beta^4=4\arg\beta=\frac{2}{3}\pi$$

(1) より　$|\alpha|=\sqrt{2}$，$|\beta|=2$ であるから

$$\left|\frac{\alpha}{\beta^4}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta^4|}=\frac{|\alpha|}{|\beta|^4}=\frac{\sqrt{2}}{2^4}=\frac{\sqrt{2}}{16}$$

6 (1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^9=\cos\left(9\times\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(9\times\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=-1$$

(2) 解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$[r>0]$ とおくと　　$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

また　　$-8-8\sqrt{3}\,i=16\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

ゆえに　　$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4=16,\ 4\theta=\frac{4}{3}\pi+2\pi\times k\quad (k \text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=2$

また　$\theta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\times k$

よって　$z=2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\times k\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\times k\right)\right\}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$k=0$ とすると　$z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\,i$

$k=1$ とすると　$z=2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}+i$

$k=2$ とすると　$z=2\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)=-1-\sqrt{3}\,i$

$k=3$ とすると　$z=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)=\sqrt{3}-i$

$\boxed{7}$ 複素数平面上で考える。

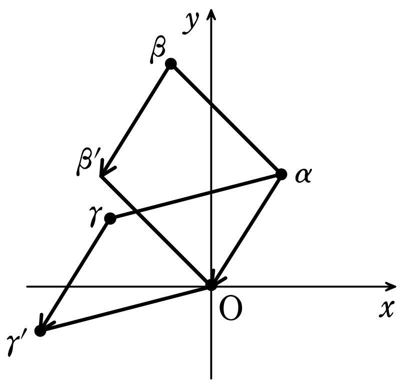
$z=3+5i$ として，原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(3+5i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(3+5i)=-\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i$$

よって，点 Q の座標は　$(-\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$

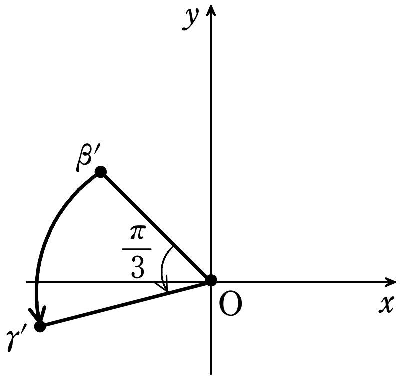
8 点 α が原点 O に移るような平行移動で，点 β，γ がそれぞれ β'，γ' に移るとすると

$\beta'=\beta-\alpha=(-1+4i)-(1+2i)$
$\quad=-2+2i$
$\gamma'=\gamma-\alpha$

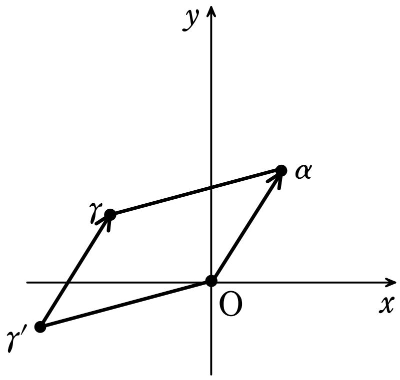


点 γ' は，点 β' を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$\gamma'=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-2+2i)$
$\quad=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2+2i)$
$\quad=(-1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$



よって
$\gamma=\gamma'+\alpha$
$\quad=(-1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i+(1+2i)$
$\quad=-\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$



9 (1)　$y^2=6x$ から　$y^2=4\cdot\frac{3}{2}x$

よって，焦点の座標は　$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，準線の方程式は　$x=-\frac{3}{2}$

(2)　$x^2+9y^2=36$ から　$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

$\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$ であるから，焦点の座標は　$(4\sqrt{2},\ 0)$，$(-4\sqrt{2},\ 0)$
長軸の長さは　$2\cdot6=12$，　短軸の長さは　$2\cdot2=4$

(3)　$16x^2-9y^2=144$ から　$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$

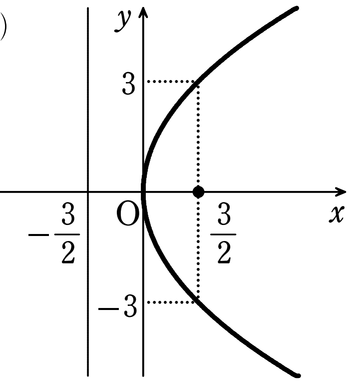
よって，頂点の座標は　$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$
$\sqrt{3^2+4^2}=5$ であるから，焦点の座標は　$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

漸近線の方程式は　$\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=0$，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=0$

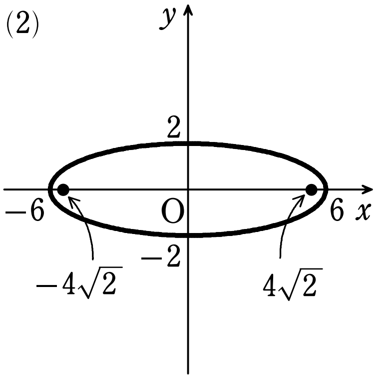
すなわち　$y=\dfrac{4}{3}x$，$y=-\dfrac{4}{3}x$

(4)　(1)，(2)，(3) の結果から，それぞれの概形は図のようになる。

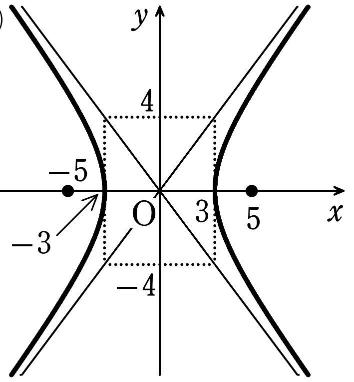
(1)



(2)

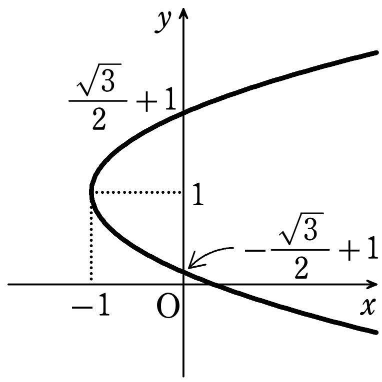


(3)



$\boxed{10}$ (1)　$4y^2-8y-3x+1=0$ を変形すると　$4(y-1)^2-3(x+1)=0$

よって　$(y-1)^2=\dfrac{3}{4}(x+1)$　……①



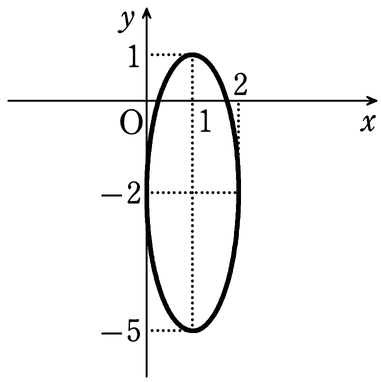
曲線 ① は放物線 $y^2=\dfrac{3}{4}x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，その概形は［図］のようになる。

放物線 $y^2=\dfrac{3}{4}x$ の頂点は原点 $(0,\ 0)$，焦点は点 $\left(\dfrac{3}{16},\ 0\right)$ である。

よって，放物線 ① の頂点の座標は　$(-1,\ 1)$，　焦点の座標は　$\left(-\dfrac{13}{16},\ 1\right)$

(2)　$9x^2+y^2-18x+4y+4=0$ を変形すると　$9(x-1)^2+(y+2)^2=9$

よって　$(x-1)^2+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$　……①



曲線①は，楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，その概形は［図］のようになる。

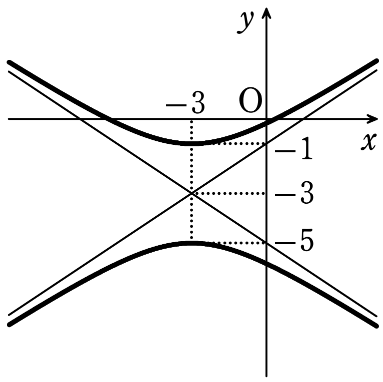
楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ の中心は原点 $(0,\ 0)$，焦点は 2 点 $(0,\ 2\sqrt{2})$，$(0,\ -2\sqrt{2})$ である。

よって，楕円①の中心の座標は　$(1,\ -2)$，

焦点の座標は　$(1,\ 2\sqrt{2}-2)$，$(1,\ -2\sqrt{2}-2)$

(3)　$4x^2-9y^2+24x-54y-9=0$ を変形すると　$4(x+3)^2-9(y+3)^2=-36$

よって　$\dfrac{(x+3)^2}{9}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=-1$　……①



曲線①は双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に -3 だけ平行移動したもので，その概形は［図］のようになる。

双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ の漸近線の方程式は

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=0,\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=0$$

すなわち　$2x-3y=0$，$2x+3y=0$

焦点は 2 点 $(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$ である。

よって，双曲線①の漸近線の方程式は

$$2(x+3)-3(y+3)=0,\quad 2(x+3)+3(y+3)=0$$

すなわち　$2x-3y-3=0$，$2x+3y+15=0$

焦点の座標は　$(-3,\ \sqrt{13}-3)$，$(-3,\ -\sqrt{13}-3)$