

第 1 章 数と式

A 1 - 1

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 9x - (y+1)(y-8)$

(2) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 3$

(3) $6x^2 - 17xy + 5y^2 - 2x + 18y - 8$

解答 (1) $(x+y+1)(x-y+8)$ (2) $(x-y+1)(x-y+3)$

(3) $(2x-5y+2)(3x-y-4)$

(1) (与式) $= \{x + (y+1)\} \{x - (y-8)\} = (x+y+1)(x-y+8)$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & y+1 \longrightarrow y+1 \\ 1 & & -(y-8) \longrightarrow -y+8 \\ \hline 1 & & -(y+1)(y-8) \qquad 9 \end{array}$$

(2) (与式) $= x^2 + (-2y+4)x + (y^2 - 4y + 3) = x^2 + (-2y+4)x + (y-1)(y-3)$
 $= \{x - (y-1)\} \{x - (y-3)\} = (x-y+1)(x-y+3)$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & -(y-1) \longrightarrow -y+1 \\ 1 & & -(y-3) \longrightarrow -y+3 \\ \hline 1 & & (y-1)(y-3) \qquad -2y+4 \end{array}$$

別解 (与式) $= (x-y)^2 + 4(x-y) + 3 = \{(x-y)+1\} \{(x-y)+3\} = (x-y+1)(x-y+3)$

(3) (与式) $= 6x^2 + (-17y-2)x + (5y^2 + 18y - 8) = 6x^2 + (-17y-2)x + (y+4)(5y-2)$
 $= \{2x - (5y-2)\} \{3x - (y+4)\} = (2x-5y+2)(3x-y-4)$

$$\begin{array}{rcl} 2 & \times & -(5y-2) \longrightarrow -15y+6 \\ 3 & & -(y+4) \longrightarrow -2y-8 \\ \hline 6 & & (y+4)(5y-2) \qquad -17y-2 \end{array}$$

A 1 - 2

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 - 3x^2 - 54$

(2) $x^4 - 1$

(3) $(x^2 - 3x)^2 - 14(x^2 - 3x) + 40$

(4) $(x-1)x(x+1)(x+2) - 15$

解答 (1) $(x^2+6)(x+3)(x-3)$ (2) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$

- (3) $(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)$ (4) $(x^2+x+3)(x^2+x-5)$
- (1) (与式) $= (x^2)^2 - 3x^2 - 54 = (x^2+6)(x^2-9) = (x^2+6)(x+3)(x-3)$
- (2) (与式) $= (x^2)^2 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$
- (3) (与式) $= \{(x^2-3x)-4\}\{(x^2-3x)-10\} = (x^2-3x-4)(x^2-3x-10)$
 $= (x+1)(x-4)(x+2)(x-5) = (x+1)(x+2)(x-4)(x-5)$
- (4) (与式) $= x(x+1) \times (x-1)(x+2) - 15 = (x^2+x)(x^2+x-2) - 15$
 $= (x^2+x)^2 - 2(x^2+x) - 15 = \{(x^2+x)+3\}\{(x^2+x)-5\}$
 $= (x^2+x+3)(x^2+x-5)$

A 1 - 3

次の方程式，不等式を解け。

- (1) $|3x-2|=1$ (2) $|2x+5|<3$ (3) $|3-4x|\geq 5$

解答 (1) $x=1, \frac{1}{3}$ (2) $-4<x<-1$ (3) $x\leq -\frac{1}{2}, 2\leq x$

(1) $|3x-2|=1$ から $3x-2=\pm 1$ したがって $x=1, \frac{1}{3}$

(2) $|2x+5|<3$ から $-3<2x+5<3$
 よって $-8<2x<-2$ ゆえに $-4<x<-1$

(3) $|3-4x|\geq 5$ から $3-4x\leq -5, 5\leq 3-4x$
 ゆえに $-4x\leq -8, 4x\leq -2$ よって $x\geq 2, x\leq -\frac{1}{2}$
 すなわち $x\leq -\frac{1}{2}, 2\leq x$

A 1 - 4

$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ ($\neq 0$) のとき, $\frac{x^2+2y^2+z^2}{xy+yz+zx}$ の値を求めよ。

解答 $\frac{33}{26}$

$\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7} = k$ とおくと, $k \neq 0$ で

$$x+y=5k, \quad y+z=6k, \quad z+x=7k$$

これを解くと $x=3k, y=2k, z=4k$

よって $\frac{x^2+2y^2+z^2}{xy+yz+zx} = \frac{9k^2+8k^2+16k^2}{6k^2+8k^2+12k^2} = \frac{33k^2}{26k^2} = \frac{33}{26}$

A 1 - 5

$x = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, y = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x+y, xy$ (2) x^2+y^2 (3) $x^4y^3+x^3y^4$ (4) x^3+y^3

解答 (1) $x+y=14, xy=1$ (2) 194 (3) 14 (4) 2702

$$(1) \quad x+y = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(4+4\sqrt{3}+3) + (4-4\sqrt{3}+3)}{4-3} = 14$$

$$xy = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 1$$

(2) $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 14^2 - 2 \cdot 1 = 194$

(3) $x^4y^3+x^3y^4 = x^3y^3(x+y) = (xy)^3(x+y) = 1^3 \cdot 14 = 14$

(4) $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 14^3 - 3 \cdot 1 \cdot 14 = 2702$

別解 $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = 14(194-1) = 2702$

A 1 - 6

2 次方程式 $2x^2-3x+8=0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ (2) $\alpha^2 + \beta^2$

(3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ (4) $\alpha^3 + \beta^3$

解答 (1) 6 (2) $-\frac{23}{4}$ (3) $-\frac{23}{16}$ (4) $-\frac{117}{8}$

解と係数の関係から $\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = 4$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 4 = -\frac{23}{4}$

(3) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = -\frac{23}{4} \div 4 = -\frac{23}{16}$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\
 &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8} - 18 = -\frac{117}{8}
 \end{aligned}$$

A 1 - 7

次の式を簡単にせよ。

$$(1) \quad \sqrt{4+2\sqrt{3}} \qquad (2) \quad \sqrt{19-2\sqrt{34}} \qquad (3) \quad \sqrt{9+\sqrt{80}}$$

解答 (1) $\sqrt{3} + 1$ (2) $\sqrt{17} - \sqrt{2}$ (3) $\sqrt{5} + 2$ (4) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$
 (5) $\sqrt{7} + 2$ (6) $\frac{\sqrt{22} - \sqrt{14}}{2}$

$$(1) \quad (\text{与式}) = \sqrt{(3+1)+2\sqrt{3 \cdot 1}} = \sqrt{3} + \sqrt{1} = \sqrt{3} + 1$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = \sqrt{(17+2)-2\sqrt{17 \cdot 2}} = \sqrt{17} - \sqrt{2}$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \sqrt{9+2\sqrt{20}} = \sqrt{(5+4)+2\sqrt{5 \cdot 4}} = \sqrt{5} + \sqrt{4} = \sqrt{5} + 2$$

$$(4) \quad (\text{与式}) = \sqrt{9-2\sqrt{18}} = \sqrt{(6+3)-2\sqrt{6 \cdot 3}} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

$$(5) \quad (\text{与式}) = \sqrt{11+2\sqrt{28}} = \sqrt{(7+4)+2\sqrt{7 \cdot 4}} = \sqrt{7} + \sqrt{4} = \sqrt{7} + 2$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad (\text{与式}) &= \sqrt{\frac{18-2\sqrt{77}}{2}} = \frac{\sqrt{(11+7)-2\sqrt{11 \cdot 7}}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{11} - \sqrt{7}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{22} - \sqrt{14}}{2}
 \end{aligned}$$

A 1 - 8

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a , b , c の値を定めよ。

$$(1) \quad x^3 + 1 = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + c$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

解答 (1) $a=6$, $b=12$, $c=9$ (2) $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{2}{3}$

(1) 等式の右边を x について整理すると

$$x^3 + 1 = x^3 + (-6+a)x^2 + (12-4a+b)x - 8 + 4a - 2b + c$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$0 = -6 + a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 0 = 12 - 4a + b \quad \cdots \cdots \textcircled{2},$$

$$1 = -8 + 4a - 2b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

① から $a=6$

これを②に代入して $0 = 12 - 24 + b$ よって $b = 12$
 $a = 6, b = 12$ を③に代入して $1 = -8 + 24 - 24 + c$ よって $c = 9$
 したがって $a = 6, b = 12, c = 9$

別解 1 等式に $x = 0, 1, 2$ を代入すると、それぞれ

$$1 = -8 + 4a - 2b + c, \quad 2 = -1 + a - b + c, \quad 9 = c$$

これを解いて $a = 6, b = 12, c = 9$

このとき 右辺 $= (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 12(x-2) + 9$
 $= (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 6(x^2 - 4x + 4) + 12x - 24 + 9$
 $= x^3 + 1 = \text{左辺}$

よって、与式は恒等式である。

したがって $a = 6, b = 12, c = 9$

別解 2 $x-2 = X$ とおくと $(X+2)^3 + 1 = X^3 + aX^2 + bX + c$

左辺を整理すると $X^3 + 6X^2 + 12X + 9 = X^3 + aX^2 + bX + c$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して $a = 6, b = 12, c = 9$

(2) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ であるから、等式の両辺に $x^3 - 1$ を掛けると

$$1 = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x-1)$$

右辺を x について整理すると $1 = (a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$0 = a + b \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad 0 = a - b + c \quad \cdots \cdots \text{②}, \quad 1 = a - c \quad \cdots \cdots \text{③}$$

②+③ から $1 = 2a - b \quad \cdots \cdots \text{④}$

①, ④ を解くと $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$

$a = \frac{1}{3}$ を③に代入して $1 = \frac{1}{3} - c$ よって $c = -\frac{2}{3}$

したがって $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = -\frac{2}{3}$

A 1 - 9

次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

(1) $(3+2i)x + (1-i)y = 7+3i$

(2) $(3+2i)(2x-yi) = 4+7i$

解答 (1) $x=2, y=1$ (2) $x=1, y=-1$

(1) 与式から $3x + y + (2x-y)i = 7+3i$

x, y は実数であるから, $3x+y, 2x-y$ はともに実数である。

よって $3x+y=7, 2x-y=3$

この連立方程式を解いて $x=2, y=1$

$$(2) \text{ 与式から } 2x-yi=\frac{4+7i}{3+2i}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \frac{4+7i}{3+2i} &= \frac{(4+7i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-8i+21i-14i^2}{9-4i^2} \\ &= \frac{12+13i+14}{9+4} = \frac{26+13i}{13} = 2+i \end{aligned}$$

したがって $2x-yi=2+i$

x, y は実数であるから, $2x, -y$ はともに実数である。

よって $2x=2, -y=1$

したがって $x=1, y=-1$

A 1 - 10

次の連立 3 元 1 次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} a+b+c=-3 \\ 9a+3b+c=1 \\ 16a+4b+c=6 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y-3z=10 \\ 4x-y+z=-14 \\ 5x-3y-7z=2 \end{cases}$$

解答 (1) $a=1, b=-2, c=-3$ (2) $x=-2, y=3, z=-3$

$$(1) \begin{cases} a+b+c=-3 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 9a+3b+c=1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 16a+4b+c=6 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1} \text{ から } 8a+2b=4 \quad \text{よって } 4a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{2} \text{ から } 7a+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5}-\textcircled{4} \text{ から } 3a=3 \quad \text{ゆえに } a=1$$

$$a=1 \text{ を } \textcircled{4} \text{ に代入して } 4+b=2 \quad \text{ゆえに } b=-2$$

$$a=1, b=-2 \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して } 1-2+c=-3 \quad \text{ゆえに } c=-3$$

$$(2) \begin{cases} x+y-3z=10 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 4x-y+z=-14 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 5x-3y-7z=2 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{ から } 5x-2z=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{3} \text{ から } 8x-16z=32 \quad \text{よって } x-2z=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}-\textcircled{5} \text{ から } 4x=-8 \quad \text{ゆえに } x=-2$$

$$x=-2 \text{ を } \textcircled{5} \text{ に代入して } -2-2z=4 \quad \text{ゆえに } z=-3$$

$x = -2$, $z = -3$ を ① に代入して $-2 + y + 9 = 10$ ゆえに $y = 3$

B 1 - 1

次の方程式を解け。

(1) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$

(2) $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

(3) $(x-1)x(x+1) = 4 \cdot 5 \cdot 6$

(4) $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) - 6 = 0$

解答 (1) $x = 1, 3, 5$ (2) $x = \frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (3) $x = 5, \frac{-5 \pm \sqrt{71}i}{2}$

(4) $x = -1, 3, 1 \pm i$

(1) $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ とすると $P(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 23 \cdot 1 - 15 = 0$

よって, $P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$P(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 15) = (x-1)(x-3)(x-5)$$

$P(x) = 0$ から $x-1=0$ または $x-3=0$ または $x-5=0$

したがって $x = 1, 3, 5$

(2) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ とすると $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$

よって, $P(x)$ は $2x-1$ を因数にもち $P(x) = (2x-1)(x^2 - x + 1)$

$P(x) = 0$ から $2x-1=0$ または $x^2 - x + 1 = 0$

したがって $x = \frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(3) $P(x) = (x-1)x(x+1) - 4 \cdot 5 \cdot 6$ とすると $P(5) = 4 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 0$

よって, $P(x)$ は $x-5$ を因数にもち, $P(x) = x^3 - x - 120$ であるから

$$P(x) = (x-5)(x^2 + 5x + 24)$$

$P(x) = 0$ から $x-5=0$ または $x^2 + 5x + 24 = 0$

したがって $x = 5, \frac{-5 \pm \sqrt{71}i}{2}$

(4) $x^2 - 2x = X$ とおくと $X^2 - X - 6 = 0$

左辺を因数分解すると $(X+2)(X-3) = 0$

よって $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 3) = 0$

すなわち $(x+1)(x-3)(x^2 - 2x + 2) = 0$

ゆえに $x+1=0$ または $x-3=0$ または $x^2 - 2x + 2 = 0$

したがって $x = -1, 3, 1 \pm i$

B 1 - 2

次の式を因数分解せよ。

(1) $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$

(2) $(b+c)a^2 + (c+a)b^2 + (a+b)c^2 + 2abc$

解答 (1) $(a+1)(b+1)(c+1)$ (2) $(a+b)(b+c)(c+a)$

(1) (与式) $= (bc + b + c + 1)a + (bc + b + c + 1) = (a+1)(bc + b + c + 1)$

$= (a+1)\{(c+1)b + (c+1)\} = (a+1)(b+1)(c+1)$

(2) (与式) $= (b+c)a^2 + (b^2 + c^2 + 2bc)a + (b^2c + bc^2)$

$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c) = (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$

$= (b+c)(a+b)(a+c) = (a+b)(b+c)(c+a)$

B 1 - 3

次の式を因数分解せよ。

(1) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

(2) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$

解答 (1) $3(a-b)(b-c)(c-a)$ (2) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(1) (与式) $= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3) + (c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3)$

$= -3(b-c)a^2 + 3(b^2 - c^2)a - 3bc(b-c)$

$= -3(b-c)a^2 + 3(b+c)(b-c)a - 3bc(b-c)$

$= -3(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$

$= -3(b-c)(a-b)(a-c) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

(2) (与式) $= (b-c)a^3 - (b^3 - c^3)a + bc(b^2 - c^2)$

$= (b-c)a^3 - (b-c)(b^2 + bc + c^2)a + bc(b+c)(b-c)$

$= (b-c)\{a^3 - (b^2 + bc + c^2)a + bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{(c-a)b^2 + (c^2 - ca)b - a(c^2 - a^2)\}$

$= (b-c)\{(c-a)b^2 + (c-a)bc - a(c+a)(c-a)\}$

$= (b-c)(c-a)\{b^2 + bc - a(c+a)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(b+c+a)$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

B 1 - 4

次の不等式を解け。

(1) $|2x-3| \leq |3x+2|$

(2) $|x-1| + 2|x-3| \leq 11$

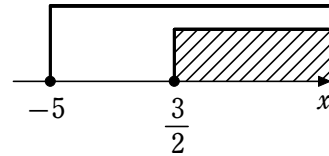
解答 (1) $x \leq -5$, $\frac{1}{5} \leq x$ (2) $-\frac{4}{3} \leq x \leq 6$

(1) [1] $2x-3 \geq 0$, $3x+2 \geq 0$ すなわち $x \geq \frac{3}{2}$ のとき

$$2x-3 \leq 3x+2$$

これを解いて $x \geq -5$

これと $x \geq \frac{3}{2}$ の共通範囲は $x \geq \frac{3}{2}$ …… ①

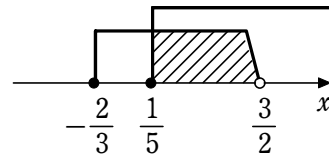


[2] $2x-3 < 0$, $3x+2 \geq 0$ すなわち $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$

のとき $-(2x-3) \leq 3x+2$

すなわち $5x \geq 1$ これを解いて $x \geq \frac{1}{5}$

これと $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$ の共通範囲は $\frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{2}$ …… ②



[3] $2x-3 < 0$, $3x+2 < 0$ すなわち $x < -\frac{2}{3}$ のとき

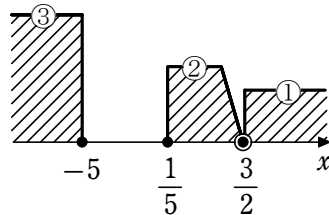
$$-(2x-3) \leq -(3x+2)$$

これを解いて $x \leq -5$

これと $x < -\frac{2}{3}$ の共通範囲は $x \leq -5$ …… ③

不等式の解は ①, ②, ③ を合わせた範囲であるから

$$x \leq -5, \frac{1}{5} \leq x$$



(2) [1] $x-1 \geq 0$, $x-3 \geq 0$ すなわち $x \geq 3$ のとき $x-1+2(x-3) \leq 11$

すなわち $3x \leq 18$ これを解いて $x \leq 6$

これと $x \geq 3$ の共通範囲は $3 \leq x \leq 6$ …… ①

[2] $x-1 \geq 0$, $x-3 < 0$ すなわち $1 \leq x < 3$ のとき $x-1-2(x-3) \leq 11$

これを解いて $x \geq -6$

これと $1 \leq x < 3$ の共通範囲は $1 \leq x < 3$ …… ②

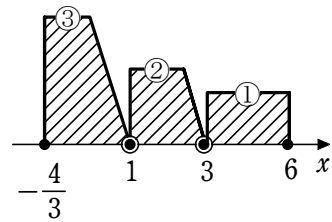
[3] $x-1 < 0$, $x-3 < 0$ すなわち $x < 1$ のとき $-(x-1)-2(x-3) \leq 11$

すなわち $-3x \leq 4$ これを解いて $x \geq -\frac{4}{3}$

これと $x < 1$ の共通範囲は $-\frac{4}{3} \leq x < 1$ …… ③

不等式の解は ①, ②, ③ を合わせた範囲であるから

$$-\frac{4}{3} \leq x \leq 6$$



B 1 - 5

次の式を簡単にせよ。

(4) $\sqrt{9 - \sqrt{72}}$

(5) $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$

(6) $\sqrt{9 - \sqrt{77}}$

解答 (1) $\sqrt{3} + 1$ (2) $\sqrt{17} - \sqrt{2}$ (3) $\sqrt{5} + 2$ (4) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$

(5) $\sqrt{7} + 2$ (6) $\frac{\sqrt{22} - \sqrt{14}}{2}$

(1) (与式) $= \sqrt{(3+1) + 2\sqrt{3 \cdot 1}} = \sqrt{3} + \sqrt{1} = \sqrt{3} + 1$

(2) (与式) $= \sqrt{(17+2) - 2\sqrt{17 \cdot 2}} = \sqrt{17} - \sqrt{2}$

(3) (与式) $= \sqrt{9 + 2\sqrt{20}} = \sqrt{(5+4) + 2\sqrt{5 \cdot 4}} = \sqrt{5} + \sqrt{4} = \sqrt{5} + 2$

(4) (与式) $= \sqrt{9 - 2\sqrt{18}} = \sqrt{(6+3) - 2\sqrt{6 \cdot 3}} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$

(5) (与式) $= \sqrt{11 + 2\sqrt{28}} = \sqrt{(7+4) + 2\sqrt{7 \cdot 4}} = \sqrt{7} + \sqrt{4} = \sqrt{7} + 2$

(6) (与式) $= \sqrt{\frac{18 - 2\sqrt{77}}{2}} = \frac{\sqrt{(11+7) - 2\sqrt{11 \cdot 7}}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{11} - \sqrt{7}) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{22} - \sqrt{14}}{2}$

B 1 - 6

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^4 + \frac{1}{x^4}$, $x^6 + \frac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

解答 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10$, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 98$, $x^6 + \frac{1}{x^6} = 970$

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

よって $x + \frac{1}{x} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$

$$\text{ゆえに} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 = 10$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 10^2 - 2 = 98$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 10^3 - 3 \cdot 10 = 970$$

$$\boxed{\text{別解}} \quad x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^4 - 1 + \frac{1}{x^4}\right) = 10(98 - 1) = 970$$

B 1 - 7

2 次方程式 $x^2 + 3x + 4 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。

$$(1) \quad \alpha - 1, \beta - 1 \qquad (2) \quad \alpha^2, \beta^2 \qquad (3) \quad \frac{\beta^2}{\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta}$$

$$\boxed{\text{解答}} \quad (1) \quad x^2 + 5x + 8 = 0 \quad (2) \quad x^2 - x + 16 = 0 \quad (3) \quad 4x^2 - 9x + 16 = 0$$

解と係数の関係から $\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 4$

$$(1) \quad (\alpha - 1) + (\beta - 1) = (\alpha + \beta) - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 4 - (-3) + 1 = 8$$

よって、求める 2 次方程式の 1 つは $x^2 + 5x + 8 = 0$

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-3)^2 - 2 \cdot 4 = 1$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 4^2 = 16$$

よって、求める 2 次方程式の 1 つは $x^2 - x + 16 = 0$

$$(3) \quad \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{(-3)^3 - 3 \cdot 4 \cdot (-3)}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta} = \alpha\beta = 4$$

よって、求める 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - \frac{9}{4}x + 4 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 4x^2 - 9x + 16 = 0$$

B 1 - 8

$x^2 - 3x + 7 = 0$ の 2 つの解 α, β に対して、 $\alpha^2 + \beta^2, \alpha^4 + \beta^4$ の値を求めよ。また、 $(\alpha^2 + 3\alpha + 7)(\beta^2 - \beta + 7)$ の値を求めよ。

解答 $\alpha^2 + \beta^2 = -5$, $\alpha^4 + \beta^4 = -73$, $(\alpha^2 + 3\alpha + 7)(\beta^2 - \beta + 7) = 84$

解と係数の関係から $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 7$

よって $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \cdot 7 = -5$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (-5)^2 - 2 \cdot 7^2 = -73$$

また, α , β は方程式 $x^2 - 3x + 7 = 0$ の解であるから

$$\alpha^2 - 3\alpha + 7 = 0, \quad \beta^2 - 3\beta + 7 = 0$$

ゆえに $\alpha^2 = 3\alpha - 7$, $\beta^2 = 3\beta - 7$

$$\begin{aligned} \text{よって } (\alpha^2 + 3\alpha + 7)(\beta^2 - \beta + 7) &= (3\alpha - 7 + 3\alpha + 7)(3\beta - 7 - \beta + 7) \\ &= 6\alpha \cdot 2\beta = 12\alpha\beta = 12 \cdot 7 = 84 \end{aligned}$$

B 1 - 9

$xyz = 5$ のとき, $\frac{5x}{xy+x+5} + \frac{5y}{yz+y+1} + \frac{25z}{xz+5z+5}$ の値を求めよ。

解答 5

$xyz = 5$ であるから

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{5x}{xy+x+5} + \frac{5y}{\frac{5}{x}+y+1} + \frac{25 \cdot \frac{5}{xy}}{\frac{5}{y}+5 \cdot \frac{5}{xy}+5} \\ &= \frac{5x}{xy+x+5} + \frac{5xy}{5+xy+x} + \frac{25}{x+5+xy} = \frac{5(x+xy+5)}{x+xy+5} = 5 \end{aligned}$$

B 1 - 10

$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ とする。

(1) $x^3 + 2x^2 - 7x - 2$ の値を求めよ。

(2) $x^4 - 2x^3 - 2x - 1$ の値を求めよ。

解答 $4 - 2\sqrt{2}$

$$x = 1 - \sqrt{2} \text{ から } x - 1 = -\sqrt{2}$$

$$\text{両辺を 2 乗して } x^2 - 2x + 1 = 2 \quad \text{よって } x^2 - 2x - 1 = 0$$

$x^3 + 2x^2 - 7x - 2$ を $x^2 - 2x - 1$ で割ると, 商は $x + 4$, 余りは $2x + 2$ であるから

$$x^3 + 2x^2 - 7x - 2 = (x^2 - 2x - 1)(x + 4) + 2x + 2$$

$$\text{よって, } x = 1 - \sqrt{2} \text{ のとき, 与式の値は } 2x + 2 = 2(1 - \sqrt{2}) + 2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

B 1 - 11

3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(2) $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

(4) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

解答 (1) 順に 2, 5, -3 (2) -6 (3) -7

(1) 3 次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-2}{1} = 2, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{5}{1} = 5, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{3}{1} = -3$$

(2) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$ より

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2^2 - 2 \cdot 5 = -6$$

(3) $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = \alpha\beta\gamma - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) - 1$

$$= -3 - 5 + 2 - 1 = -7$$

別解 $x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ が成り立ち、この等式の両辺に $x = 1$ を代

入すると $1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$

すなわち $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = 7$

よって $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = -7$

B 1 - 12

(1) x の方程式 $x^2 - (k - 3)x + 5k = 0$, $x^2 + (k - 2)x - 5k = 0$ が共通解をもつように定数 k の値を定め、その共通解を求めよ。

(2) 2 つの 2 次方程式 $x^2 - 3x + k - 1 = 0$, $x^2 + (k - 2)x - 2 = 0$ が、共通な実数解をただ 1 つもつとき、定数 k の値とその共通解を求めよ。

解答 (1) $k = 0$ のとき共通解 $x = 0$, $k = \frac{5}{22}$ のとき共通解 $x = -\frac{1}{2}$ (2) $k = 3$, 共通解は $x = 1$

共通解を $x = \alpha$ とすると

$$\alpha^2 - (k - 3)\alpha + 5k = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 + (k - 2)\alpha - 5k = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① + ② から $2\alpha^2 + \alpha = 0$ よって $\alpha(2\alpha + 1) = 0$

ゆえに $\alpha = 0, -\frac{1}{2}$

[1] $\alpha=0$ のとき ① から $k=0$

このとき、方程式はそれぞれ $x^2+3x=0$, $x^2-2x=0$

となり、解はそれぞれ $x=0, -3$; $x=0, 2$

よって、確かに共通解 $x=0$ をもつ。

[2] $\alpha=-\frac{1}{2}$ のとき

$$\text{① から } \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (k-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5k = 0$$

$$\text{よって } 22k-5=0 \quad \text{ゆえに } k=\frac{5}{22}$$

このとき、方程式はそれぞれ

$$x^2 + \frac{61}{22}x + \frac{25}{22} = 0 \quad \dots\dots \text{①}',$$

$$x^2 - \frac{39}{22}x - \frac{25}{22} = 0 \quad \dots\dots \text{②}'$$

$$\text{となり、①' の解は } x = -\frac{1}{2}, -\frac{25}{11} \quad \text{②' の解は } x = -\frac{1}{2}, \frac{25}{11}$$

よって、確かに共通解 $x = -\frac{1}{2}$ をもつ。

以上から $k=0$ のとき 共通解は $x=0$

$$k=\frac{5}{22} \text{ のとき 共通解は } x = -\frac{1}{2}$$

共通な実数解を α とすると $\alpha^2 - 3\alpha + k - 1 = 0 \quad \dots\dots \text{①},$

$$\alpha^2 + (k-2)\alpha - 2 = 0 \quad \dots\dots \text{②}$$

$$\text{②}-\text{① から } (k+1)\alpha - (k+1) = 0$$

$$\text{よって } (k+1)(\alpha-1) = 0$$

$$\text{ゆえに } k=-1 \text{ または } \alpha=1$$

[1] $k=-1$ のとき

$$2 \text{ つの } 2 \text{ 次方程式はともに } x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \dots\dots \text{③} \text{ となる。}$$

$$\text{③ の判別式を } D \text{ とすると } D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17 > 0$$

よって、2 つの 2 次方程式は共通な実数解を 2 つもつから、この場合は不適。

[2] $\alpha=1$ のとき ① に代入して $1^2 - 3 \cdot 1 + k - 1 = 0$

$$\text{よって } k=3$$

$$\text{このとき、2 つの } 2 \text{ 次方程式は } x^2 - 3x + 2 = 0, x^2 + x - 2 = 0$$

$$\text{すなわち } (x-1)(x-2)=0, (x-1)(x+2)=0$$

したがって、2つの方程式はただ1つの共通な実数解 $x=1$ をもつ。

[1], [2] から $k=3$, 共通解は $x=1$

B 1 - 13

整式 $P(x)$ を $x-3$ で割ると -3 余り, $x+1$ で割ると 9 余る。 $P(x)$ を $(x-3)(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答 $-3x+6$

$P(x)$ を 2 次式 $(x-3)(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とし, 余りを $ax+b$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x-3)(x+1)Q(x) + ax + b$$

この等式の両辺に $x=3$, -1 を代入すると

$$P(3) = 3a + b, \quad P(-1) = -a + b$$

$P(x)$ を $x-3$ で割った余りが -3 であるから $P(3) = -3$

$P(x)$ を $x+1$ で割った余りが 9 であるから $P(-1) = 9$

よって $3a + b = -3, \quad -a + b = 9$

この連立方程式を解いて $a = -3, \quad b = 6$

したがって, 求める余りは $-3x + 6$

B 1 - 14

a, b は実数とする。3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ が $2+i$ を解にもつとき, 定数 a, b の値を求めよ。また, 他の解を求めよ。

解答 $a = -1, \quad b = -7$; 他の解は $-3, \quad 2-i$

$2+i$ がこの方程式の解であるから $(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) + 15 = 0$

整理して $(3a + 2b + 17) + (4a + b + 11)i = 0$

$3a + 2b + 17, 4a + b + 11$ は実数であるから $3a + 2b + 17 = 0, \quad 4a + b + 11 = 0$

これを解くと $a = -1, \quad b = -7$

このとき, 方程式は $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

左辺を因数分解すると $(x+3)(x^2 - 4x + 5) = 0$

したがって $x = -3, \quad 2 \pm i$

よって, 他の解は $-3, \quad 2-i$

別解 実数を係数とする 3 次方程式が虚数解 $2+i$ をもつから, 共役な複素数 $2-i$ もこの方程式の解である。

したがって, 方程式の左辺 $x^3 + ax^2 + bx + 15$ は $\{x - (2+i)\}\{x - (2-i)\}$ すなわち

$x^2 - 4x + 5$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r}
 x + (a+4) \\
 x^2 - 4x + 5 \overline{) x^3 + ax^2 + bx + 15} \\
 \underline{x^3 - 4x^2 + 5x} \\
 (a+4)x^2 + (b-5)x + 15 \\
 \underline{(a+4)x^2 - 4(a+4)x + 5(a+4)} \\
 (4a+b+11)x - 5a - 5
 \end{array}$$

上の割り算における余りが 0 になるから $(4a+b+11)x - 5a - 5 = 0$

よって $4a+b+11=0$, $-5a-5=0$ これを解くと $a=-1$, $b=-7$

このとき、方程式は $(x+3)(x^2-4x+5)=0$ したがって $x=-3, 2 \pm i$

よって、他の解は $-3, 2-i$

B 1 - 15

方程式 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とする。次の式の値を求めよ。

(1) $\omega^6 + \omega^3 + 1$ (2) $\omega^8 + \omega^4 + 1$ (3) $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}$

解答 (1) 3 (2) 0 (3) -1

$x^3=1$ から $x^3-1=0$ ゆえに $(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって、 ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の解である。

したがって $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ また $\omega^3 = 1$

(1) $\omega^6 + \omega^3 + 1 = (\omega^3)^2 + \omega^3 + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$

(2) $\omega^8 + \omega^4 + 1 = (\omega^3)^2 \omega^2 + \omega^3 \cdot \omega + 1 = 1^2 \cdot \omega^2 + 1 \cdot \omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$

(3) $\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega + \omega^2}{\omega^3} = \frac{-1}{1} = -1$

B 1 - 16

次の最小値を求めよ。

(1) $x > 0$ のとき $x + \frac{3}{x}$ の最小値 (2) $x > 2$ のとき $x + \frac{4}{x-2}$ の最小値

解答 (1) $x = \sqrt{3}$ のとき最小値 $2\sqrt{3}$ (2) $x = 4$ のとき最小値 6

(1) $x > 0$, $\frac{3}{x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$$

等号が成り立つのは、 $x > 0$ かつ $x = \frac{3}{x}$ ，すなわち $x = \sqrt{3}$ のときである。

よって、 $x = \sqrt{3}$ のとき最小値 $2\sqrt{3}$ をとる。

$$(2) \quad x + \frac{4}{x-2} = x - 2 + \frac{4}{x-2} + 2$$

$x > 2$ より $x - 2 > 0$ ， $\frac{4}{x-2} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x - 2 + \frac{4}{x-2} \geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{4}{x-2}} = 4$$

等号が成り立つのは、 $x > 2$ かつ $x - 2 = \frac{4}{x-2}$ ，すなわち $x = 4$ のときである。

よって、 $x = 4$ のとき最小値 $4 + 2 = 6$ をとる。

C 1 - 1

方程式 $4x^3 - 2x^2 - 4x - 3 = 0$ を解け。

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(4x^2 + 4x + 2) = (2x - 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

と因数分解できることがわかる。

C 1 - 2

方程式 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ を解け

解答 (ア) $t^2 - 7t + 12 = 0$ (イ) 3, 4 (ウ) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $2 \pm \sqrt{3}$

$x = 0$ は方程式の解でないから，方程式の両辺を $x^2 (\neq 0)$ で割ると

$$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ とおくと} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$$

$$① \text{ に代入して} \quad t^2 - 2 - 7t + 14 = 0 \quad \text{よって} \quad t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (t-3)(t-4) = 0 \quad \text{したがって} \quad t = {}^1 3, 4$$

$$[1] \quad t = 3 \text{ のとき} \quad x + \frac{1}{x} = 3$$

両辺に $x (\neq 0)$ を掛けて整理すると $x^2 - 3x + 1 = 0$

これを解いて $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

[2] $t=4$ のとき $x + \frac{1}{x} = 4$

両辺に $x (\neq 0)$ を掛けて整理すると $x^2 - 4x + 1 = 0$

これを解いて $x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 1} = 2 \pm \sqrt{3}$

以上から、求める解は $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$

C 1 - 3

不等式

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 > 0 & \dots\dots ① \\ x^2 + (a-3)x - 2a + 2 < 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

がある。ただし、 a は実数とする。

①、②を同時にみたす整数 x がただ1つであるような a の値の範囲を求めよ。

C 1 - 4

a は実数とする。3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + a = 0$ が 2 重解をもつとき、定数 a の値を求めよ。

解答 $a = -4, \frac{9}{4}$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + (a-3)x + a &= (x+1)a + x(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x+1)a + x(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+1)\{a+x(x-3)\} \\
 &= (x+1)(x^2-3x+a)
 \end{aligned}$$

よって、方程式は $(x+1)(x^2-3x+a)=0$

ゆえに $x+1=0$ または $x^2-3x+a=0$ …… ①

与えられた方程式が 2 重解をもつとき、次の 2 つの場合が考えられる。

[1] $x=-1$ が 2 重解のとき

① が異なる 2 つの実数解をもち、その一方が -1 である。

① が -1 を解にもつから $(-1)^2-3\cdot(-1)+a=0$ よって $a=-4$

このとき、① は $(x+1)(x-4)=0$

したがって、① は異なる 2 つの実数解をもつから適する。

[2] ① が -1 以外の重解をもつとき

① の判別式は $D=(-3)^2-4a=9-4a$

$D=0$ であるから $a=\frac{9}{4}$ このとき、① は $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$

したがって、① は $x=\frac{3}{2}$ を重解にもつから適する。

以上から $a=-4, \frac{9}{4}$

C 1 - 5

(1) x^{20} を x^2-1 で割った余りを求めよ。

(2) 整式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ると $2x+3$ 余り、 $(x-1)^2$ で割ると $3x-2$ 余る。このとき、 $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ で割った余りを求めよ。

解答 (1) 1 (2) $-x^2+2$

(1) x^{20} を x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて、商を $Q(x)$ とすると $x^{20}=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ①

① に $x=-1$ を代入すると $1=-a+b$ …… ②

① に $x=1$ を代入すると $1=a+b$ …… ③

②、③ を解くと $a=0, b=1$

よって、求める余りは 1

(2) $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ で割った余りを ax^2+bx+c とおいて、商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x+1)^2(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ると $2x+3$ 余るから、 ax^2+bx+c を $(x+1)^2$ で割ると $2x+3$ 余

る。

$$\text{よって} \quad P(x) = (x+1)^2(x-1)Q(x) + a(x+1)^2 + 2x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると $3x-2$ 余るから、商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x) = (x-1)^2Q_1(x) + 3x-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{ゆえに、}\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad P(1) = 4a+5=1 \quad \text{よって} \quad a=-1$$

$$\text{したがって、求める余りは} \quad -(x+1)^2+2x+3 \quad \text{すなわち} \quad -x^2+2$$

C 1 - 6

x の整式 $f(x)$ は、 x^2+1 で割ると $3x+2$ 余り、 x^2+x+1 で割ると $2x+3$ 余るという。このとき、 $f(x)$ を $(x^2+1)(x^2+x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

解答 x^3+2x^2+4x+4

整式 $P(x)$ を 4 次式 $(x^2+1)(x^2+x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $R(x)$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)Q(x) + R(x) \quad R(x) \text{ は 3 次以下または } 0$$

$P(x)$ を x^2+1 、 x^2+x+1 で割ったときの余りは、 $R(x)$ を x^2+1 、 x^2+x+1 で割ったときの余りにそれぞれ等しいから、求める整式は $R(x)$ である。

$R(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商は 1 次式または定数であるから、条件により

$$R(x) = (x^2+x+1)(ax+b) + 2x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{と表され} \quad R(x) &= (x^2+1)(ax+b) + x(ax+b) + 2x+3 \\ &= (x^2+1)(ax+b) + a(x^2+1) + (b+2)x - a + 3 \\ &= (x^2+1)(ax+a+b) + (b+2)x - a + 3 \end{aligned}$$

よって、 $R(x)$ を x^2+1 で割った余りは $(b+2)x - a + 3$ である。

$$\text{これが } 3x+2 \text{ と等しいから} \quad b+2=3, \quad -a+3=2 \quad \text{ゆえに} \quad a=1, \quad b=1$$

したがって、求める整式は

$$R(x) = (x^2+x+1)(x+1) + 2x+3 = x^3+2x^2+4x+4$$

別解 ① と同様に、 $R(x) = (x^2+1)(ax+c) + 3x+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ と表される。

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad (x^2+x+1)(ax+b) + 2x+3 = (x^2+1)(ax+c) + 3x+2$$

両辺を展開して整理すると

$$ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b+2)x + b+3 = ax^3 + cx^2 + (a+3)x + c+2$$

これが x についての恒等式となるから

$$a+b=c, \quad a+b+2=a+3, \quad b+3=c+2$$

$$\text{これを解くと} \quad a=1, \quad b=1, \quad c=2$$

したがって、求める整式は

$$R(x) = (x^2 + 1)(x + 2) + 3x + 2 = x^3 + 2x^2 + 4x + 4$$

第 2 章 集合論理・不等式

A 2 - 1

$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ を全体集合とする。

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 4, 7\}, \quad A \cap B = \{6, 8\}, \quad A \cap \overline{B} = \{5\}$$

であるとき、 $\overline{A} \cap B$, A , B を求めよ。

解答 $\overline{A} \cap B = \{1, 3, 9\}$, $A = \{5, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 6, 8, 9\}$

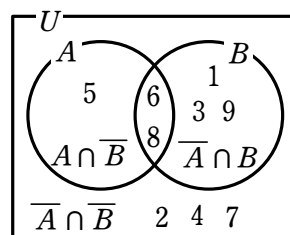
$\overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 4, 7\}$, $A \cap B = \{6, 8\}$, $A \cap \overline{B} = \{5\}$ の要素を図示すると、右の図のようになる。

残りの要素は $\overline{A} \cap B$ の要素であるから

$$\overline{A} \cap B = \{1, 3, 9\}$$

また、右の図から

$$A = \{5, 6, 8\}, \quad B = \{1, 3, 6, 8, 9\}$$



A 2 - 2

x は実数, n は整数とする。次の命題の逆をいえ。また、与えられた命題と、その逆の真偽をそれぞれ調べよ。

(1) $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$

(2) $x \geq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

(3) $x^2 + 2x \neq 3 \Rightarrow x \neq 1$

(4) n が 5 の倍数 $\Rightarrow n$ は 10 の倍数

解答 逆、与えられた命題の真偽、逆の真偽の順に

(1) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$; 真; 偽

(2) $x^2 > 0 \Rightarrow x \geq 0$; 偽; 偽

(3) $x \neq 1 \Rightarrow x^2 + 2x \neq 3$; 真; 偽

(4) n は 10 の倍数 $\Rightarrow n$ は 5 の倍数; 偽; 真

(1) 与えられた命題の逆は 「 $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ 」

与えられた命題は真で、その逆は偽 (反例: $x = -1$) である。

(2) 与えられた命題の逆は 「 $x^2 > 0 \Rightarrow x \geq 0$ 」

与えられた命題は偽 (反例: $x = 0$) で、その逆も偽 (反例: $x = -1$) である。

(3) 与えられた命題の逆は 「 $x \neq 1 \Rightarrow x^2 + 2x \neq 3$ 」

与えられた命題は真で、その逆は偽 (反例: $x = -3$) である。

(4) 与えられた命題の逆は 「 n は 10 の倍数 $\Rightarrow n$ は 5 の倍数」

与えられた命題は偽 (反例: $n = 5$) で、その逆は真である。

A 2 - 3

x, y は実数とする。次の に「必要」、「十分」、「必要十分」のうち、最も適切なものを入れよ。

- (1) $x=6$ は $x^2=36$ であるための 条件である。
 (2) $2x+5=3$ は $x=-1$ であるための 条件である。
 (3) $x^2>4$ は $x>2$ であるための 条件である。

解答 (1) 十分 (2) 必要十分 (3) 必要

- (1) 命題「 $x=6 \Rightarrow x^2=36$ 」は真であり、その逆「 $x^2=36 \Rightarrow x=6$ 」は偽 (反例: $x=-6$) であるから、 $x=6$ は $x^2=36$ であるための十分条件である。
 (2) 命題「 $2x+5=3 \Rightarrow x=-1$ 」は真であり、その逆「 $x=-1 \Rightarrow 2x+5=3$ 」も真であるから、 $2x+5=3$ は $x=-1$ であるための必要十分条件である。
 (3) 命題「 $x^2>4 \Rightarrow x>2$ 」は偽 (反例: $x=-3$) であり、その逆「 $x>2 \Rightarrow x^2>4$ 」は真であるから、 $x^2>4$ は $x>2$ であるための必要条件である。

A 2 - 4

x, y は実数, n は自然数とする。次の命題の対偶をいえ。また、与えられた命題の真偽を、対偶の真偽を調べて答えよ。

- (1) $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ または $y \neq 0$
 (2) $x+y<0 \Rightarrow x<0$ かつ $y<0$
 (3) n は 15 の倍数でない $\Rightarrow n$ は 5 の倍数でない

解答 対偶、真偽の順に

- (1) $x=0$ かつ $y=0 \Rightarrow x^2+y^2=0$; 真
 (2) $x \geq 0$ または $y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0$; 偽
 (3) n は 5 の倍数 $\Rightarrow n$ は 15 の倍数; 偽

- (1) 命題「 $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ または $y \neq 0$ 」の対偶は

$$\text{「}x=0 \text{ かつ } y=0 \Rightarrow x^2+y^2=0\text{」}$$

この命題は真であるから、与えられた命題も真である。

- (2) 命題「 $x+y<0 \Rightarrow x<0$ かつ $y<0$ 」の対偶は

$$\text{「}x \geq 0 \text{ または } y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0\text{」}$$

この命題は偽 (反例: $x=1$, $y=-2$) であるから、与えられた命題も偽である。

(3) 命題「 n は 15 の倍数でない $\Rightarrow n$ は 5 の倍数でない」の対偶は

「 n は 5 の倍数 $\Rightarrow n$ は 15 の倍数」

この命題は偽 (反例: $n=10$) であるから、与えられた命題も偽である。

A 2 - 5

$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて、 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

解答 略

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ は有理数である。

$\sqrt{3} + \sqrt{2} = r$ とする。

両辺を 2 乗して $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = r^2$

左辺を展開すると $5 + 2\sqrt{6} = r^2$ よって $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$

r が有理数ならば、 $\frac{r^2 - 5}{2}$ も有理数であるから、この等式は $\sqrt{6}$ が無理数であることに

矛盾する。したがって、 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ は無理数である。

B 2 - 1

次の問いに答えよ。

(1) $a \geq 0$, $b \geq 0$ のとき、 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ となることを証明せよ。

(2) $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ のとき、 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ となることを証明せよ。

解答 略

$a \geq 0$, $b \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2\} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

参考 等号が成り立つのは、 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ すなわち $a = b$ のときである。

第 3 章 2 次関数

A 3 - 1

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y = x^2 - 4x + 5$ ($1 \leq x \leq 3$)

(2) $y = -x^2 - x + 2$ ($-2 < x < 0$)

解答 (1) $x = 1, 3$ で最大値 2 ; $x = 2$ で最小値 1

(2) $x = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ ，最小値はない

(1) $y = x^2 - 4x + 5$ を変形すると $y = (x - 2)^2 + 1$

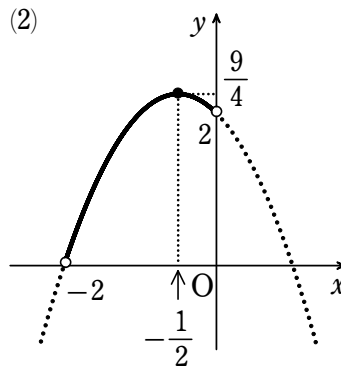
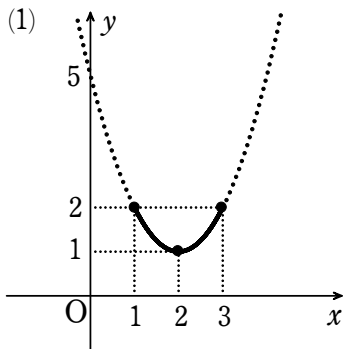
$1 \leq x \leq 3$ でのグラフは [図] の実線部分である。

よって， y は $x = 1, 3$ で最大値 2， $x = 2$ で最小値 1 をとる。

(2) $y = -x^2 - x + 2$ を変形すると $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

$-2 < x < 0$ でのグラフは [図] の実線部分である。

よって， y は $x = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。最小値はない。



A 3 - 2

解の公式を利用して，次の 2 次方程式を解け。

(1) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

(2) $9x(2x + 1) = 2$

(3) $2\sqrt{6}x^2 + 12x + 3\sqrt{6} = 0$

(4) $(x + 2)^2 + 4(x + 2) - 1 = 0$

解答 (1) $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$ (2) $x = \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}$ (3) $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

(4) $x = -4 \pm \sqrt{5}$

$$(1) \quad x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(2) 整理すると, $18x^2 + 9x - 2 = 0$ であるから

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-2)}}{2 \cdot 18} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{36} = \frac{-9 \pm 15}{36}$$

よって $x = \frac{6}{36}, -\frac{24}{36}$ すなわち $x = \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}$

(3) 両辺を $\sqrt{6}$ で割ると $2x^2 + 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

$$\text{よって} \quad x = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{(\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 3}}{2} = \frac{-\sqrt{6} \pm 0}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4) $x + 2 = A$ とおくと, $A^2 + 2 \cdot 2A - 1 = 0$ であるから

$$A = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = -2 \pm \sqrt{5}$$

よって $x = A - 2 = -4 \pm \sqrt{5}$

A 3 - 3

次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2 > 2x + 8$

(2) $2x^2 - 3x \leq 9$

(3) $x(x - 4) \leq 2(x^2 - 3)$

(4) $(2x + 1)^2 + 24 > (x + 5)^2$

解答 (1) $x < -2, 4 < x$ (2) $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$ (3) $x \leq -2 - \sqrt{10}, -2 + \sqrt{10} \leq x$

(4) $x < 0, 2 < x$

(1) 式を整理すると $x^2 - 2x - 8 > 0$

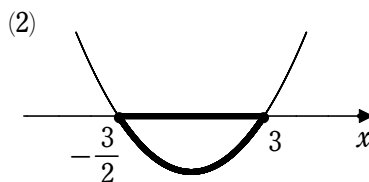
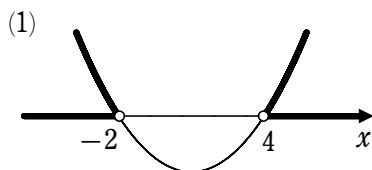
$$x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ を解くと } x = -2, 4$$

よって, この 2 次不等式の解は $x < -2, 4 < x$

(2) 式を整理すると $2x^2 - 3x - 9 \leq 0$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0 \text{ を解くと } x = -\frac{3}{2}, 3$$

よって, この 2 次不等式の解は $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$



(3) 展開すると $x^2 - 4x \leq 2x^2 - 6$ 式を整理すると $x^2 + 4x - 6 \geq 0$

$x^2 + 4x - 6 = 0$ を解くと $x = -2 \pm \sqrt{10}$

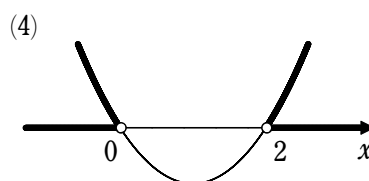
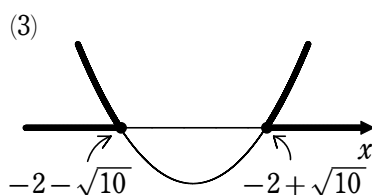
よって、この 2 次不等式の解は $x \leq -2 - \sqrt{10}, -2 + \sqrt{10} \leq x$

(4) 展開すると $4x^2 + 4x + 1 + 24 > x^2 + 10x + 25$

式を整理すると $x^2 - 2x > 0$

$x^2 - 2x = 0$ を解くと $x = 0, 2$

よって、この 2 次不等式の解は $x < 0, 2 < x$



A 3 - 4

次の 2 次不等式を解け。

(1) $x^2 + 14x + 49 < 0$

(2) $x^2 + 16x + 64 \geq 0$

(3) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

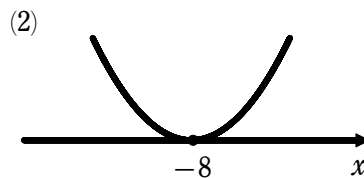
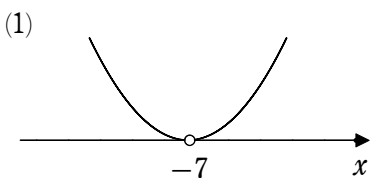
解答 (1) 解はない (2) すべての実数 (3) $x = \frac{1}{3}$

(1) $x^2 + 14x + 49 = 0$ を解くと $x = -7$ (重解)

よって、 $x^2 + 14x + 49 < 0$ の解はない。

(2) $x^2 + 16x + 64 = 0$ を解くと $x = -8$ (重解)

よって、 $x^2 + 16x + 64 \geq 0$ の解は すべての実数

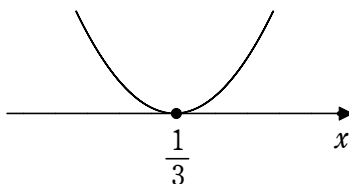


(3) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{1}{3} \text{ (重解)}$$

よって、 $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ の解は

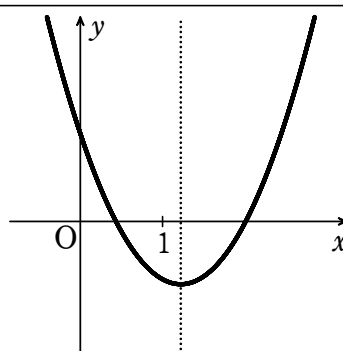
$$x = \frac{1}{3}$$



A 3 - 5

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが右の図のようになるとき、次の値の符号を求めよ。

- (1) a (2) b (3) c
 (4) $b^2 - 4ac$ (5) $a + b + c$



解答 (1) $a > 0$ (2) $b < 0$ (3) $c > 0$ (4) $b^2 - 4ac > 0$ (5) $a + b + c < 0$

(1) グラフが下に凸であるから $a > 0$

(2) グラフの軸は、直線 $x = -\frac{b}{2a}$ である。

軸が $x > 0$ の範囲にあるから $-\frac{b}{2a} > 0$

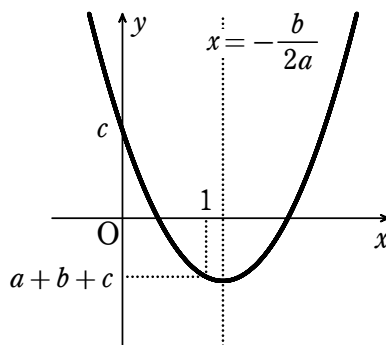
ここで、 $a > 0$ であるから $b < 0$

(3) c は $x = 0$ のときの y の値であるから $c > 0$

(4) グラフが x 軸と異なる 2 点で交わるから

$$b^2 - 4ac > 0$$

(5) $a + b + c$ は $x = 1$ のときの y の値であるから $a + b + c < 0$



A 3 - 6

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1) 2 点 $(0, 4)$, $(2, 4)$ を通り、頂点が直線 $y = 1$ 上にある。

(2) 放物線 $y = x^2$ を平行移動した曲線で、点 $(2, 3)$ を通り、頂点が直線 $y = x + 1$ 上にある。

解答 (1) $y = 3(x - 1)^2 + 1$ ($y = 3x^2 - 6x + 4$)

(2) $y = (x - 1)^2 + 2$, $y = (x - 2)^2 + 3$ ($y = x^2 - 2x + 3$, $y = x^2 - 4x + 7$)

(1) グラフの頂点が直線 $y = 1$ 上にあるから、求める 2 次関数は $y = a(x - p)^2 + 1$ と表

される。

このグラフが 2 点 (0, 4), (2, 4) を通るから

$$a(0-p)^2+1=4 \quad \dots\dots \textcircled{1},$$

$$a(2-p)^2+1=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } ap^2=3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } a(2-p)^2=3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から } ap^2=a(2-p)^2$$

$$a \neq 0 \text{ であるから } p^2=(2-p)^2$$

$$\text{ゆえに } 4p=4 \quad \text{すなわち } p=1$$

$$\textcircled{3} \text{ に代入して } a=3$$

よって、求める 2 次関数は

$$y=3(x-1)^2+1 \quad (y=3x^2-6x+4)$$

(2) グラフの頂点が直線 $y=x+1$ 上にあるから、頂点の座標を (p, q) とすると

$$q=p+1$$

よって、求める 2 次関数は $y=(x-p)^2+p+1$ と表される。

このグラフが点 (2, 3) を通るから

$$(2-p)^2+p+1=3$$

$$\text{整理すると } p^2-3p+2=0$$

$$\text{これを解いて } p=1, 2$$

よって、求める 2 次関数は

$$p=1 \text{ のとき } y=(x-1)^2+2,$$

$$p=2 \text{ のとき } y=(x-2)^2+3$$

したがって

$$y=(x-1)^2+2, \quad y=(x-2)^2+3 \quad (y=x^2-2x+3, \quad y=x^2-4x+7)$$

B 3 - 1

x の 2 次関数 $y=-2x^2+4ax+a$ の最大値を M とする。

(1) M を a の式で表せ。

(2) M の値を最小にする a の値と、 M の最小値を求めよ。

解答 (1) $M=2a^2+a$ (2) $a=-\frac{1}{4}$ で最小値 $-\frac{1}{8}$

$$(1) \quad y=-2x^2+4ax+a=-2(x^2-2ax)+a=-2[(x-a)^2-a^2]+a$$

$$= -2(x-a)^2 + 2a^2 + a$$

よって、 y は $x=a$ で最大値 $2a^2 + a$ をとる。

したがって $M = 2a^2 + a$

$$(2) \quad M = 2a^2 + a = 2\left(a^2 + \frac{1}{2}a\right) = 2\left\{\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} = 2\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

よって、 M は $a = -\frac{1}{4}$ で最小値 $-\frac{1}{8}$ をとる。

B 3 - 2

x, y が互いに関係なく変化するとき、 $P = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x + 2y + 6$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。

解答 $x = -5, y = -3$ で最小値 -7

$$P = x^2 - 2(y-2)x + 2y^2 + 2y + 6$$

$$= \{x - (y-2)\}^2 - (y-2)^2 + 2y^2 + 2y + 6$$

$$= \{x - (y-2)\}^2 + y^2 + 6y + 2 = \{x - (y-2)\}^2 + (y+3)^2 - 7$$

よって、 P は $x = y-2$ かつ $y = -3$ すなわち $x = -5, y = -3$ で最小値 -7 をとる。

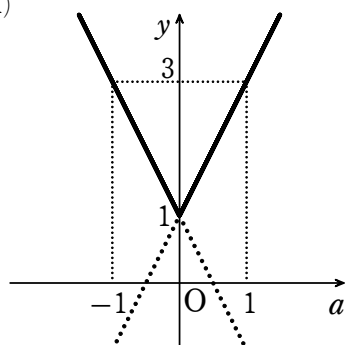
B 3 - 3

関数 $f(x) = x^2 - 2ax$ ($-1 \leq x \leq 1$) の最大値を $M(a)$ 、最小値を $m(a)$ とする。

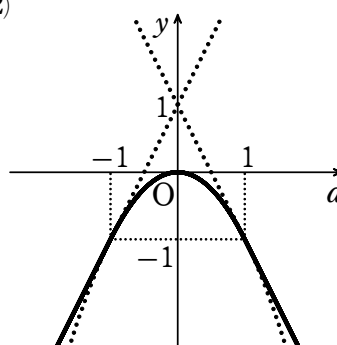
(1) $y = M(a)$ のグラフをかけ。

(2) $y = m(a)$ のグラフをかけ。

解答 (1)



(2)



関数の式を変形すると $f(x) = (x-a)^2 - a^2$ ($-1 \leq x \leq 1$)

(1) [1] $a < 0$ のとき

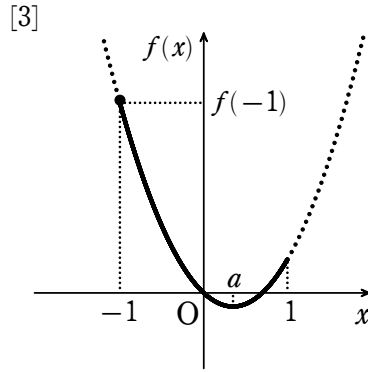
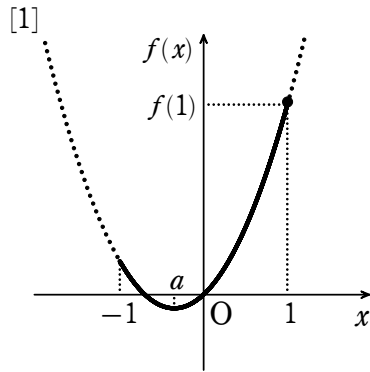
$f(x)$ は $x=1$ で最大となるから $M(a) = f(1) = -2a + 1$

[2] $a = 0$ のとき $f(x) = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$)

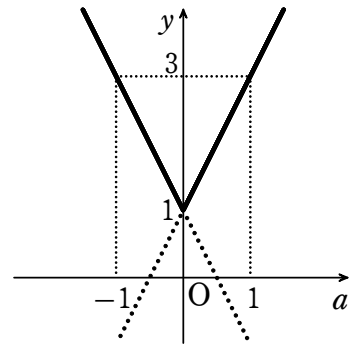
$f(x)$ は $x = -1, 1$ で最大値 1 をとるから $M(0) = 1$

[3] $a > 0$ のとき

$f(x)$ は $x = -1$ で最大となるから $M(a) = f(-1) = 2a + 1$



したがって、 $y = M(a)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



(2) [1] $a < -1$ のとき

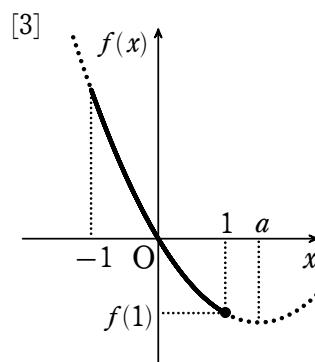
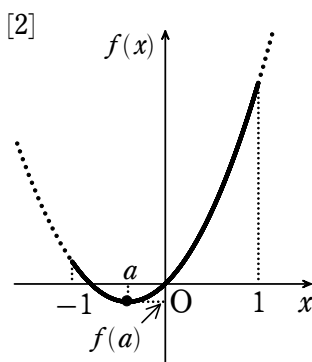
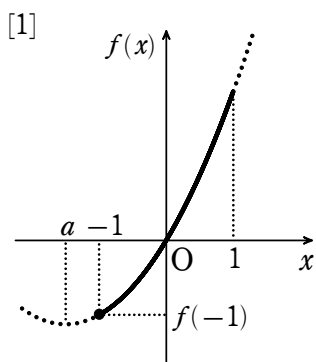
$f(x)$ は $x = -1$ で最小となるから $m(a) = f(-1) = 2a + 1$

[2] $-1 \leq a \leq 1$ のとき

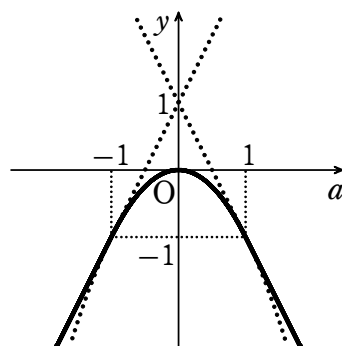
$f(x)$ は $x = a$ で最小となるから $m(a) = f(a) = -a^2$

[3] $1 < a$ のとき

$f(x)$ は $x = 1$ で最小となるから $m(a) = f(1) = -2a + 1$



したがって、 $y = m(a)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



B 3 - 4

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + y = 12$ のとき、 xy の最大値と最小値を求めよ。

解答 $x = 2$, $y = 6$ で最大値 12 ; $x = 0$, $y = 12$ または $x = 4$, $y = 0$ で最小値 0

$3x + y = 12$ から $y = 12 - 3x$ …… ①

$y \geq 0$ から $12 - 3x \geq 0$ すなわち $x \leq 4$

$x \geq 0$ と合わせて $0 \leq x \leq 4$ …… ②

$$\begin{aligned} xy &= x(12 - 3x) = -3x^2 + 12x \\ &= -3(x - 2)^2 + 12 \end{aligned}$$

よって、② の範囲において、 xy は $x = 2$ で最大値 12 をとり、 $x = 0$, 4 で最小値 0 をとる。

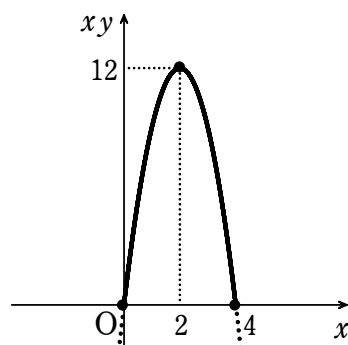
ここで、① から

$$x = 2 \text{ のとき } y = 12 - 3 \cdot 2 = 6$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 12 - 3 \cdot 0 = 12$$

$$x = 4 \text{ のとき } y = 12 - 3 \cdot 4 = 0$$

したがって、 $x = 2$, $y = 6$ で最大値 12,



$x=0, y=12$ または $x=4, y=0$ で最小値 0 をとる。

B 3 - 5

x を変数とする 4 次関数 $y=(x^2-4x+3)(-x^2+4x+2)-2x^2+8x-1$ の最大値は となる。

【解答】 (ア) $-t^2-3t+5$ (イ) $t \geq -4$ (ウ) $-\frac{3}{2}$ (エ) $\frac{29}{4}$

$t=x^2-4x$ とおくと

$$y=(t+3)(-t+2)-2t-1$$

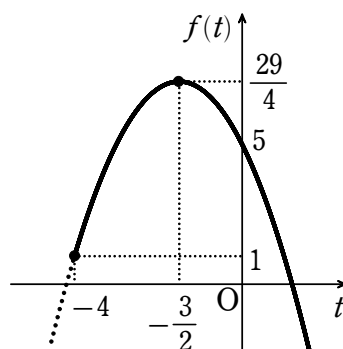
よって $f(t)=-t^2-3t+5$

ここで、 $t=(x-2)^2-4$ であるから、 t のとりうる値の範囲は $t \geq -4$

$$\text{また } f(t)=-\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$$

よって、 $t \geq -4$ の範囲で、 $f(t)$ は $t=-\frac{3}{2}$ のとき最

大値 $\frac{29}{4}$ をとる。



B 3 - 6

2 次不等式 $x^2-2mx+m+6>0$ の解がすべての実数であるとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

【解答】 $-2<m<3$

この 2 次不等式の係数について

$$D=(-2m)^2-4 \cdot 1 \cdot (m+6)=4(m^2-m-6)$$

2 次不等式の x^2 の係数が正であるから、 $D<0$ であればよい。

$$m^2-m-6<0 \text{ から } (m+2)(m-3)<0$$

これを解いて $-2<m<3$

B 3 - 7

x についての不等式 $3kx^2+4kx-k+8>0$ …… ① について

(1) すべての実数 x に対して、常に ① が成り立つ整数 k の値を求めよ。

(2) すべての整数 x に対して、常に ① が成り立つ実数 k の値の範囲を求めよ。

解答 (1) $k=0, 1, 2, 3$ (2) $0 \leq k < 4$

$f(x) = 3kx^2 + 4kx - k + 8$ とおく。

(1) [1] $k=0$ のとき $f(x) = 8 > 0$ よって このとき ① は常に成り立つ。

よって、 $k=0$ は条件を満たす。

[2] $k \neq 0$ のとき ① が常に成り立つ条件は $3k > 0$ かつ $D < 0$

$$D = (4k)^2 - 4 \cdot 3k(-k+8) = 28k^2 - 96k = 4k(7k-24) < 0 \text{ から } 0 < k < \frac{24}{7}$$

したがって $0 < k < \frac{24}{7}$ よって、整数 k は $k=1, 2, 3$

[1], [2] から ① が常に成り立つ整数 k の値は $0, 1, 2, 3$

$$(2) f(x) = 3k\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}k - k + 8 = 3k\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}k + 8$$

[1] $k=0$ のとき ① は常に成り立つ。よって $k=0$ は条件を満たす。

[2] $k > 0$ のとき x が頂点の x 座標 $-\frac{2}{3}$ に最も近い整数値 -1 のとき $f(x)$ は最小となる。

したがって ① が成り立つための条件は $f(-1) = -2k + 8 > 0$ ゆえに $k < 4$

よって $0 < k < 4$

[3] $k < 0$ のとき すべての整数 x については ① は成り立たない。

[1] ~ [3] から ① が常に成り立つ実数 k の値の範囲は $0 \leq k < 4$

B 3 - 8

不等式 $|x^2 - 6x - 7| > 2x + 2$ を解け。

解答 $x < -1, -1 < x < 5, 9 < x$

$x^2 - 6x - 7 \geq 0$ の解は、 $(x+1)(x-7) \geq 0$ から $x \leq -1, 7 \leq x$

$x^2 - 6x - 7 < 0$ の解は、 $(x+1)(x-7) < 0$ から $-1 < x < 7$

[1] $x \leq -1, 7 \leq x$ のとき、不等式は $x^2 - 6x - 7 > 2x + 2$

ゆえに $x^2 - 8x - 9 > 0$ よって $(x+1)(x-9) > 0$

したがって $x < -1, 9 < x$ …… ①

これは $x \leq -1, 7 \leq x$ を満たす。

[2] $-1 < x < 7$ のとき、不等式は $-(x^2 - 6x - 7) > 2x + 2$

ゆえに $x^2 - 4x - 5 < 0$ よって $(x+1)(x-5) < 0$

したがって $-1 < x < 5$ …… ②

これは $-1 < x < 7$ を満たす。

求める解は、①、② を合わせた範囲で $x < -1$, $-1 < x < 5$, $9 < x$

別解 不等式から $x^2 - 6x - 7 < -(2x + 2)$ または $2x + 2 < x^2 - 6x - 7$

整理して $x^2 - 4x - 5 < 0$ または $x^2 - 8x - 9 > 0$

ゆえに $-1 < x < 5$ または $x < -1$, $9 < x$

B 3 - 9

2 次方程式 $2kx^2 - (k+2)x - 5 = 0$ の 1 つの解が -1 と 0 の間にあり、他の解が 2 と 3 の間にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。

解答 $1 < k < \frac{3}{2}$

$f(x) = 2kx^2 - (k+2)x - 5$ とおく。

2 次方程式であるから $2k \neq 0$ すなわち $k \neq 0$ …… ①

題意を満たす条件は $f(-1) \cdot f(0) < 0$ かつ $f(2) \cdot f(3) < 0$

ここで $f(-1) = 2k \cdot (-1)^2 - (k+2) \cdot (-1) - 5 = 3k - 3 = 3(k-1)$

$$f(0) = -5$$

$$f(2) = 2k \cdot 2^2 - (k+2) \cdot 2 - 5 = 6k - 9 = 3(2k-3)$$

$$f(3) = 2k \cdot 3^2 - (k+2) \cdot 3 - 5 = 15k - 11$$

よって $3(k-1) \cdot (-5) < 0$ かつ $3(2k-3)(15k-11) < 0$

すなわち $k > 1$ かつ $\frac{11}{15} < k < \frac{3}{2}$

したがって $1 < k < \frac{3}{2}$ これは ① を満たす。

B 3 - 10

未知数 x に関する 2 次方程式 $x^2 - 2ax + 1 - a^2 = 0$ が $0 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき、定数 a の満たす条件を求めよ。

解答 $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < -1 + \sqrt{3}$

$f(x) = x^2 - 2ax + 1 - a^2$ とおき、方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とする。

$f(x) = 0$ が $0 < x < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は

$$\begin{cases} D > 0, f(0) > 0, f(1) > 0 \\ y = f(x) \text{ の軸について } 0 < a < 1 \end{cases} \dots\dots ①$$

$$D > 0 \text{ から } a^2 - (1 - a^2) > 0 \text{ すなわち } 2a^2 - 1 > 0$$

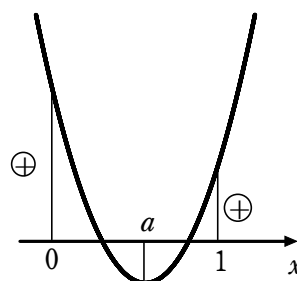
$$\text{よって } a < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} < a \dots\dots ②$$

$$f(0) > 0 \text{ から } 1 - a^2 > 0 \text{ よって } -1 < a < 1 \dots\dots ③$$

$$f(1) > 0 \text{ から } -a^2 - 2a + 2 > 0$$

$$\text{よって } -1 - \sqrt{3} < a < -1 + \sqrt{3} \dots\dots ④$$

$$\text{①} \sim \text{④} \text{ の共通範囲を求めて } \frac{\sqrt{2}}{2} < a < -1 + \sqrt{3}$$



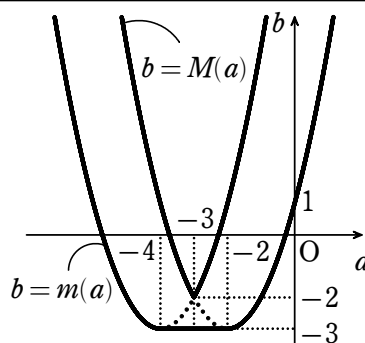
C 3 - 1

関数 $y = x^2 + 4x + 1$ ($a \leq x \leq a + 2$) の最大値を $M(a)$, 最小値を $m(a)$ とする。

$b = M(a)$, $b = m(a)$ のグラフをかけ。

〔図〕
$$M(a) = \begin{cases} a^2 + 4a + 1 & (a \leq -3) \\ a^2 + 8a + 13 & (a > -3) \end{cases}$$

$$m(a) = \begin{cases} a^2 + 8a + 13 & (a < -4) \\ -3 & (-4 \leq a \leq -2) \\ a^2 + 4a + 1 & (a > -2) \end{cases}$$



$f(x) = x^2 + 4x + 1$ とおく。

$$f(x) = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 1 = (x+2)^2 - 3$$

[1] $a+2 < -2$, すなわち $a < -4$ のとき,

$a \leq x \leq a+2$ において $f(x)$ は減少関数であるから
 最大値 $f(a)$, 最小値 $f(a+2)$ よって

$$M(a) = a^2 + 4a + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$m(a) = (a+2+2)^2 - 3 = a^2 + 8a + 13 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

[2] $a \leq -2 \leq a+2$, すなわち $-4 \leq a \leq -2$ のとき

$$m(a) = f(-2) = -3 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

定義域の中央 $x = a+1$ が軸 $x = -2$ の左側にあるとき

$a+1 \leq -2$ すなわち $-4 \leq a \leq -3$ のとき,

$$M(a) = f(a) = a^2 + 4a + 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

軸より右側にあるとき

$a+1 > -2$ すなわち $-3 < a \leq -2$ のとき,

$$M(a) = f(a+2) = a^2 + 8a + 13 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

[3] $-2 < a$ のとき

$$M(a) = f(a+2) = a^2 + 8a + 13 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$m(a) = f(a) = a^2 + 4a + 1 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

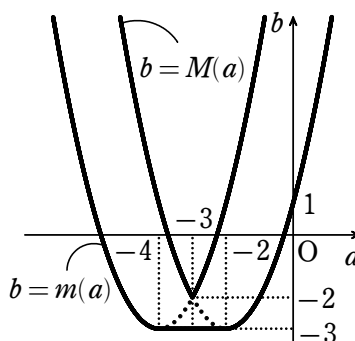
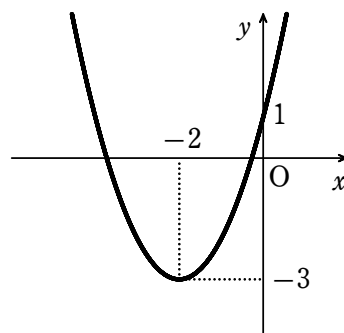
①, ④, ⑤, ⑥ から

$$M(a) = \begin{cases} a^2 + 4a + 1 & (a \leq -3) \\ a^2 + 8a + 13 & (a > -3) \end{cases}$$

②, ③, ⑦ から

$$m(a) = \begin{cases} a^2 + 8a + 13 & (a < -4) \\ -3 & (-4 \leq a \leq -2) \\ a^2 + 4a + 1 & (a > -2) \end{cases}$$

よって, 右の図の実線部分。



C 3 - 2

2 次方程式 $mx^2 - x - 2 = 0$ の 2 つの実数解が, それぞれ以下のようになるための m の条件を求めよ。ただし, 2 つの解には重解も含める。

- (1) 2 つの解がともに -1 より大きい。
- (2) 1 つの解は 1 より大きく, 他の解は 1 より小さい。
- (3) 2 つの解の絶対値がともに 1 より小さい。

解答 (1) $m > 1$ (2) $0 < m < 3$ (3) $m > 3$

$mx^2 - x - 2 = 0$ は 2 次方程式であるから $m \neq 0$

$$f(x) = mx^2 - x - 2 \text{ とおくと } f(x) = m\left(x - \frac{1}{2m}\right)^2 - \frac{1}{4m} - 2$$

$f(x) = 0$ の判別式を D とすると $D = 1 + 8m$

また $f(-1) = m - 1$, $f(1) = m - 3$

$$(1) \ m > 0 \text{ のとき } D \geq 0, \frac{1}{2m} > -1, f(-1) > 0 \text{ から } m \geq -\frac{1}{8}, m > -\frac{1}{2}, m > 1$$

よって $m > 1$

$$m < 0 \text{ のとき } D \geq 0, \frac{1}{2m} > -1, f(-1) < 0 \text{ から } m \geq -\frac{1}{8}, m < -\frac{1}{2}, m < 1$$

これを満たす m の値は存在しない。

したがって $m > 1$

$$(2) \ m > 0 \text{ のとき } f(1) = m - 3 < 0 \quad \text{よって } 0 < m < 3$$

$$m < 0 \text{ のとき } f(1) = m - 3 > 0 \quad \text{これを満たす } m \text{ の値は存在しない。}$$

よって $0 < m < 3$

(3) (1) の条件に加え、2 つの解がともに 1 より小さくなることであるから

$$m > 0 \text{ のとき } D \geq 0, \frac{1}{2m} < 1, f(1) > 0$$

$$\text{よって } m \geq -\frac{1}{8}, m > \frac{1}{2}, m > 3 \quad \text{ゆえに } m > 3$$

(1) の $m > 1$ とあわせて、求める m の条件は $m > 3$

別解 (1) 方程式が 2 つの実数解をもつから $D \geq 0$ すなわち $m \geq -\frac{1}{8}$ …… ①

2 次方程式 $mx^2 - x - 2 = 0$ の 2 つの実数解を α , β とすると、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{1}{m} \text{ …… ②, } \alpha\beta = -\frac{2}{m} \text{ …… ③}$$

α , β がともに -1 より大きい条件は $(\alpha + 1) + (\beta + 1) > 0$, $(\alpha + 1)(\beta + 1) > 0$

すなわち $\alpha + \beta + 2 > 0$, $\alpha\beta + \alpha + \beta + 1 > 0$

$$\text{これらに ②, ③ を代入すると } \frac{1}{m} + 2 > 0, -\frac{1}{m} + 1 > 0$$

$$\text{この不等式を連立して解くと } m > 1, m < -\frac{1}{2} \text{ …… ④}$$

①, ④ から、求める条件は $m > 1$

(2), (3) についても、解と係数の関係を用いて解くことができる。

C 3 - 3

a と x を実数とする。 x についての不等式 $x^2 - (a^2 + a - 2)x + a^3 - 2a < 0$ を解け。

解答 $-1 < a < 2$ のとき $a^2 - 2 < x < a$; $a = -1, 2$ のとき 解なし;

$a < -1, 2 < a$ のとき $a < x < a^2 - 2$

$$x^2 - (a^2 + a - 2)x + a^3 - 2a < 0$$

すなわち $x^2 - (a^2 + a - 2)x + a(a^2 - 2) < 0$ から

$$\{x - (a^2 - 2)\}(x - a) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

このとき、 a の値によって場合分けをすると

[1] $a^2 - 2 < a$ のとき

$$a^2 - a - 2 < 0 \quad \text{すなわち } (a+1)(a-2) < 0 \quad \text{から} \quad -1 < a < 2$$

このとき、不等式①の解は $a^2 - 2 < x < a$

[2] $a^2 - 2 = a$ のとき

$$a^2 - a - 2 = 0 \quad \text{すなわち } (a+1)(a-2) = 0 \quad \text{から} \quad a = -1, 2$$

このとき、不等式①の解は なし

[3] $a^2 - 2 > a$ のとき

$$a^2 - a - 2 > 0 \quad \text{すなわち } (a+1)(a-2) > 0 \quad \text{から} \quad a < -1, 2 < a$$

このとき、不等式①の解は $a < x < a^2 - 2$

以上から、求める不等式の解は

$$-1 < a < 2 \quad \text{のとき} \quad a^2 - 2 < x < a$$

$a = -1, 2$ のとき なし

$$a < -1, 2 < a \quad \text{のとき} \quad a < x < a^2 - 2$$

C 3 - 4

$4 \leq x \leq 6$ の範囲において、常に 2 次不等式 $x^2 - 2ax + a + 6 > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $a < \frac{22}{7}$

$$f(x) = x^2 - 2ax + a + 6 \quad \text{とすると} \quad f(x) = (x - a)^2 - a^2 + a + 6$$

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で、軸は直線 $x = a$

$4 \leq x \leq 6$ で常に $f(x) > 0$ が成り立つのは、 $4 \leq x \leq 6$ における $f(x)$ の最小値が正になるときである。

[1] $a < 4$ のとき

$4 \leq x \leq 6$ における $f(x)$ の最小値は $f(4) = -7a + 22$

よって $-7a + 22 > 0$

ゆえに $a < \frac{22}{7}$ これは $a < 4$ を満たす。

[2] $4 \leq a \leq 6$ のとき

$4 \leq x \leq 6$ における $f(x)$ の最小値は $f(a) = -a^2 + a + 6$

よって $-a^2 + a + 6 > 0$

両辺に -1 を掛けて $a^2 - a - 6 < 0$ すなわち $(a+2)(a-3) < 0$

ゆえに $-2 < a < 3$ これは $4 \leq a \leq 6$ を満たさない。

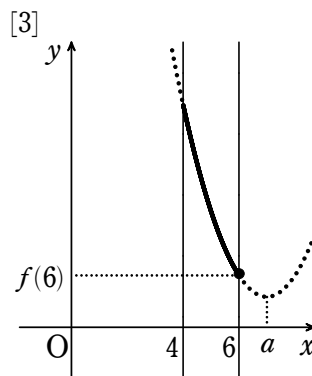
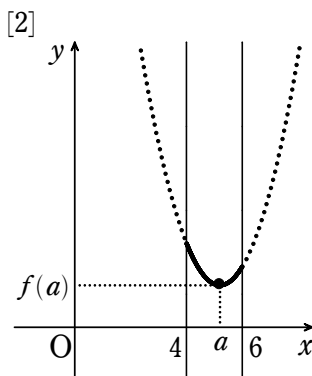
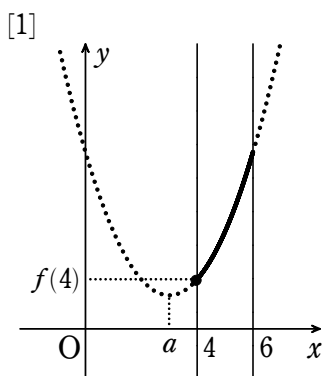
[3] $6 < a$ のとき

$4 \leq x \leq 6$ における $f(x)$ の最小値は $f(6) = -11a + 42$

よって $-11a + 42 > 0$

ゆえに $a < \frac{42}{11}$ これは $a > 6$ を満たさない。

[1] ~ [3] から、求める a の値の範囲は $a < \frac{22}{7}$



C 3 - 5

2 つの 2 次関数 $f(x) = x^2 + 2ax + 25$, $g(x) = -x^2 + 4ax - 25$ がある。

(1) どんな x の値に対しても $f(x) > g(x)$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) どんな x_1, x_2 の値に対しても $f(x_1) > g(x_2)$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 (1) $-10 < a < 10$ (2) $-\sqrt{10} < a < \sqrt{10}$

(1) $f(x) > g(x)$ から $x^2 + 2ax + 25 > -x^2 + 4ax - 25$

よって $x^2 - ax + 25 > 0$

この不等式がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件は

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 < 0$$

よって $(a+10)(a-10) < 0$ したがって $-10 < a < 10$

(2) どんな x_1, x_2 の値に対しても $f(x_1) > g(x_2)$ が成り

立つための必要十分条件は

$$(f(x) \text{ の最小値}) > (g(x) \text{ の最大値})$$

となることである。

$f(x) = (x+a)^2 - a^2 + 25$ であるから、 $f(x)$ の最小値は

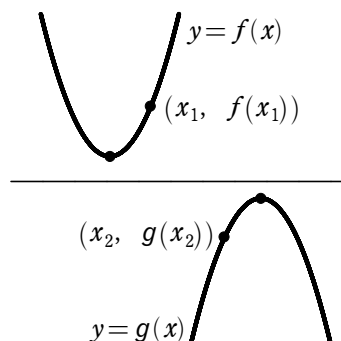
$$-a^2 + 25$$

$g(x) = -(x-2a)^2 + 4a^2 - 25$ であるから、 $g(x)$ の最

大値は $4a^2 - 25$

よって $-a^2 + 25 > 4a^2 - 25$

ゆえに $a^2 - 10 < 0$ これを解いて $-\sqrt{10} < a < \sqrt{10}$



C 3 - 6

$f(x)$ は $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x+3}$ で定義される関数とする。

(1) 方程式 $f(x) = a$ が実数の解をもつような a の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値を求めよ。

解答 (1) $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ (2) 順に $x=2, x=-1$

(1) $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \neq 0$ であるから、 $f(x)$ は実数全体で定義される。

$f(x) = a$ から $2x-1 = a(x^2-2x+3)$

すなわち $ax^2 - 2(a+1)x + 3a+1 = 0 \dots\dots ①$

$a=0$ のとき、①は $-2x+1=0$ であるから、解 $x=\frac{1}{2}$ をもつ。

$a \neq 0$ のとき、①が実数解をもつには判別式 D について $D \geq 0$

よって $\frac{D}{4} = (a+1)^2 - a(3a+1) \geq 0$ すなわち $2a^2 - a - 1 \leq 0$

よって $(2a+1)(a-1) \leq 0$ ゆえに $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ ($a \neq 0$)

したがって、求める a の値の範囲は $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

(2) (1) から, x が実数の範囲を動くとき $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

よって, $f(x)$ の最大値は 1, 最小値は $-\frac{1}{2}$ である。

$f(x)=1$ のとき, $a=1$ であるから, ① より $x^2-4x+4=0$

よって $(x-2)^2=0$ ゆえに $x=2$

$f(x)=-\frac{1}{2}$ のとき, $a=-\frac{1}{2}$ であるから, ① より $-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=0$

よって $(x+1)^2=0$ ゆえに $x=-1$

したがって, $f(x)$ は $x=2$ のとき最大値をとり, $x=-1$ のとき最小値をとる。

C 3 - 7

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ のとき, $(x+y-1)^2+(x-y+1)^2$ の最小値は ア , 最大値は イ である。

解答 (ア) 0 (イ) 4

(与式) $=\{x+(y-1)\}^2+\{x-(y-1)\}^2=2\{x^2+(y-1)^2\}$

$0 \leq x \leq 1$ の範囲において $0^2 \leq x^2 \leq 1^2$

$x=0$ のとき $x^2=0$, $x=1$ のとき $x^2=1$

$0 \leq y \leq 1$ の範囲において $0^2 \leq (y-1)^2 \leq (-1)^2$

$y=1$ のとき $(y-1)^2=0$, $y=0$ のとき $(y-1)^2=1$

よって, 与式は $x=0, y=1$ のとき最小値 $2(0+0)=\text{ア} 0$,

$x=1, y=0$ のとき最大値 $2(1+1)=\text{イ} 4$

別解 (与式) $=2\{x^2+(y-1)^2\}$

$2\{x^2+(y-1)^2\}$ が最小(最大)

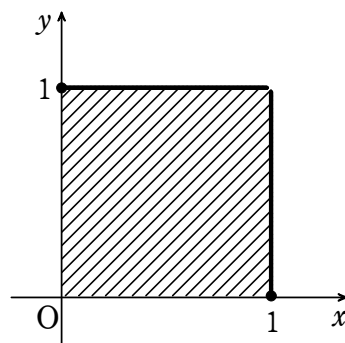
$\iff x^2+(y-1)^2$ が最小(最大)

$\iff$ 点 (x, y) と点 $(0, 1)$ との距離の 2 乗が
最小(最大)

点 (x, y) は, 右の図の正方形の内部および周上を
動くから

$(x, y)=(0, 1)$ のとき最小値 0,

$(x, y)=(1, 0)$ のとき最大値 $2 \times (\sqrt{2})^2 = 4$

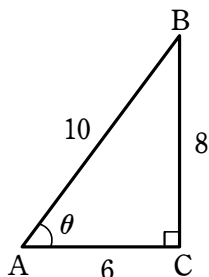


第 4 章 三角比

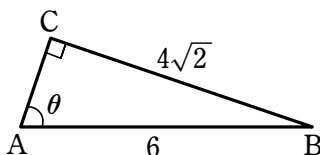
A 4 - 1

下の図において、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

(1)



(2)



解答 (1) $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\tan \theta = \frac{4}{3}$

(2) $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \theta = \frac{1}{3}$, $\tan \theta = 2\sqrt{2}$

(1) $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

(2) $AC = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$

よって $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

A 4 - 2

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $2\sin \theta - \sqrt{3} = 0$

(2) $\sqrt{2} \cos \theta = 1$

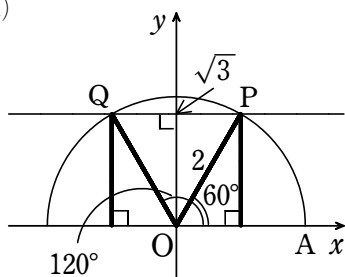
(3) $\tan \theta + 1 = 0$

解答 (1) $\theta = 60^\circ, 120^\circ$ (2) $\theta = 45^\circ$ (3) $\theta = 135^\circ$

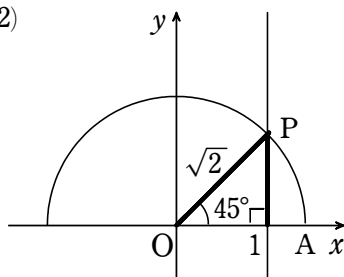
(1) $2\sin \theta - \sqrt{3} = 0$ から $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 図 (1) から $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

(2) $\sqrt{2} \cos \theta = 1$ から $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 図 (2) から $\theta = 45^\circ$

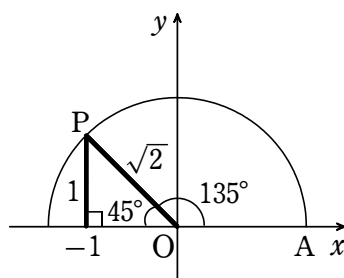
(1)



(2)



- (3) $\tan \theta + 1 = 0$ から $\tan \theta = -1$
 右の図から $\theta = 135^\circ$

**A 4 - 3**

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のうち, 1 つが次の値をとるとき, 各場合について他の 2 つの値を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{3}{4}$

(2) $\tan \theta = -3$

解答 (1) $\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$ または $\cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan \theta = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

(2) $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

(1) $\sin \theta = \frac{3}{4}$ から, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ または $90^\circ < \theta < 180^\circ$ である。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ から } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき, $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき, $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (-3)^2 = 10 \quad \text{よって} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$$

$\tan \theta < 0$ であるから, θ は鈍角で $\cos \theta < 0$

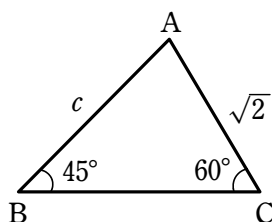
$$\text{ゆえに} \quad \cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{また} \quad \sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

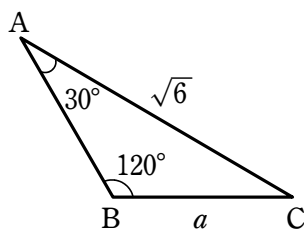
A 4 - 4

下の図において, 次のものを求めよ。

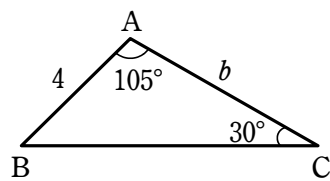
(1) c



(2) a



(3) b



【解答】 (1) $c = \sqrt{3}$ (2) $a = \sqrt{2}$ (3) $b = 4\sqrt{2}$

$$(1) \quad \text{正弦定理により} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{よって} \quad c = \sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

$$(2) \quad \text{正弦定理により} \quad \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}$$

$$\text{よって} \quad a = \sqrt{6} \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{1}{\sin 120^\circ} = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

$$(3) \quad B = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$$

正弦定理により $\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ}$

よって $b = 4 \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{1}{\sin 30^\circ} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

A 4 - 5

$a=7$, $b=5$, $c=3$ の $\triangle ABC$ において, 次のものを求めよ。

- (1) $\sin A$ (2) 面積 S (3) 内接円の半径 r

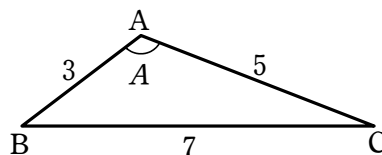
解答 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



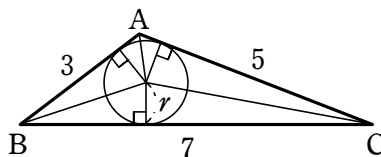
別解 $\cos A = -\frac{1}{2}$ から $A = 120^\circ$ よって $\sin A = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

(3) $S = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}r(7+5+3) = \frac{15}{2}r$

よって $\frac{15}{2}r = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

したがって $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**B 4 - 1**

$\triangle ABC$ において次が成り立つとき, A を求めよ。

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 8$$

解答 $A = 60^\circ$

正弦定理により, $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ が成り立つから

$$a : b : c = 7 : 5 : 8$$

このとき, 正の数 k を用いて $a=7k$, $b=5k$, $c=8k$ と表すことができる。

$$\text{余弦定理により} \quad \cos A = \frac{(5k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 8k} = \frac{40k^2}{80k^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad A = 60^\circ$$

B 4 - 2

△ABC において、 $A : B : C = 1 : 2 : 3$ のとき、次のものを求めよ。

(1) A, B, C

(2) $a : b : c$

$$\text{〔解答〕} \quad (1) \quad A = 30^\circ, B = 60^\circ, C = 90^\circ \quad (2) \quad a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$$

(1) $A : B : C = 1 : 2 : 3$ であるから、 $A = \theta, B = 2\theta, C = 3\theta$ とおける。

$$A + B + C = 180^\circ \text{ であるから} \quad \theta + 2\theta + 3\theta = 180^\circ$$

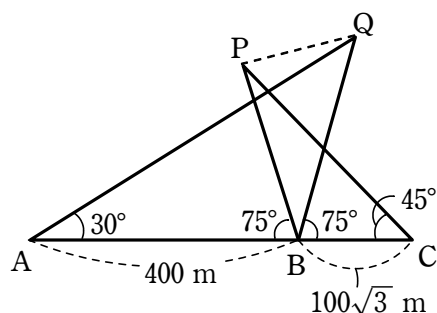
$$\text{これを解いて} \quad \theta = 30^\circ \quad \text{よって} \quad A = 30^\circ, B = 60^\circ, C = 90^\circ$$

(2) 正弦定理により $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

B 4 - 3

2 地点 P, Q 間の距離を求めるために、1 つの直線上にある 3 地点 A, B, C をとったら、
 $AB = 400 \text{ m}$, $BC = 100\sqrt{3} \text{ m}$, $\angle QAB = 30^\circ$,
 $\angle PBA = \angle QBC = 75^\circ$, $\angle PCB = 45^\circ$ であつた。P, Q 間の距離を求めよ。



$$\text{〔解答〕} \quad 100\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\angle BPC = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

$$\triangle PBC \text{ に正弦定理を使うと} \quad \frac{BP}{\sin 45^\circ} = \frac{100\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{よって} \quad BP = 100\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{1}{\sin 30^\circ}$$

$$= 100\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1} = 100\sqrt{6}$$

$$\text{また} \quad \angle AQB = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

△QAB に正弦定理を使うと $\frac{BQ}{\sin 30^\circ} = \frac{400}{\sin 45^\circ}$

$$\begin{aligned} \text{よって } BQ &= 400 \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} \\ &= 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = 200\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで $\angle PBQ = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$

△PBQ に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (100\sqrt{6})^2 + (200\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 100\sqrt{6} \cdot 200\sqrt{2} \cos 30^\circ \\ &= 100^2 \cdot 6 + 200^2 \cdot 2 - 200^2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6 \cdot 100^2 - 200^2 = 60000 - 40000 \\ &= 20000 \end{aligned}$$

PQ > 0 であるから

$$PQ = \sqrt{20000} = 100\sqrt{2} \text{ (m)}$$

B 4 - 4

次のような △ABC の残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

(3) $a = \sqrt{2}$, $B = 45^\circ$, $C = 105^\circ$ (4) $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, $B = 30^\circ$

解答 (3) $b = 2$, $c = 1 + \sqrt{3}$, $A = 30^\circ$

(4) $a = 2$, $A = 90^\circ$, $C = 60^\circ$ または $a = 1$, $A = 30^\circ$, $C = 120^\circ$

(3) $A = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$

正弦定理により $\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$

よって $b = \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$

余弦定理により

$$2^2 = c^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot c \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ$$

整理して $c^2 - 2c - 2 = 0$

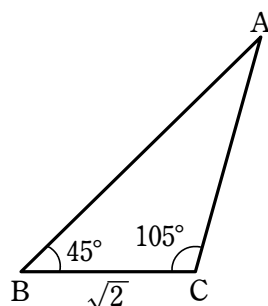
これを解くと $c = 1 \pm \sqrt{3}$

$c > 0$ であるから $c = 1 + \sqrt{3}$

(4) 正弦定理により $\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C}$

$B = 30^\circ$ より $0^\circ < C < 150^\circ$ であるから

よって $\sin C = \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$C = 60^\circ, 120^\circ$$

[1] $C = 60^\circ$ のとき

$$A = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

三平方の定理により

$$a = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

[2] $C = 120^\circ$ のとき

$$A = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

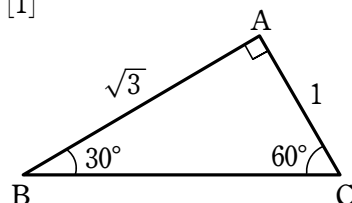
よって、 $A = B$ であるから、 $\triangle ABC$ は $a = b$ の二等辺三角形である。

したがって $a = 1$

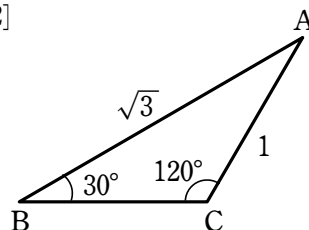
以上から $a = 2, A = 90^\circ, C = 60^\circ$

または $a = 1, A = 30^\circ, C = 120^\circ$

[1]



[2]



B 4 - 5

$\triangle ABC$ において、 $a = \sqrt{7}$ 、 $b = 2$ 、 $c = 3$ とする。線分 BC の中点を M とするとき、 AM の長さを求めよ。

解答 $\frac{\sqrt{19}}{2}$

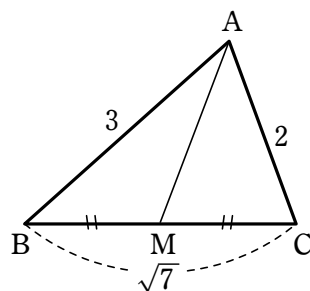
$\triangle ABC$ に余弦定理を使うと

$$\cos B = \frac{3^2 + (\sqrt{7})^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$\triangle ABM$ に余弦定理を使うと

$$\begin{aligned} AM^2 &= 3^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{19}{4} \end{aligned}$$

$AM > 0$ であるから $AM = \frac{\sqrt{19}}{2}$



B 4 - 6

$\triangle ABC$ において、 $AB = 4$ 、 $AC = 3$ 、 $A = 60^\circ$ とする。 $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 AD の長さを求めよ。

解答 $\frac{12\sqrt{3}}{7}$

$AD = x$ とする。

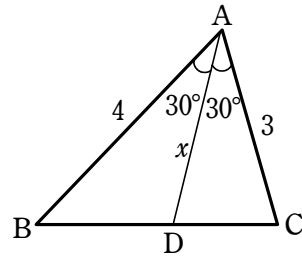
$\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ$$

よって $\frac{7}{4}x = 3\sqrt{3}$

これを解いて $x = \frac{12\sqrt{3}}{7}$

したがって $AD = \frac{12\sqrt{3}}{7}$



B 4 - 7

次の等式が成り立つ $\triangle ABC$ はどのような形の三角形か。

(1) $a \sin A + b \sin B = c \sin C$

(2) $\sin C = 2 \sin A \cos B$

解答 (1) $C = 90^\circ$ の直角三角形 (2) $a = b$ の二等辺三角形

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。

正弦定理により $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$

これらを等式 $a \sin A + b \sin B = c \sin C$ に代入して $a \cdot \frac{a}{2R} + b \cdot \frac{b}{2R} = c \cdot \frac{c}{2R}$

両辺に $2R$ を掛けて $a^2 + b^2 = c^2$

したがって、 $\triangle ABC$ は $C = 90^\circ$ の直角三角形である。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。

正弦定理により $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$

また、余弦定理により $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

これらを等式 $\sin C = 2 \sin A \cos B$ に代入して

$$\frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

すなわち $\frac{c}{2R} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2Rc}$

両辺に $2Rc$ を掛けて $c^2 = c^2 + a^2 - b^2$ よって $a^2 = b^2$

$a > 0, b > 0$ であるから $a = b$

したがって、 $\triangle ABC$ は $a = b$ の二等辺三角形である。

B 4 - 8

円に内接する四角形 ABCD において、 $AB=2$, $BC=2$, $CD=3$, $DA=4$ とする。
次の値を求めよ。

- (1) AC の長さ (2) 四角形 ABCD の面積
(3) 2つの対角線 AC と BD の交点を E とすると $BE : ED$ の比

解答 (1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ (3) $1 : 3$

- (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos B = 8 - 8 \cos B \quad \dots\dots ①$$

$\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos D = 25 - 24 \cos D \quad \dots\dots ②$$

四角形 ABCD は円に内接するから $D = 180^\circ - B$

$$\dots\dots ③$$

$$①, ②, ③ \text{ から } 8 - 8 \cos B = 25 + 24 \cos B$$

$$\text{したがって } 32 \cos B = -17 \quad \cos B = -\frac{17}{32}$$

$$① \text{ に代入して } AC^2 = \frac{49}{4}$$

$$AC > 0 \text{ であるから } AC = \frac{7}{2}$$

$$(2) (1) \text{ から } \sin B = \sqrt{1 - \left(-\frac{17}{32}\right)^2} = \frac{7\sqrt{15}}{32} = \sin D$$

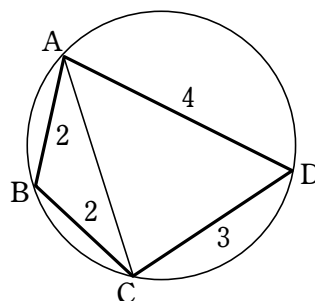
よって 四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin B + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin D = 8 \cdot \frac{7\sqrt{15}}{32} = \frac{7\sqrt{15}}{4}$$

$$(3) BE : ED = \triangle ABC : \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin B : \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin D = 2 \sin B : 6 \sin B = 1 : 3$$



C 4 - 1

3 辺の長さが $2x+1$, x^2-1 , x^2+x+1 である三角形について

- (1) $2x+1$, x^2-1 , x^2+x+1 が三角形の 3 辺となるための x の条件を求めよ。
(2) 最大辺に対する角の大きさを求めよ。

解答 (1) $x > 1$ (2) 120°

- (1) $2x+1$, x^2-1 , x^2+x+1 が三角形の 3 辺となるのは、次の 3 つの不等式が同時に成り立つときである。

$$\begin{cases} 2x+1 < (x^2-1) + (x^2+x+1) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2-1 < (x^2+x+1) + (2x+1) & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x^2+x+1 < (2x+1) + (x^2-1) & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

① から $2x^2-x-1 > 0$ すなわち $(2x+1)(x-1) > 0$

よって $x < -\frac{1}{2}$, $1 < x$ $\cdots \cdots \textcircled{4}$

② から $x > -1$ $\cdots \cdots \textcircled{5}$

③ から $x > 1$ $\cdots \cdots \textcircled{6}$

④, ⑤, ⑥ の共通範囲を求めて $x > 1$

(2) $x > 1$ のとき $(x^2+x+1) - (2x+1) = x^2-x = x(x-1) > 0$
 $(x^2+x+1) - (x^2-1) = x+2 > 0$

よって、長さが x^2+x+1 の辺が最大辺である。

したがって、求める角の大きさを θ とすると、余弦定理により

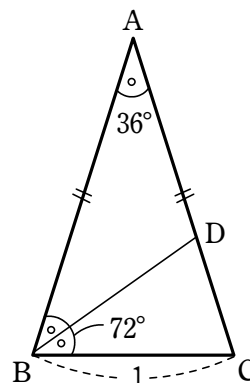
$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2x+1)^2 + (x^2-1)^2 - (x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)} \\ &= \frac{-2x^3 - x^2 + 2x + 1}{2(2x+1)(x^2-1)} = \frac{-(2x+1)x^2 + 2x + 1}{2(2x+1)(x^2-1)} \\ &= -\frac{(2x+1)(x^2-1)}{2(2x+1)(x^2-1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $\theta = 120^\circ$

C 4 - 2

右の図の $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

- (1) 辺 AB の長さ
- (2) $\sin 18^\circ$ の値
- (3) $\cos 36^\circ$ の値



【解答】 (1) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(1) $AB=x$ とする。

$\angle ABD = \angle DBC = 36^\circ$ であり, $\triangle BCD$, $\triangle DAB$ は二等辺三角形であるから

$$BC = BD = AD = 1$$

したがって $CD = x - 1$

$\triangle ABC \sim \triangle BCD$ であるから

$$AB : BC = BC : CD$$

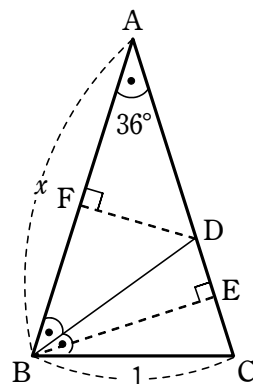
よって $x : 1 = 1 : (x - 1)$

すなわち $x(x - 1) = 1$

ゆえに $x^2 - x - 1 = 0$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x > 0 \text{ であるから} \quad x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$



(2) B から CD に下ろした垂線を BE とすると

$$\angle CBE = 18^\circ, \quad CE = \frac{x-1}{2}$$

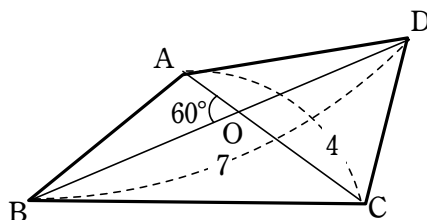
$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sin 18^\circ = \sin \angle CBE &= \frac{CE}{BC} = \frac{x-1}{2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 \right) \div 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \end{aligned}$$

(3) D から AB に下ろした垂線を DF とする。

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ = \cos \angle DAF &= \frac{AF}{AD} = \frac{x}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{4} \end{aligned}$$

C 4 - 3

四角形 ABCD の 2 つの対角線 AC, BD の交点を O とする。AC=4, BD=7, $\angle AOB = 60^\circ$ であるとき, 四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



【解答】 $7\sqrt{3}$

$OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$ とする。

$$S = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA$$

$$= \frac{1}{2}ab\sin 60^\circ + \frac{1}{2}bc\sin 120^\circ$$

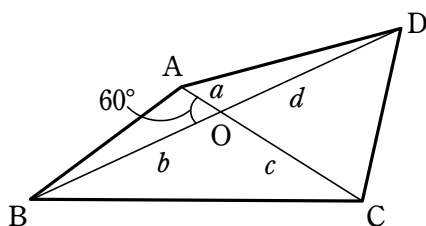
$$+ \frac{1}{2}cd\sin 60^\circ + \frac{1}{2}da\sin 120^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + cd + da)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+c)(b+d)$$

$$AC=4, BD=7 \text{ より } a+c=4, b+d=7$$

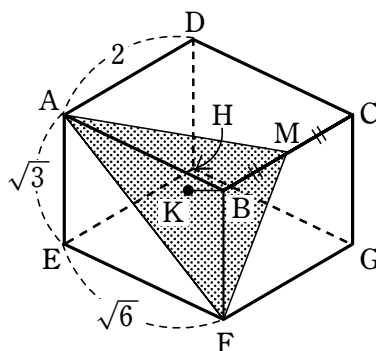
$$\text{よって } S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 7 = 7\sqrt{3}$$



C 4 - 4

右の図のような $AE=\sqrt{3}$, $AD=2$, $EF=\sqrt{6}$ である直方体 $ABCD-EFGH$ において、辺 BC の中点を M とする。

- (1) 四面体 $MABF$ の体積 V を求めよ。
- (2) $\cos \angle AFM$ の値を求めよ。
- (3) $\triangle AFM$ の面積 S を求めよ。
- (4) 点 B から $\triangle AFM$ に下ろした垂線 BK の長さを求めよ。



【解答】 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

- (1) 四面体 $MABF$ は $\triangle ABF$ を底面とし、 MB を高さとする三角錐であるから

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABF \cdot MB = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \right) \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- (2) 三平方の定理により

$$AF = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$AM = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2} = \sqrt{7}$$

$$MF = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

△AFM に余弦定理を使うと

$$\cos \angle AFM = \frac{AF^2 + MF^2 - AM^2}{2AF \cdot MF} = \frac{3^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \sin^2 \angle AFM = 1 - \cos^2 \angle AFM = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\sin \angle AFM > 0 \text{ であるから } \sin \angle AFM = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot MF \cdot \sin \angle AFM = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(4) 四面体 MABF の体積 V は $V = \frac{1}{3} \cdot \triangle AFM \cdot BK$ としても求められるから

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot BK = \frac{\sqrt{3}}{2} BK$$

$$\text{これと (1) から } \frac{\sqrt{3}}{2} BK = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{よって} \quad BK = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

C 4 - 5

底面の半径が 4, 高さが $2\sqrt{5}$ の直円錐がある。この直円錐の頂点を O, 底面の直径の両端を A, B とし, 線分 OB の中点を P とするとき, 側面上で A から P に至る最短距離を求めよ。

解答 $3\sqrt{7}$

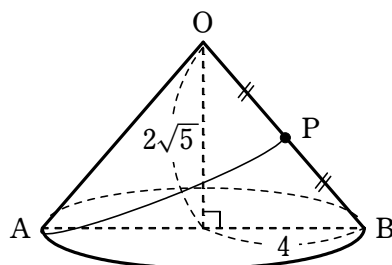
直円錐の側面を母線 OB から切り開いてできる扇形 OBB' において, 線分 AP の長さが求める最短距離である。

$$OA = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4^2} = 6$$

よって $OP = 3$

扇形 OBB' の中心角を x° とすると, 扇形の

弧 $\widehat{BB'}$ の長さと底面の円周の長さは等しい



$$\text{から} \quad 2\pi \times 6 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 4$$

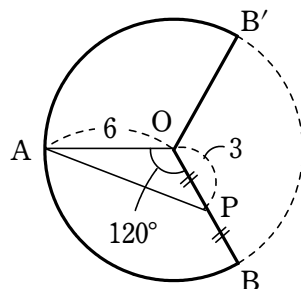
$$\text{ゆえに} \quad x = 360 \times \frac{4}{6} = 240$$

$$\text{したがって} \quad \angle AOP = 240^\circ \div 2 = 120^\circ$$

$\triangle OAP$ において、余弦定理により

$$AP^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cos 120^\circ = 63$$

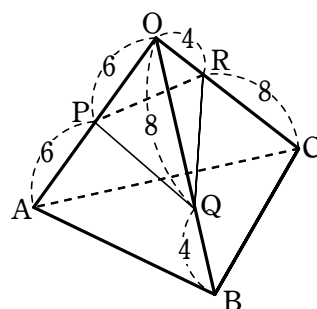
$$AP > 0 \text{ であるから} \quad AP = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$



C 4 - 6

1 辺の長さが 12 の正四面体 $OABC$ がある。辺 OA , OB , OC 上に、それぞれ点 P , Q , R を $OP=6$, $OQ=8$, $OR=4$ となるようにとる。

- (1) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。
- (2) 四面体 $OPQR$ に内接する球の半径を求めよ。



解答 (1) $10\sqrt{3}$ (2) $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

(1) $OABC$ は正四面体であるから

$\angle POQ$, $\angle QOR$, $\angle ROP$ はすべて 60° である。

$\triangle POQ$, $\triangle QOR$, $\triangle ROP$ において、余弦定理から

$$PQ^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 60^\circ = 52 \quad PQ > 0 \text{ より} \quad PQ = 2\sqrt{13}$$

$$QR^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos 60^\circ = 48 \quad QR > 0 \text{ より} \quad QR = 4\sqrt{3}$$

$$RP^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 28 \quad RP > 0 \text{ より} \quad RP = 2\sqrt{7}$$

よって、 $\triangle PQR$ において余弦定理から

$$\cos \angle QRP = \frac{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{13})^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{24}{16\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

$$\text{したがって} \quad \sin \angle QRP = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right)^2} = \frac{\sqrt{175}}{14} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

$$\text{よって、} \triangle PQR \text{ の面積は} \quad \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{14} = 10\sqrt{3}$$

- (2) 頂点 O から底面 ABC に垂線 OH を下ろすと、 H は $\triangle ABC$ の重心であるから AH と辺 BC との交点を E とすると

$$AH = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 4\sqrt{3}$$

$$\text{よって } OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{6}$$

$$\text{また } OP = \frac{1}{2}OA, \quad OQ = \frac{2}{3}OB, \quad OR = \frac{1}{3}OC$$

したがって、四面体 OPQR の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= (\text{正四面体 } OABC) \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12^2 \sin 60^\circ \cdot 4\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 16\sqrt{2} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

四面体 OPQR に内接する球の中心を I , 半径を r とすると

$$\begin{aligned} V &= (\text{四面体 } IPOQ) + (\text{四面体 } IQOR) + (\text{四面体 } IROP) + (\text{四面体 } IPQR) \\ &= \frac{1}{3}r \cdot \triangle POQ + \frac{1}{3}r \cdot \triangle QOR + \frac{1}{3}r \cdot \triangle ROP + \frac{1}{3}r \cdot \triangle PQR \\ &= \frac{1}{3}r \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin 60^\circ + 10\sqrt{3} \right) \\ &= \frac{1}{3}r (12\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}r \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

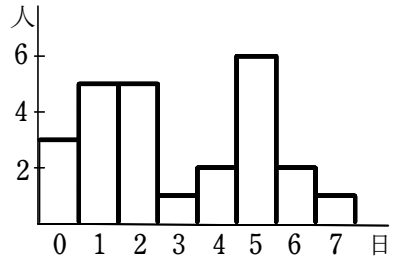
$$\text{①, ② より } 16\sqrt{2} = 12\sqrt{3}r \quad \text{すなわち } r = \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

よって、求める球の半径は $\frac{4}{9}\sqrt{6}$

第 5 章 データの分析

A 5 - 1

右のヒストグラムは、ある高校の生徒 25 人について、この 1 週間における路線バスの利用日数を調査した結果である。



- (1) 利用日数の最頻値、中央値を求めよ。
- (2) 利用日数の平均値を求めよ。

解答 (1) 最頻値 5 日、中央値 2 日 (2) 3 日

- (1) このヒストグラムから、最頻値は 5 日

中央値は、利用日数が少ない方から 13 番目の値である。

利用日数が 0 日、1 日、2 日の生徒はそれぞれ 3 人、5 人、5 人であり

$$3 + 5 + 5 = 13$$

よって、中央値は 2 日

- (2) 平均値は

$$\frac{1}{25}(0 \times 3 + 1 \times 5 + 2 \times 5 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 6 + 6 \times 2 + 7 \times 1) = \frac{75}{25} = 3 \text{ (日)}$$

A 5 - 2

右の表は、ある都市の 1 日の最低気温を 30 日間測定した結果の度数分布表である。

階級(℃)	度数
6 以上 8 未満	7
8 ～ 10	9
10 ～ 12	7
12 ～ 14	6
14 ～ 16	1
計	30

- (1) データの最頻値を求めよ。
- (2) この表から階級値を用いて、データの平均値を求めよ。
- (3) 階級値を用いなくて平均値を求めると、データの平均値はどのような値の範囲に入るか。

解答 (1) 9℃ (2) 10℃ (3) 9℃ 以上 11℃ 未満

- (1) 度数が最も大きい階級は 8℃ 以上 10℃ 未満であるから、その階級値は 9℃

よって、このデータの最頻値は 9℃

- (2) 階級値を用いたデータの平均値は

$$\frac{1}{30}(7 \times 7 + 9 \times 9 + 11 \times 7 + 13 \times 6 + 15 \times 1) = \frac{300}{30}$$

$$= 10 \text{ (}^{\circ}\text{C)}$$

(3) データの平均値が最小となるのは、データの各値が階級内の最小の値となるときであるから

$$\frac{1}{30}(6 \times 7 + 8 \times 9 + 10 \times 7 + 12 \times 6 + 14 \times 1) = \frac{270}{30}$$

$$= 9 \text{ (}^{\circ}\text{C)}$$

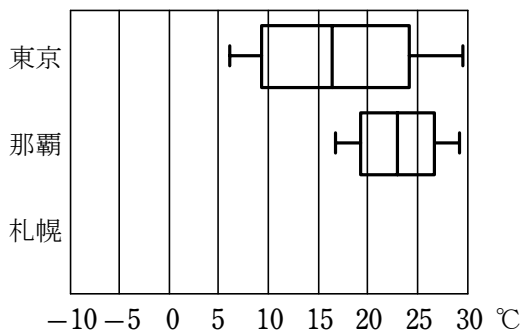
また、階級の幅が 2°C であるから、データの平均値のとりうる値の範囲は 9°C 以上 11°C 未満

A 5 - 3

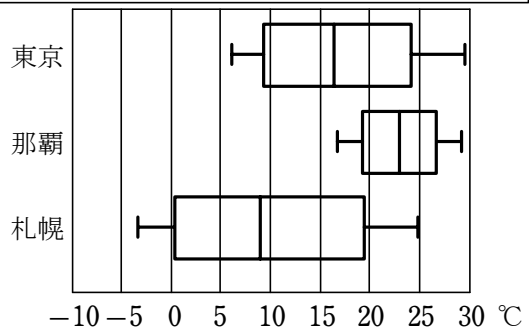
次のデータは、2010 年度の札幌における月ごとの平均気温を、気温の低い順に並べたものである。(単位は $^{\circ}\text{C}$)

-3.2 -2.0 -0.1 0.6 5.5 5.9 12.2 12.2 19.2 20.0 22.1 24.8

このデータの箱ひげ図を、下の東京と那覇の箱ひげ図と並べてかき、3つの都市のデータの分布を比較せよ。



解答 [図], 札幌の寒暖の差は、東京と那覇よりも大きいことがわかる。

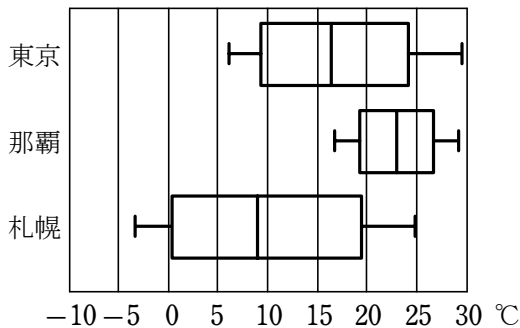


中央値は $\frac{5.9 + 12.2}{2} = 9.05 \approx 9.1 \text{ (}^{\circ}\text{C)}$

第 1 四分位数は $Q_1 = \frac{-0.1 + 0.6}{2} = 0.25 \div 0.3$ (°C)

第 3 四分位数は $Q_3 = \frac{19.2 + 20.0}{2} = 19.6$ (°C)

よって、札幌のデータの箱ひげ図は、次のようになる。



上の箱ひげ図から、札幌の寒暖の差は、東京と那覇よりも大きいことがわかる。

A 5 - 4

次の変量 x , y のデータは、ある飲料メーカーが新商品として売り出す予定の 2 つの飲料 X, Y について、それぞれ 8 人のモニターに 15 点満点でおいしさを採点してもらった結果である(単位は点)。

x	10	12	7	6	13	10	7	15
y	3	10	11	2	8	15	9	6

- (1) x , y のデータについて、平均値、分散、標準偏差をそれぞれ求めよ。
- (2) x , y のデータについて、標準偏差によってデータの平均値からの散らばりの度合いを比較せよ。

解答 (1) 平均値、分散、標準偏差の順に x : 10 点, 9, 3 点 ; y : 8 点, 16, 4 点

(2) y のデータの方が平均値からの散らばりの度合いが大きい

- (1) x のデータについて 平均値 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(10 + 12 + 7 + 6 + 13 + 10 + 7 + 15) = \frac{80}{8} = 10 \text{ (点)}$$

よって、 $x - \bar{x}$, $(x - \bar{x})^2$ の値は次の表のようになる。

x	10	12	7	6	13	10	7	15	
$x - \bar{x}$	0	2	-3	-4	3	0	-3	5	
$(x - \bar{x})^2$	0	4	9	16	9	0	9	25	計 72

ゆえに、分散 s_x^2 は $s_x^2 = \frac{72}{8} = 9$

また、標準偏差 s_x は $s_x = \sqrt{9} = 3$ (点)

y のデータについて 平均値 $\bar{y}$ は

$$\bar{y} = \frac{1}{8}(3 + 10 + 11 + 2 + 8 + 15 + 9 + 6) = \frac{64}{8} = 8 \text{ (点)}$$

よって、 $y - \bar{y}$, $(y - \bar{y})^2$ の値は次の表のようになる。

y	3	10	11	2	8	15	9	6	
$y - \bar{y}$	-5	2	3	-6	0	7	1	-2	
$(y - \bar{y})^2$	25	4	9	36	0	49	1	4	計 128

ゆえに、分散 s_y^2 は $s_y^2 = \frac{128}{8} = 16$

また、標準偏差 s_y は $s_y = \sqrt{16} = 4$ (点)

別解 $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ を用いて分散を求めると、次のようになる。

$$\overline{x^2} = \frac{1}{8}(10^2 + 12^2 + 7^2 + 6^2 + 13^2 + 10^2 + 7^2 + 15^2) = \frac{872}{8} = 109$$

よって、分散 s_x^2 は $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 109 - 10^2 = 9$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{8}(3^2 + 10^2 + 11^2 + 2^2 + 8^2 + 15^2 + 9^2 + 6^2) = \frac{640}{8} = 80$$

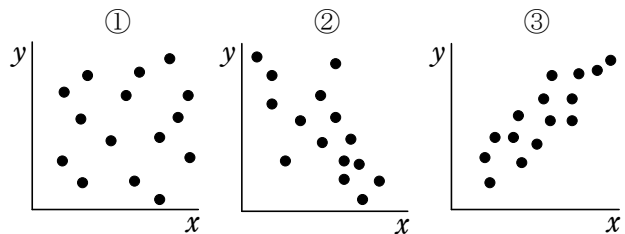
よって、分散 s_y^2 は $s_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 80 - 8^2 = 16$

(2) $s_x < s_y$ であるから、 y のデータの方が平均値からの散らばりの度合いが大きい。

A 5 - 5

右の①, ②, ③は、ある 2 つの変量 x と y のデータについての散布図である。

データ ①, ②, ③ の x と y の相関係数は、0.87, 0.04, -0.71 のいずれかである。



データ ①, ②, ③ の相関係数をそれぞれ答えよ。

解答 ① 0.04 ② -0.71 ③ 0.87

① 0.04 ② -0.71 ③ 0.87

B 5 - 1 問題文略

解答 (ア) ② (イ) ④ (ウ) ⑤

(1) 相関図の点は右下がりに分布しているから、相関係数は負の数である。

また、強い相関関係ではないから、最も近い値は -0.6

よって ア ②

(2) 相関表から、変量 p の度数分布表と変量 q の度数分布表は次のようになる。

[p の度数分布表]

階級	度数
0 以上 ~ 20 未満	4
20 ~ 40	13
40 ~ 60	4
60 ~ 80	24
80 ~ 100	5
計	50

[q の度数分布表]

階級	度数
0 以上 ~ 20 未満	4
20 ~ 40	10
40 ~ 60	15
60 ~ 80	16
80 ~ 100	5
計	50

よって、変量 p のヒストグラムは イ ④

変量 q のヒストグラムは ウ ⑤

B 5 - 2 問題文略

解答 (アイ).(ウエ) -0.57 (オカ).(キク) 13.43 (ケ).(コサ) 1.24

(シ).(スセ) 1.24 (ソタ).(チ) 12.5 (ツテ).(ト) 15.5 (ナ).(ニヌ) 0.50

(1) B 組 3 人のタイムを b_1 , b_2 , b_3 とする。

x	12.5	12.0	14.0	13.5	b_1	b_2	b_3
y	-1.5	-2.0	0	-0.5	$b_1 - 14.0$	$b_2 - 14.0$	$b_3 - 14.0$

B 組 3 人の平均値は 14.0, 分散は 1.50 であるから

$$\frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3) = 14.0, \quad \frac{1}{3}\{(b_1 - 14.0)^2 + (b_2 - 14.0)^2 + (b_3 - 14.0)^2\} = 1.50$$

よって $b_1 + b_2 + b_3 = 42.0$, $(b_1 - 14.0)^2 + (b_2 - 14.0)^2 + (b_3 - 14.0)^2 = 4.50$

変量 y の平均値 $\bar{y}$ は

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{7}\{(-1.5) + (-2.0) + 0 + (-0.5) + (b_1 - 14.0) + (b_2 - 14.0) + (b_3 - 14.0)\} \\ &= \frac{1}{7}(b_1 + b_2 + b_3 - 46.0) = \frac{1}{7}(42.0 - 46.0) = -\frac{4}{7} = -0.571\cdots \div \text{アイ} -0.571 \text{ (秒)}\end{aligned}$$

変量 x の平均値 $\bar{x}$ は, $\bar{y} = \bar{x} - 14.0$ が成り立つから

$$\bar{x} = \bar{y} + 14.0 = -0.571\cdots + 14.0 = 13.428\cdots \div \text{オカ} 13.43 \text{ (秒)}$$

変量 y^2 の平均値 $\overline{y^2}$ は

$$\begin{aligned}\overline{y^2} &= \frac{1}{7}\{(-1.5)^2 + (-2.0)^2 + 0^2 + (-0.5)^2 + (b_1 - 14.0)^2 + (b_2 - 14.0)^2 + (b_3 - 14.0)^2\} \\ &= \frac{1}{7}(2.25 + 4 + 0 + 0.25 + 4.50) = \frac{11}{7}\end{aligned}$$

変量 y の分散は $\overline{y^2} - (\bar{y})^2 = \frac{11}{7} - \left(-\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{61}{49} = 1.244\cdots \div \text{ケ} 1.24 \text{ (秒)}$

変量 x の分散は変量 y の分散と等しいから $\div \text{シ} 1.24 \text{ 秒}$

(2) $b_2 = 14.0$, $b_1 < b_3$ として考える。 $b_1 + b_2 + b_3 = 42.0$ に代入すると

$$b_1 + b_3 = 28.0 \quad \text{よって} \quad b_3 = 28.0 - b_1$$

B組 3 人のタイムの分散がちょうど 1.50 秒であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\{(b_1 - 14.0)^2 + (14.0 - 14.0)^2 + (28.0 - b_1 - 14.0)^2\} &= 1.50 \\ \iff \frac{2}{3}(b_1 - 14.0)^2 &= 1.50 \iff (b_1 - 14.0)^2 = 2.25 \iff b_1 - 14.0 = \pm 1.5 \\ \iff b_1 &= 12.5, 15.5 \quad b_1 < b_3 \text{ より} \quad b_1 = \text{ソタ} 12.5, b_3 = \text{ツテ} 15.5\end{aligned}$$

したがって, B組 3 人の選手のタイム t と体重 w は
右の表のようになる。

条件より $\bar{t} = 14.0$ (秒)

$$\text{また} \quad \bar{w} = \frac{57.0 + 54.0 + 60.0}{3} = \frac{171}{3} = 57.0 \text{ (kg)}$$

番号 k	1	2	3
t (秒)	12.5	14.0	15.5
w (kg)	57.0	54.0	60.0

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^3 (t_k - \bar{t})^2 = (-1.5)^2 + 0^2 + 1.5^2 = 4.5, \quad \sum_{k=1}^3 (w_k - \bar{w})^2 = 0^2 + (-3)^2 + 3^2 = 18,$$

$$\sum_{k=1}^3 (t_k - \bar{t})(w_k - \bar{w}) = (-1.5) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + 1.5 \cdot 3 = 4.5$$

$$\text{求める相関係数は} \quad \frac{4.5}{\sqrt{4.5 \times 18}} = \frac{4.5}{\sqrt{4.5^2 \times 4}} = \frac{1}{2} = \text{ナ} 0.5$$

第6章 場合の数の基礎

A 6 - 1

200 から 300 までの整数のうち、3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる整数の個数を求めよ。

解答 48

200 から 300 までの整数のうち、3 で割り切れる整数全体の集合を A 、5 で割り切れる整数全体の集合を B とすると、3 と 5 の少なくとも一方で割り切れる整数全体の集合は $A \cup B$ である。

$A = \{3 \cdot 67, 3 \cdot 68, \dots, 3 \cdot 100\}$ から

$$n(A) = 100 - 67 + 1 = 34$$

$B = \{5 \cdot 40, 5 \cdot 41, \dots, 5 \cdot 60\}$ から

$$n(B) = 60 - 40 + 1 = 21$$

$A \cap B$ は、15 で割り切れる整数全体の集合であるから

$$A \cap B = \{15 \cdot 14, 15 \cdot 15, \dots, 15 \cdot 20\}$$

よって $n(A \cap B) = 20 - 14 + 1 = 7$

したがって $n(A \cup B) = 34 + 21 - 7 = 48$

A 6 - 2

7 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 から、異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作るとき、次のような数はいくつできるか。

- (1) 3 桁の整数
- (2) 偶数

解答 (1) 180 個 (2) 105 個

- (1) 百の位は、1 ～ 6 から 1 個を取るから 6 通り

そのおのおのについて、十、一の位は 0 を含めた残りの 6 個から 2 個取る順列で

$${}_6P_2 \text{ 通り}$$

よって、求める個数は $6 \times {}_6P_2 = 6 \times 6 \cdot 5 = 180$ (個)

- (2) 偶数であるから、一の位は 0, 2, 4, 6 のどれか。

[1] 一の位が 0 のとき

百、十の位は 0 以外の 6 個から 2 個取る順列で ${}_6P_2$ 通り

[2] 一の位が 2, 4, 6 のとき

百の位は 0 を除く残り 5 個から 1 個を取るから 5 通り

よって $(5 \times 5) \times 3$ 個

求める個数は ${}_6P_2 + 5 \times 5 \times 3 = 30 + 75 = 105$ (個)

A 6 - 3

A, B, C, D, E, F の 6 文字を全部使ってできる文字列を, アルファベット順の辞書式に並べる。

- (1) CDABEF は何番目にあるか。
- (2) 339 番目の文字列は何か。

【解答】 (1) 289 番目 (2) CFADBE

(1) A□□□□□ の形の文字列は ${}_5P_5 = 5! = 120$ (個)

B□□□□□ の形の文字列は 120 個

CA□□□□ の形の文字列は ${}_4P_4 = 4! = 24$ (個)

CB□□□□ の形の文字列は 24 個

CDABEF は, CB□□□□ の形の文字列の次にくるから

$$120 + 120 + 24 + 24 + 1 = 289 \text{ (番目)}$$

(2) (1) より, CB□□□□ の形の文字列までで 288 個ある。

CD□□□□, CE□□□□ の形の文字列は 24 個ずつあるから, ここまでで

$$288 + 24 + 24 = 336 \text{ (個)}$$

よって, 339 番目は CF□□□□ の 3 番目である。順に書き出すと

CFABDE, CFABED, CFADBE ㊦ CFADBE

B 6 - 1

ある大学の入学者のうち, 他の a 大学, b 大学, c 大学を受験した者の集合を, それぞれ A, B, C で表すと, 次の通りであった。

$$n(A) = 65, \quad n(B) = 40, \quad n(A \cap B) = 14, \quad n(A \cap C) = 11,$$

$$n(A \cup C) = 78, \quad n(B \cup C) = 55, \quad n(A \cup B \cup C) = 99$$

- (1) c 大学を受験した者は何人か。
- (2) a 大学, b 大学, c 大学のすべてを受験した者は何人か。
- (3) a 大学, b 大学, c 大学のどれか 1 大学のみ受験した者は何人か。

【解答】 (1) 24 人 (2) 4 人 (3) 73 人

(1) $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$ であるから

$$78 = 65 + n(C) - 11 \quad \text{よって} \quad n(C) = 24$$

ゆえに、c 大学を受験した者は 24 人

(2) 求める人数は $n(A \cap B \cap C)$ で表される。

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$ であるから

$$55 = 40 + 24 - n(B \cap C) \quad \text{よって} \quad n(B \cap C) = 9$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$\text{であるから} \quad 99 = 65 + 40 + 24 - 14 - 9 - 11 + n(A \cap B \cap C)$$

$$\text{よって} \quad n(A \cap B \cap C) = 4$$

ゆえに、a 大学、b 大学、c 大学のすべてを受験した者は 4 人

(3) 各集合の人数を右のように定めると、求める人数は

$a + b + c$ である。

条件と (1), (2) から

$$n(A) = a + d + g + f = 65 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$n(B) = b + d + e + g = 40 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$n(C) = c + e + g + f = 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$n(A \cap B) = d + g = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$n(A \cap C) = f + g = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$n(B \cap C) = e + g = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$n(A \cap B \cap C) = g = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{7} \text{ から} \quad d = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{5} - \textcircled{7} \text{ から} \quad f = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

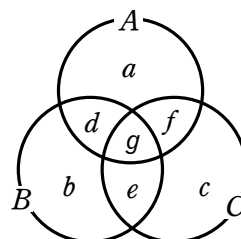
$$\textcircled{6} - \textcircled{7} \text{ から} \quad e = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{7}, \textcircled{8}, \textcircled{9} \text{ から} \quad a = 44$$

$$\textcircled{2} \text{ と } \textcircled{7}, \textcircled{8}, \textcircled{10} \text{ から} \quad b = 21$$

$$\textcircled{3} \text{ と } \textcircled{7}, \textcircled{9}, \textcircled{10} \text{ から} \quad c = 8$$

$$\text{よって、求める人数は} \quad a + b + c = 44 + 21 + 8 = 73 \text{ (人)}$$



B 6 - 2

5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 から異なる 3 個を選んで 3 桁の整数を作る。

(1) 全部で 個の 3 桁の整数ができる。

(2) 偶数は 個で、奇数は 個である。

(3) 9 の倍数は 個で、4 の倍数は 個である。

解答 (1) (ア) 48 (2) (イ) 30 (ウ) 18 (3) (エ) 6 (オ) 15

(1) 百の位は、1～4 から 1 個を取るから 4 通り

そのおのおのについて、十、一の位は 0 を含めた残りの 4 個から 2 個取る順列で

$${}_4P_2 \text{ 通り}$$

よって、求める個数は $4 \times {}_4P_2 = 4 \times 4 \cdot 3 = {}^{\text{ア}}48$ (個)

(2) まず、奇数の個数を求める。

一の位は 1 か 3 の 2 通り

百の位は、一の位の数と 0 を除いた 3 個から 1 個取るから 3 通り

十の位は、0 を含めた残り 3 個から 1 個取るから 3 通り

よって、奇数は $2 \times 3 \times 3 = {}^{\text{ウ}}18$ (個)

偶数の個数は、3桁の整数の個数から奇数の個数を引いて

$$48 - 18 = {}^{\text{イ}}30 \text{ (個)}$$

別解 [偶数の個数の求め方]

偶数であるから、一の位は 0, 2, 4 のどれか。

[1] 一の位が 0 のとき

百、十の位は残り 4 個から 2 個取る順列で ${}_4P_2$ 通り

[2] 一の位が 2, 4 のとき

百の位は 0 を除く残り 3 個から 1 個取るから 3 通り

十の位は 0 を含めた残り 3 個から 1 個取るから 3 通り

よって $2 \times (3 \times 3) = 18$ (個)

ゆえに、偶数は ${}_4P_2 + 18 = 4 \cdot 3 + 18 = {}^{\text{イ}}30$ (個)

(3) 9 の倍数となるのは、各位の数字の和が 9 の倍数のときである。0～4 から異なる 3 つの数字を選ぶとき、その和が 9 の倍数になるのは、2, 3, 4 の場合に限る。

この 3 つの数を並べて 3桁の整数を作ればよい。

よって、9 の倍数は ${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = {}^{\text{エ}}6$ (個)

4 の倍数となるのは、下 2桁が 4 の倍数のときであり、それは次の場合である。

$$04, 12, 20, 24, 32, 40$$

[1] 下 2桁が 04, 20, 40 のとき

百の位は残り 3 個から 1 個取るから 3 通り

よって $3 \times 3 = 9$ (個)

[2] 下 2桁が 12, 24, 32 のとき

百の位は 0 を除く残り 2 個から 1 個取るから 2 通り

よって $3 \times 2 = 6$ (個)

ゆえに、4の倍数は $9+6=15$ (個)

C 6 - 1

$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 150$ の末尾に続く 0 の個数を求めよ。

解答 (1) 176 個 (2) 37 個

(1) 百の位は 3, 4, 5, 6, 7 のいずれかである。

[1] 百の位が 3, 5, 7 のとき

一の位は 1, 3, 5, 7, 9 から百の位の数を除いた 4 通り

十の位は 0~9 の 10 個から、一の位、百の位の数を除いた 8 通り

よって $3 \times 4 \times 8 = 96$ (個)

[2] 百の位が 4, 6 のとき

一の位は 1, 3, 5, 7, 9 の 5 通り

十の位は 0~9 の 10 個から、一の位、百の位の数を除いた 8 通り

よって $2 \times 5 \times 8 = 80$ (個)

したがって、求める奇数の個数は $96 + 80 = 176$ (個)

(2) 0 の個数は、 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 150$ に含まれる因数 10 の個数であり、10 は 2×5 と素因数分解される。

1, 2, 3, ..., 150 に含まれる因数 2 の個数が因数 5 の個数より多いのは明らかであるから、因数 5 の個数を求めればよい。

1, 2, 3, ..., 150 に含まれる

5 の倍数は $150 = 5 \cdot 30$ から 30 個

$5^2 (=25)$ の倍数は $150 = 25 \cdot 6$ から 6 個

$5^3 (=125)$ の倍数は $150 = 125 \cdot 1 + 25$ から 1 個

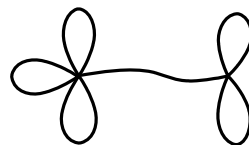
ゆえに、1, 2, 3, ..., 150 に含まれる因数 5 の個数は全部で

$$30 + 6 + 1 = 37 \text{ (個)}$$

よって、求める 0 の個数は 37 個

C 6 - 2

右の図において、これを一筆書きする仕方の総数を求めよ。



解答 768 通り

書き始める位置は、右の図の A, B の 2 通りある。

①, ②, ③ の部分は

どの順序で書くかで ${}_3P_3$ 通り

それぞれの輪を右回りで書くか、左回りで書くかで

2^3 通り

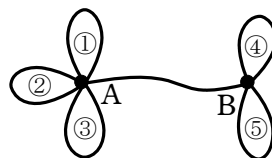
④, ⑤ の部分は

どの順序で書くかで ${}_2P_2$ 通り

それぞれの輪を右回りで書くか、左回りで書くかで 2^2 通り

よって、一筆書きする方法は

$$2 \times ({}_3P_3 \times 2^3) \times ({}_2P_2 \times 2^2) = 2 \times (6 \times 8) \times (2 \times 4) = 768 \text{ (通り)}$$



C 6 - 3

50 人のクラスで、兄弟のいる人は 33 人、姉妹のいる人は 27 人であった。このとき、ひとりっ子は ア 人以下で、兄弟、姉妹ともにいる人は イ 人以上いる。また、兄弟だけいる人は少なくとも ウ 人、多くて エ 人までであり、姉妹だけいる人は多くても オ 人までである。

【解答】 (ア) 17 (イ) 10 (ウ) 6 (エ) 23 (オ) 17

クラス全員、兄弟のいる人、姉妹のいる人の集合をそれぞれ U , A , B とする。

$n(A) > n(B)$ であるから、 $A \supset B$ のとき

ひとりっ子の人数 $n(\overline{A \cap B})$ は最大で

$$n(U) - n(A) = 50 - 33 = \text{ア} 17$$

兄弟だけの人数 $n(A \cap \overline{B})$ は最小で

$$n(A) - n(B) = 33 - 27 = \text{ウ} 6$$

$\overline{A \cap B} = \phi$ のとき、 $n(A \cap B)$ は最小で

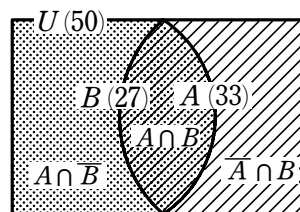
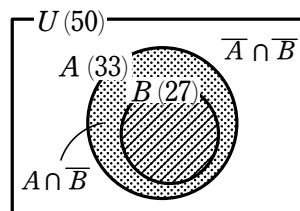
$$n(A) + n(B) - n(U) = 33 + 27 - 50 = \text{イ} 10$$

兄弟だけの人数 $n(A \cap \overline{B})$ は最大で

$$n(A) - n(A \cap B) = 33 - 10 = \text{エ} 23$$

姉妹だけの人数 $n(\overline{A} \cap B)$ は最大で

$$n(B) - n(A \cap B) = 27 - 10 = \text{オ} 17$$



C 6 - 4

500 以下の自然数を全体集合とし、 A を 8 の倍数の集合、 B を 12 の倍数の集合、 C を 15 の倍数の集合とする。次の集合の要素の個数を求めよ。

- (1) 8 または 15 の倍数の集合 (2) 8 でも 15 でも割り切れない数の集合
(3) 8 または 12 または 15 の倍数の集合 (4) $(A \cup C) \cap B$

【解答】 (1) 91 個 (2) 409 個 (3) 108 個 (4) 24 個

全体集合を U とすると $n(U) = 500$

$A = \{8 \cdot 1, 8 \cdot 2, \dots, 8 \cdot 62\}$ から $n(A) = 62$

$B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, \dots, 12 \cdot 41\}$ から $n(B) = 41$

$C = \{15 \cdot 1, 15 \cdot 2, \dots, 15 \cdot 33\}$ から $n(C) = 33$

- (1) 求める個数は $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$ ①

$A \cap C$ は 8 と 15 の最小公倍数 120 の倍数の集合で

$$A \cap C = \{120, 240, 360, 480\}, n(A \cap C) = 4$$

ゆえに、① から $n(A \cup C) = 62 + 33 - 4 = 91$ (個)

- (2) 求める個数は $n(\overline{A \cap C}) = n(\overline{A \cup C}) = n(U) - n(A \cup C)$
 $= 500 - 91 = 409$ (個)

- (3) 求める個数は $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
 $- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ ②

$A \cap B$ は 8 と 12 の最小公倍数 24 の倍数の集合で

$$A \cap B = \{24 \cdot 1, 24 \cdot 2, \dots, 24 \cdot 20\}, n(A \cap B) = 20$$

$B \cap C$ は 12 と 15 の最小公倍数 60 の倍数の集合で

$$B \cap C = \{60 \cdot 1, 60 \cdot 2, \dots, 60 \cdot 8\}, n(B \cap C) = 8$$

$A \cap B \cap C$ は 8 と 12 と 15 の最小公倍数 120 の倍数の集合で

$$A \cap B \cap C = \{120, 240, 360, 480\}, n(A \cap B \cap C) = 4$$

ゆえに、② から

$$n(A \cup B \cup C) = 62 + 41 + 33 - 20 - 8 - 4 + 4 = 108 \text{ (個)}$$

- (4) $A \cap C \subset B$ であるから、 A, B, C を図示すると、右のようになる。

$(A \cup C) \cap B$ は図の斜線部分である。

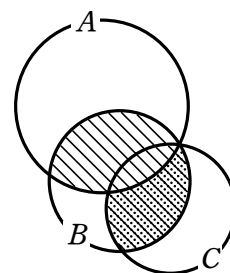
右の図で、 $A \cap B$ の部分の要素の個数は

$$n(A \cap B) = 20$$

図の斜線部分の要素の個数は

$$n(B \cap C) - n(A \cap C) = 8 - 4 = 4$$

よって、求める個数は $20 + 4 = 24$ (個)



別解 $n((A \cup C) \cap B) = n((A \cap B) \cup (C \cap B))$ (分配法則)

$$= n(A \cap B) + n(C \cap B) - n((A \cap B) \cap (C \cap B))$$

$$= n(A \cap B) + n(C \cap B) - n(A \cap B \cap C)$$

$$= 20 + 8 - 4 = 24 \text{ (個)}$$

C 6 - 5

1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 の 7 個の数字がある。この中の異なる 2 個を並べてできる 2 桁の整数は全部で 7P_2 個あり、その総和は 1P_1 である。

解答 (ア) 42 (イ) 2244

(ア) 異なる 7 個の数字から 2 個を取って並べる順列の総数で

$${}_7P_2 = 7 \cdot 6 = {}^7P_2 \text{ (個)}$$

(イ) 一の位が 1 のとき、できる整数は 21, 31, 51, 61, 81, 91 の 6 通り。

他の数字が一の位の場合も、同様に 6 通りの整数ができる。

よって、一の位の数の総和は

$$(1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9) \times 6 = 204$$

十の位の数の総和も同じになるから、求める 2 桁の整数の総和は

$$204 + 204 \times 10 = {}^1P_1 \text{ 2244}$$

C 6 - 6

5 個の数字 0, 1, 2, 3, 4 を使ってできる 3 桁の整数のうち、次のような整数は何個あるか。ただし、同じ数字は 2 度以上使わないとする。

(1) 偶数

(2) 3 の倍数

解答 (1) 30 個 (2) 20 個

(1) 一の位に使えるのは、0, 2, 4 である。

[1] 一の位が 0 のとき

残りの位には 1 ~ 4 のうちから 2 個を選んで並べるから、その個数は

$${}_4P_2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ (個)}$$

[2] 一の位が 2 か 4 のとき

百の位は一の位の数字と 0 を除く 3 個から選び、そのおのおのに対して十の位には残りの 3 個から 1 個を選ぶ。

よって $(3 \times 3) \times 2 = 18$ (個)

[1], [2] から、求める個数は $12 + 18 = 30$ (個)

(2) 3 の倍数になるのは、各位の数字の和が 3 の倍数になるときである。

よって、3 の倍数になる 3 個の数字の組は

(0, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4)

[1] (0, 1, 2), (0, 2, 4) のとき

百の位は 0 でないから $(2 \times 2!) \times 2 = 8$ (個)

[2] (1, 2, 3), (2, 3, 4) のとき

$3! \times 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 = 12$ (個)

[1], [2] から、求める個数は $8 + 12 = 20$ (個)

C 6 - 7

次の場合、硬貨の一部または全部を使って、支払うことができる金額は何通りあるか。

(1) 10 円硬貨 4 枚, 50 円硬貨 1 枚, 100 円硬貨 3 枚

(2) 10 円硬貨 2 枚, 50 円硬貨 3 枚, 100 円硬貨 3 枚

(3) 10 円硬貨 7 枚, 50 円硬貨 1 枚, 100 円硬貨 3 枚

解答 (1) 39 通り (2) 29 通り (3) 42 通り

(1) 異なる硬貨を用いて、同じ金額を表すことはない。

10 円硬貨の使い方は 0 枚～4 枚の 5 通り

50 円硬貨の使い方は 0 枚～1 枚の 2 通り

100 円硬貨の使い方は 0 枚～3 枚の 4 通り

ただし、全部 0 枚の場合は支払うことができない。

よって、支払える金額は $5 \times 2 \times 4 - 1 = 39$ (通り)

(2) 50 円硬貨 2 枚と 100 円硬貨 1 枚は同じ金額を表すから、100 円硬貨 3 枚は 50 円硬貨 6 枚と考えると、10 円硬貨 2 枚, 50 円硬貨 9 枚となる。

10 円硬貨の使い方は 0 枚～2 枚の 3 通り

50 円硬貨の使い方は 0 枚～9 枚の 10 通り

ただし、全部 0 枚の場合は支払うことができない。

よって、支払える金額は $3 \times 10 - 1 = 29$ (通り)

(3) 10 円硬貨 5 枚と 50 円硬貨 1 枚は同じ金額を表すから、50 円硬貨 1 枚は 10 円硬貨 5 枚と考えると、10 円硬貨 12 枚, 100 円硬貨 3 枚となる。

10 円硬貨 10 枚と 100 円硬貨 1 枚は同じ金額を表すから、100 円硬貨 3 枚は 10 円硬貨 30 枚と考えると、10 円硬貨 42 枚となる。

よって、支払える金額は 42 通り

注意 (3) と同様に考えて、(2) において、さらに 50 円硬貨を 10 円硬貨に換算してはいけ

ない。もとの硬貨で表せない金額 (30 円や 40 円) まで表せるようになるからである。

第 7 章 場合の数

A 7 - 1

- (1) 4 種類の記号○, △, □, ×から重複を許して合計 5 個を取って 1 列に並べるとき、並べ方は何通りあるか。
- (2) 4 人が 1 回じゃんけんをするとき、手の出し方は全部で何通りあるか。

解答 (1) 1024 通り (2) 81 通り

- (1) $4^5 = 1024$ (通り)
- (2) 異なる 3 個のもの (グー, チョキ, パー) から、重複を許して 4 個を取り出して並べる順列の総数で $3^4 = 81$ (通り)

A 7 - 2

次の並べ方は何通りあるか。

- (1) a 4 個, b 3 個, c 2 個の 9 文字を 1 列に並べる。
- (2) FUKUOKA の 7 文字を 1 列に並べる。

解答 (1) 1260 通り (2) 1260 通り

$$(1) \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} = 1260 \text{ (通り)}$$

- (2) U が 2 個, K が 2 個, F, O, A が 1 個ずつあるから、この 7 文字の並べ方は

$$\frac{7!}{2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 1260 \text{ (通り)}$$

注意 公式を忠実に適用すると $\frac{7!}{2!2!1!1!1!}$ であるが、 $1! = 1$ であるから、省略した。

別解 (1) ${}_9C_4 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 1260$ (通り)

(2) ${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3P_3 = 1260$ (通り)

A 7 - 3

6 つの文字 a, b, c, d, e, f を横 1 列に並べるとき、 a, b, c の 3 つが隣り合う並べ方は何通りあるか。また、 a, b が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

解答 順に 144 通り, 480 通り

a, b, c の 3 つの文字をひとまとめにして、4 つの文字を横 1 列に並べる方法は $4!$ 通り。
 a, b, c の並び方は $3!$ 通り。

したがって、a, b, c の 3 つが隣り合う並べ方は $4! \times 3! = 144$ (通り)

6 つの文字の並べ方は $6!$ 通り.

このうち、a, b が隣り合う並べ方は $5! \times 2!$ 通り.

したがって、a, b が隣り合わない並べ方は $6! - 5! \times 2! = 480$ (通り)

A 7 - 4

- (1) 7 人が円卓に着席する方法は何通りあるか。
- (2) 異なる 6 個の玉を用いて作る首飾りは何通りできるか。

解答 (1) 720 通り (2) 60 通り

- (1) 7 人の円順列であるから、求める着席する方法の総数は

$$(7-1)! = 6! = 720 \text{ (通り)}$$

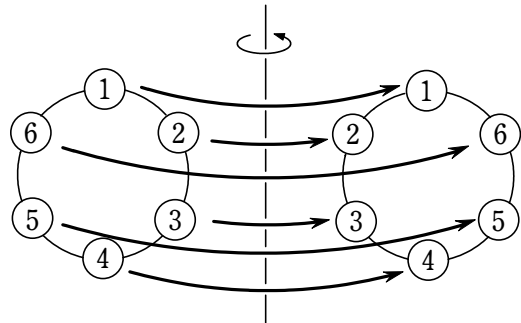
- (2) 異なる 6 個の玉を円形に並べる方法の総数は

$$(6-1)! = 5! = 120 \text{ (通り)}$$

これらの円順列のうち、右の図のように裏返すと一致するものが 2 通りずつある。

よって、求める総数は

$$120 \div 2 = 60 \text{ (通り)}$$



A 7 - 5

男子 10 人、女子 5 人の中から選ぶとき、次の選び方は何通りあるか。

- (1) 男子 4 人、女子 3 人を選ぶ。
- (2) 特定の 2 人を含むように 7 人選ぶ。
- (3) 3 人を選ぶのに、女子から少なくとも 1 人を選ぶ。

解答 (1) 2100 通り (2) 1287 通り (3) 335 通り

- (1) 男子 10 人から 4 人を選ぶ方法は ${}_{10}C_4$ 通り

女子 5 人から 3 人を選ぶ方法は ${}_5C_3$ 通り

$$\text{よって } {}_{10}C_4 \times {}_5C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2100 \text{ (通り)}$$

- (2) 特定の 2 人を先に選んでおき、残りの 13 人から 5 人を選ぶと考えると

$${}_{13}C_5 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1287 \text{ (通り)}$$

- (3) 15 人から 3 人を選ぶ方法は ${}_{15}C_3$ 通り

そのうち、3 人とも男子を選ぶ方法は ${}_{10}C_3$ 通り

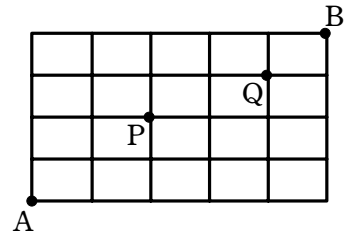
よって、女子から少なくとも 1 人を選ぶ方法は

$${}_{15}C_3 - {}_{10}C_3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455 - 120 = 335 \text{ (通り)}$$

A 7 - 6

右の図のように、道路が碁盤の目のようになった街がある。次の場合に、地点 A から地点 B まで最短距離で行く道順は何通りあるか。

- (1) 全部の道順
- (2) 地点 P を通る
- (3) 地点 P と地点 Q を通る
- (4) 地点 P も地点 Q も通らない



解答 (1) 126 通り (2) 60 通り (3) 36 通り (4) 32 通り

右へ 1 区画進むことを $\rightarrow$ 、上へ 1 区画進むことを $\uparrow$ で表す。

- (1) 最短の道順は、 $\rightarrow 5$ 個、 $\uparrow 4$ 個の順列で表されるから

$${}_9C_5 = 126 \text{ (通り)}$$

- (2) A から P までの最短の道順は ${}_4C_2$ 通り

$$P \text{ から } B \text{ までの最短の道順は } {}_5C_3 \text{ 通り}$$

$$\text{よって、P を通る道順は } {}_4C_2 \times {}_5C_3 = 6 \times 10 = 60 \text{ (通り)}$$

- (3) A から P までの最短の道順は ${}_4C_2$ 通り

$$P \text{ から } Q \text{ までの最短の道順は } {}_3C_2 \text{ 通り}$$

$$Q \text{ から } B \text{ までの最短の道順は } {}_2C_1 \text{ 通り}$$

$$\text{よって、P と Q を通る道順は } {}_4C_2 \times {}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6 \times 3 \times 2 = 36 \text{ (通り)}$$

- (4) Q を通る道順は ${}_7C_4 \times {}_2C_1 = 35 \times 2 = 70$ (通り)

P または Q を通る道順は

$$(P \text{ を通る}) + (Q \text{ を通る}) - (P \text{ かつ } Q \text{ を通る}) = 60 + 70 - 36 = 94 \text{ (通り)}$$

$$\text{よって、P も Q も通らない道順は } 126 - 94 = 32 \text{ (通り)}$$

A 7 - 7

10 個のりんごを、A, B, C の 3 人に分ける方法は $\boxed{}$ 通りある。ただし、1 個も配分のない人があってもよいものとする。また、1 人に 1 個は配分するものとする

イ 通りである。

解答 (ア) 66 (イ) 36

(ア) 例えば, A に 5 個, B に 3 個, C に 2 個分配することを

AAAAABBBCC

と表すことにすると, りんごの分け方の総数は A, B, C から重複を許して 10 個取る組合せの数に等しい。

よって ${}_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = {}^{\text{ア}}66$ (通り)

(イ) まず, 3 人に 1 個ずつりんごを与えておく。

残り 7 個のりんごの分け方は, A, B, C から重複を許して 7 個取る組合せの数に等しい。

よって ${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = {}^{\text{イ}}36$ (通り)

B 7 - 1

J, A, P, A, N, E, S, E の 8 個の文字全部を使ってできる順列について, 次のような並べ方は何通りあるか。

- (1) 異なる並べ方
- (2) J は P より左側にあり, かつ P は N より左側にあるような並べ方

解答 (1) 10080 通り (2) 1680 通り

(1) 8 個の文字のうち, A, E がそれぞれ 2 個ずつあるから

$$\frac{8!}{2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 10080 \text{ (通り)}$$

(2) 求める順列の数は, J, P, N が同じ文字, 例えば J, J, J であると考えて, 3 つの J, 2 つの A, 2 つの E, 1 つの S を 1 列に並べる方法の数と同じである。

$$\text{よって } \frac{8!}{3!2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} = 1680 \text{ (通り)}$$

B 7 - 2

男子 3 人女子 5 人が 1 列に並ぶとき, 男子 3 人が隣り合う並び方は ^ア 通り, どの男子も隣り合わない並び方は ^イ 通りある。

解答 (ア) 4320 (イ) 14400

(ア) 男子 3 人をまとめて 1 組と考えると、この 1 組と女子 5 人の並べ方は

$${}_6P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ (通り)}$$

次に男子 3 人の並べ方が ${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (通り)

したがって、求める並べ方は $720 \times 6 = {}^{\text{ア}}4320$ (通り)

(イ) 女子 5 人の並べ方は ${}_5P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (通り)

女子 5 人の間と両端の 6 か所のうち 3 か所に男子を並べる方法は

$${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \text{ (通り)}$$

したがって、求める並べ方は $120 \times 120 = {}^{\text{イ}}14400$ (通り)

B 7 - 3

G, O, U, K, A, K, U の 7 文字を 1 列に並べるとき、同じ文字が隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

解答 660 通り

G, O, A, 2 つの U, 2 個の K を 1 列に並べる順列の総数は

$$\frac{7!}{2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 1260 \text{ (通り)}$$

このうち、2 個の U が隣り合う並べ方は、2 個の U を 1 文字と考えると

$$\frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ (通り)}$$

2 個の K が隣り合う並べ方は、同様に 360 通り。

2 個の U が隣り合い、かつ 2 個の K が隣り合う並べ方は、2 個の U を 1 文字、2 個の K を 1 文字と考えると $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (通り)

よって、2 個の U が隣り合わず、かつ 2 個の K が隣り合わない並べ方は

$$1260 - (360 + 360 - 120) = 660 \text{ (通り)}$$

別解 U どうしが隣り合わないのは、G, O, K, A, K の 5 文字を 1 列に並べてから、この 5 文字の間または両端に 2 個の U を並べればよいから

$$\frac{5!}{2!} \times {}_6C_2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \times \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 900 \text{ (通り)}$$

U どうしが隣り合わず、K どうしが隣り合うのは、2 個の K を 1 文字と考えると

$$4! \times {}_5C_2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 240 \text{ (通り)}$$

よって、U どうし、K どうしが隣り合わない並べ方は

$$900 - 240 = 660 \text{ (通り)}$$

B 7 - 4

両親と子供 4 人の計 6 人が円形のテーブルに着席するとき

- (1) 両親が隣り合って着席する方法は何通りあるか。
- (2) 両親が向かい合って着席する方法は何通りあるか。
- (3) 両親の間に子供 1 人が着席する方法は何通りあるか。

解答 (1) 48 通り (2) 24 通り (3) 48 通り

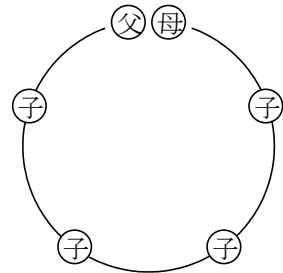
- (1) 両親を 1 人とみなして固定し、残りの子供 4 人が円形のテーブルに着席する方法は

4! 通り

そのおのおのに対して、両親の並び方は

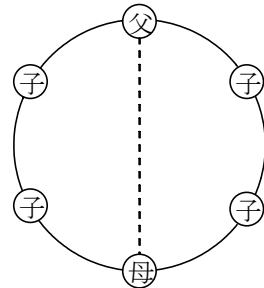
2 通り

ゆえに $4! \times 2 = 48$ (通り)



- (2) 父親を固定すると、母親の席はその向かいであるから 1 通りに決まる。

よって、求める方法の数は子供 4 人が 1 列に並ぶ方法の数と同じで $4! = 24$ (通り)



- (3) 両親の間に着席する子供を 1 人選ぶ方法は

4 通り

そのおのおのに対して、両親の並び方は

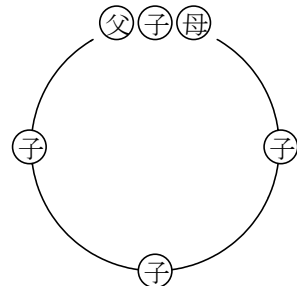
2 通り

この両親と間の子供 1 人の計 3 人を 1 人とみなして固定し、残りの子供 3 人が円形のテーブルに着席する方法は

3! 通り

ゆえに、求める方法の数は

$4 \times 2 \times 3! = 48$ (通り)



B 7 - 5

ガラスでできた玉で、赤色のものが 6 個、青色のものが 2 個、透明なものが 1 個ある。玉には、中心を通過して穴が開いているとする。

- (1) これらを 1 列に並べる方法は何通りあるか。
- (2) これらを丸く円形に並べる方法は何通りあるか。

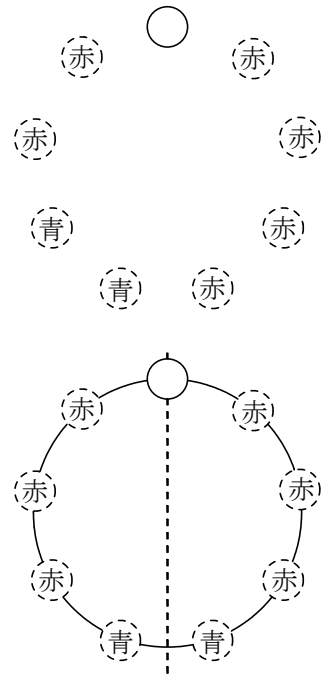
(3) これらの玉に糸を通して首輪を作る方法は何通りあるか。

解答 (1) 252 通り (2) 28 通り (3) 16 通り

(1) 1 列に並べる方法は $\frac{9!}{6!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 252$ (通り)

(2) 透明な玉 1 個を固定して、残り 8 個を並べると考えて

$$\frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \text{ (通り)}$$



(3) 円形に並べられたもののうち、右の図のように左右対称になるものは 4 通り

よって、左右対称でない円順列は

$$28 - 4 = 24 \text{ (通り)}$$

左右対称でない円順列の 1 つ 1 つに対して、裏返すと一致するものが他に必ず 1 つずつあるから、首輪の作

$$\text{り方は } 4 + \frac{24}{2} = 16 \text{ (通り)}$$

B 7 - 6

立方体を塗り分けることを考える。辺を共有する面には別の色を塗るものとし、回転して重なるものは同じ塗り方とする。次の塗り分け方は何通りあるか。

- (1) 6 種の色をすべて用いる
- (2) 5 種の色をすべて用いる
- (3) 4 種の色をすべて用いる

解答 (1) 30 通り (2) 15 通り (3) 6 通り

(1) 底面に塗る色を 1 種固定すると、上面には 5 種の色が塗れる。

側面の塗り方は残り 4 色の円順列となるから $(4-1)!$ 通り

よって、求める塗り方は $5 \times (4-1)! = 5 \times 3! = 5 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 30$ (通り)

(2) 底面に塗る色を 1 種固定する。

[1] 上面に底面と同じ色を塗る場合

側面の塗り方は 4 色の円順列となるが、底面と上面をひっくり返すと同じ場合があるから $\frac{(4-1)!}{2}$ 通り

[2] 上面に底面と異なる色を塗る場合

上面の塗り方は 4 通り

側面はある 1 組の対面に同じ色を塗らなければならない。

同じ色の選び方は 3 通りで、色の塗り方は 1 通り

[1], [2] から、求める塗り方は

$$\frac{(4-1)!}{2} + 4 \times 3 \times 1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} + 4 \times 3 \times 1 = 15 \text{ (通り)}$$

別解 1 組の対面に同じ色を塗り、他の 4 面はじゅず順列と考える。

$$\text{よって } {}_5C_1 \times \frac{(4-1)!}{2} = 15 \text{ (通り)}$$

(3) 底面に塗る色を 1 種固定する。

[1] 上面に底面と同じ色を塗る場合

側面はある 1 組の対面に同じ色を塗らなければならない。

同じ色の選び方は 3 通りで、色の塗り方は 1 通り

[2] 上面に底面と異なる色を塗る場合

上面の塗り方は 3 通り

側面は 2 組の対面に同じ色を塗らなければならない。

このとき、色の塗り方は 1 通り

[1], [2] から、求める塗り方は $3 \times 1 + 3 \times 1 = 6$ (通り)

別解 2 組の対面に同じ色を塗らなければならない。

4 種の色から 2 種を選ぶと、塗り方は 1 通りに決まるから ${}_4C_2 \times 1 = 6$ (通り)

B 7 - 7

正七角形 ABCDEFG の 3 つの頂点を結んで三角形を作る。

- (1) できる三角形の総数を求めよ。
- (2) 正七角形と 1 辺だけを共有するものは何個できるか。
- (3) 正七角形と辺を共有しないものは何個できるか。

解答 (1) 35 個 (2) 21 個 (3) 7 個

正七角形の頂点は、どの 3 点も同一直線上にない。

(1) 7 個の頂点から 3 個を選んで結ぶと三角形が 1 個できるから

$${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ (個)}$$

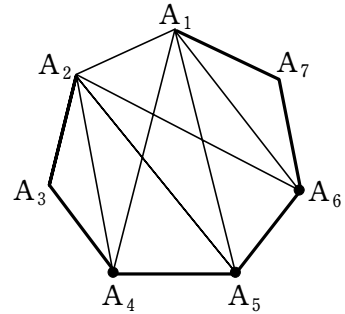
(2) 共有する 1 辺のとり方は 7 通り

そのおのこのについて、例えば、図の辺 A_1A_2 を共有するものは、頂点 A_4, A_5, A_6 が選べるから

3 個

よって、正七角形と 1 辺だけを共有する三角形は

$$7 \times 3 = 21 \text{ (個)}$$

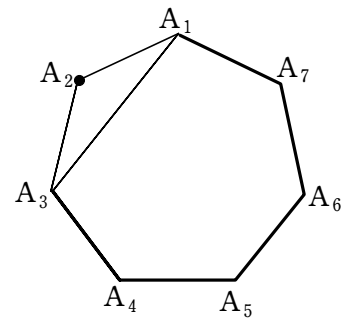


(3) 正七角形と 2 辺を共有する三角形は、正七角形の頂点の個数だけあるから

7 個

このことと (1), (2) の結果から、正七角形と辺を共有しない三角形は

$$35 - (21 + 7) = 7 \text{ (個)}$$



B 7 - 8

15 冊の異なる本を次のように分ける方法は何通りあるか。

- (1) 6 冊, 5 冊, 4 冊の 3 組に分ける。
- (2) 5 冊ずつ 3 人の子供に分ける。
- (3) 5 冊ずつ 3 組に分ける。
- (4) 7 冊, 4 冊, 4 冊の 3 組に分ける。

解答 (1) 630630 通り (2) 756756 通り (3) 126126 通り (4) 225225 通り

(1) 6 冊, 5 冊, 4 冊の組をそれぞれ A, B, C とする。

まず, 6 冊を選んで A 組とし, 残り 9 冊から 5 冊を選んで B 組とし, 残りの 4 冊を C 組とすればよいから

$${}_{15}C_6 \times {}_9C_5 = 5005 \times 126 = 630630 \text{ (通り)}$$

(2) まず, 子供 A に 15 冊から 5 冊を選んで与え, 子供 B に残りの 10 冊から 5 冊を選んで与え, 残りの 5 冊を子供 C に与えればよいから

$${}_{15}C_5 \times {}_{10}C_5 = 3003 \times 252 = 756756 \text{ (通り)}$$

(3) (2) で A, B, C の区別をなくすと, 同じ分け方が 3! 通りずつあるから

$$756756 \div 3! = 126126 \text{ (通り)}$$

(4) 7 冊, 4 冊, 4 冊の組をそれぞれ A, B, C とすると, A, B, C への分け方は

$${}^{15}C_7 \times {}_8C_4 = 6435 \times 70 = 450450 \text{ (通り)}$$

ここで, B, C の区別をなくすと, 同じ分け方が $2!$ 通りずつあるから

$$450450 \div 2! = 225225 \text{ (通り)}$$

B 7 - 9

(1) 整数 $y_1, \dots, y_5$ に対して,
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 7 \\ y_k \geq 0 \ (k=1, \dots, 5) \end{cases}$$

となる組 $(y_1, \dots, y_5)$ の総数を求めよ。

(2) 整数 $x_1, \dots, x_4$ に対して,
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14 \\ x_k \geq 2 \ (k=1, \dots, 4) \end{cases}$$

となる組 $(x_1, \dots, x_4)$ の総数を求めよ。

解答 (1) 84 (2) 330

(1) $z_k = x_k - 2 \ (k=1, \dots, 4)$ とおくと

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 6 \\ z_k \geq 0 \ (k=1, \dots, 4) \end{cases}$$

これを満たす組 $(z_1, \dots, z_4)$ の総数は, 異なる 4 種のものから 6 個をとる重複組合せの数で

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_3 = 84$$

(2) 条件を満たす組 $(y_1, \dots, y_5)$ の総数は

$${}_5H_7 = {}_{5+7-1}C_7 = {}_{11}C_4 = 330$$

B 7 - 10

1 から 10 までの自然数の各数字を 1 つずつ記入した 10 枚のカードがある。これらを A, B, C の 3 つの箱に分けて入れる。

(1) 空の箱があってもよいものとする, 分け方は何通りあるか。

(2) どれか 1 つの箱だけが空になる分け方は何通りあるか。

(3) 空の箱があってはならないとする, 分け方は何通りあるか。

解答 (1) 59049 通り (2) 3066 通り (3) 55980 通り

(1) 1 枚のカードを 3 つの箱 A, B, C に入れる方法は 3 通りある。

よって, 10 枚のカードを 3 つの箱 A, B, C に入れる方法は

$$3^{10} = 59049 \text{ (通り)}$$

(2) A を空にして、10 枚のカードを 2 つの箱 B, C に入れる方法は

$$2^{10} \text{ 通り}$$

この場合において、B, C のうち一方の箱が空になる場合を除いて

$$2^{10} - 2 \text{ (通り)}$$

同様に、B だけを空にする場合は $2^{10} - 2$ (通り)

C だけを空にする場合は $2^{10} - 2$ (通り)

ゆえに、求める場合の数は

$$3(2^{10} - 2) = 3066 \text{ (通り)}$$

(3) 2 つの箱が空になる場合は 3 通り

よって、空の箱がない場合は

$$59049 - 3066 - 3 = 55980 \text{ (通り)}$$

B 7 - 11

1 そうあたり 4 人まで乗れるボート 2 艘に 6 人が分乗するとき、次のような場合の乗り方は何通りあるか。

- (1) 人もボートも区別しない場合
- (2) 人は区別しないが、ボートは区別する場合
- (3) 人もボートも区別する場合
- (4) 人は区別するが、ボートは区別しない場合

解答 (1) 2 通り (2) 3 通り (3) 50 通り (4) 25 通り

(1) 4 人と 2 人に分ける場合と 3 人と 3 人に分ける場合の 2 通り

(2) ボートを A, B とすると

[1] A に 4 人, B に 2 人乗せる

[2] A に 3 人, B に 3 人乗せる

[3] A に 2 人, B に 4 人乗せる

の 3 通り。

(3) (2) において、人に区別がある場合を考えればよい。

[1] A に 4 人, B に 2 人乗せる場合 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ (通り)

[2] A に 3 人, B に 3 人乗せる場合 ${}_6C_3 = 20$ (通り)

[3] A に 2 人, B に 4 人乗せる場合 ${}_6C_2 = 15$ (通り)

よって $15 + 20 + 15 = 50$ (通り)

(4) (3) でボート A, B の区別をなくすと、同じ乗り方が 2! 通りずつあるから

$$50 \div 2! = 25 \text{ (通り)}$$

C 7 - 1

YOKOHAMA の 8 文字を横 1 列に並べて順列を作る。次のような順列は何通りあるか。

- (1) 作られる全部の順列
- (2) Y, K, H, M がこの順に並ぶ順列
- (3) AA と OO という並びをともに含む順列
- (4) AO という並びまたは OA という並びの少なくとも一方を含む順列

解答 (1) 10080 通り (2) 420 通り (3) 720 通り (4) 7440 通り

- (1) O 2 個, A 2 個, Y, K, H, M 各 1 個の順列であるから

$$\frac{8!}{2!2!} = 10080 \text{ (通り)}$$

- (2) □ 4 個, O 2 個, A 2 個を 1 列に並べ, 4 個の □ は左から Y, K, H, M とすればよいから

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420 \text{ (通り)}$$

- (3) 並ぶ AA をまとめて A', OO をまとめて O' で表すと, 求める順列は, A', O', Y, K, H, M の順列であるから ${}_6P_6 = 6! = 720$ (通り)

- (4) AO, OA の並びをともに含まない順列は,

○(Y)○(K)○(H)○(M)○

4 文字 Y, K, H, M の順列 (総数は 4!) の

両端と中間 3 つの 5 か所に

[1] A, A, O, O [2] AA, O, O [3] OO, A, A [4] OO, AA

のいずれかをはめ込むと得られる。その入れ方は

[1] ${}_5C_2 \times {}_3C_2$ 通り [2], [3] ${}_5C_1 \times {}_4C_2$ 通り [4] ${}_5P_2$ 通り

よって $10080 - 4! \times ({}_5C_2 \times {}_3C_2 + 2 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 + {}_5P_2)$
 $= 10080 - 24(30 + 60 + 20) = 7440$ (通り)

C 7 - 2

- (1) 8 人を 3 つの部屋 A, B, C に入れる方法は何通りあるか。ただし, 空き部屋ができてよいものとする。
- (2) 8 人を 3 つのグループ A, B, C に分ける方法は何通りあるか。
- (3) 8 人を 3 つのグループに分ける方法は何通りあるか。

解答 (1) 6561 通り (2) 5796 通り (3) 966 通り

- (1) 8 人のおのおのについて, A, B, C のいずれに入るかの 3 通りがあるから

$$3^8 = 6561 \text{ (通り)}$$

- (2) (1)のうち、8人を2つの部屋(A, BかB, CかC, Aの3通り)に入れる場合と、1つの部屋(A, B, Cの3通り)に入れる場合を除けばよいから

$$6561 - (2^8 - 2) \times 3 - 3 = 6561 - 762 - 3 = 5796 \text{ (通り)}$$

- (3) (2)でA, B, Cの区別をなくせばよいから

$$5796 \div 3! = 966 \text{ (通り)}$$

C 7 - 3

円に内接する n 角形 T について、 T の対角線の本数は $\boxed{}$ 本である。この対角線から2本の対角線を選ぶとき、 T の頂点以外の点で交わるような選び方は全部で $\boxed{}$ 通りある。ただし、 $n \geq 5$ とする。

解答 (ア) $\frac{n^2 - 3n}{2}$ (イ) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

円に内接する n 角形 T の頂点は、どの3点も同一直線上にない。

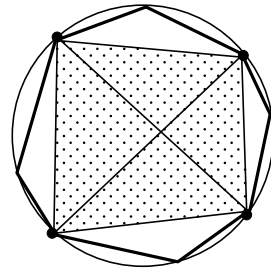
- (ア) T の2つの頂点を結んでできる線分の本数は ${}_nC_2$ 本

対角線の本数は、これから辺の数を引いたものであるから

$${}_nC_2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} \text{ (本)}$$

- (イ) 頂点以外の点で交わる2本の対角線の1組を定めると、これらを対角線にもつ四角形が1つ定まる。よって、求める場合の数は、 T の n 個の頂点から4個を選んで四角形を作る方法の数と同じで

$${}_nC_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} \text{ (通り)}$$



C 7 - 4

1個のさいころを3回投げて出る目の数を順に a, b, c とする。次の場合は何通りあるか。

- (1) $a < b < c$
 (2) $a \leq b \leq c$

解答 (1) 20 通り (2) 56 通り

(1) 1～6 の 6 つの目から異なる 3 つを選び、大きくないものから a, b, c とすればよい。

よって、求める場合の数は ${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ (通り)

(2) 1～6 の 6 つの目から重複を許して 3 個を選び、大きくないものから a, b, c とすればよい。

よって、求める場合の数は ${}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ (通り)

別解 3 個の ○ と 5 つの仕切り | の順列を作り、仕切りで分けられた 6 か所を左から順に 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目の場所とする。このとき、各場所に入った ○ にそれぞれの目をあて、大きくないものから a, b, c とすればよい。

よって、求める場合の数は ${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ (通り)

C 7 - 5

$x + y + z = 9$ を満たす負でない整数の組 (x, y, z) は全部で何組あるか。
また、 $xyz = 100$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) は全部で何組あるか。

解答 順に 55 組, 36 組

(前半) $x + y + z = 9$ に対して、例えば $(x, y, z) = (1, 2, 6)$ は等式を満たすが、これは x が 1 個、 y が 2 個、 z が 6 個と考えることができる。

すなわち $x + y + z = 9$ を満たす負でない整数の組 (x, y, z) の総数は、異なる 3 個の文字 x, y, z から重複を許して 9 個取る (1 つもとらないものがあるてもよい) 組合せの数と同じと考えることができるから

$${}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55 \text{ (組)}$$

(後半) $100 = 2^2 \cdot 5^2$ であるから、 $x = 2^{a_1} \cdot 5^{b_1}$, $y = 2^{a_2} \cdot 5^{b_2}$, $z = 2^{a_3} \cdot 5^{b_3}$ とすると

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2 \text{ (} a_i \text{ は負でない整数, } i = 1, 2, 3),$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 2 \text{ (} b_j \text{ は負でない整数, } j = 1, 2, 3)$$

よって、 $xyz = 100$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) の総数は、上と同様に考えて

$$({}_3H_2)^2 = ({}_{3+2-1}C_2)^2 = ({}_4C_2)^2 = 6^2 = 36 \text{ (組)}$$

C 7 - 6

(1) $x + y + z = 15$ の正の整数解は何通りあるか。

(2) (1) のうちで $x = y$ となる解は何通りあるか。

(3) (1) のうちで $x > y$ となる解は何通りあるか。

解答 (1) 91 通り (2) 7 通り (3) 42 通り

(1) $x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$ とおく。

$x+y+z=15$ に代入すると $(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=15$

よって $X+Y+Z=12$ $X \geq 0$, $Y \geq 0$, $Z \geq 0$

この整数解の個数は、異なる 3 種のものから 12 個を取る重複組合せの数で

$${}_3H_{12} = {}_{3+12-1}C_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = 91 \text{ (通り)}$$

(2) $x=y$ とすると $2x+z=15$

正の整数解は $(x, z) = (1, 13), (2, 11), (3, 9), (4, 7),$

$(5, 5), (6, 3), (7, 1)$ の 7 通り

(3) (1) の整数解については、 $x > y$, $x = y$, $x < y$ の 3 通りの場合に分けられ、しかも、 x と y について対称であるから、 $x > y$ と $x < y$ の場合の数は等しい。

よって、求める解の数は、(1) の個数から (2) の場合を除いた半分で

$$(91 - 7) \div 2 = 42 \text{ (通り)}$$

C 7 - 7

白球 5 個、赤球 3 個、黒球 2 個がある。次のような方法は何通りあるか。

(1) 10 個の球を 6 人に分ける方法 (1 個ももらわない人があってもよい)

(2) 10 個の球を 2 組に分ける方法

解答 (1) 296352 通り (2) 35 通り

(1) まず、白球をもらう人の決め方は、6 人から重複を許して 5 人選ぶ組合せの数に等しい。赤球、黒球についても同様であるから

$${}_6H_5 \times {}_6H_3 \times {}_6H_2 = {}_{6+5-1}C_5 \times {}_{6+3-1}C_3 \times {}_{6+2-1}C_2 = {}_{10}C_5 \times {}_8C_3 \times {}_7C_2 \\ = 252 \times 56 \times 21 = 296352 \text{ (通り)}$$

(2) まず、白球を A, B 2 組に配分する決め方は、A, B 2 組から重複を許して 5 組選ぶ組合せの数に等しい。赤球、黒球についても同様であるから

$${}_2H_5 \times {}_2H_3 \times {}_2H_2 = {}_{2+5-1}C_5 \times {}_{2+3-1}C_3 \times {}_{2+2-1}C_2 \\ = {}_6C_5 \times {}_4C_3 \times {}_3C_2 = 6 \times 4 \times 3 = 72 \text{ (通り)}$$

ゆえに、2 組に分ける方法は $72 \div 2! = 36$ (通り)

一方の組が 0 個の場合を除いて $36 - 1 = 35$ (通り)

C 7 - 8

10 段の階段を登るとき、次の問いに答えよ。

- (1) すべての階段を 1 段上がり (途中の階段をジャンプしないで 1 段ずつ登ること) で登るとき, 登り方は何通りあるか。
- (2) 1 回だけ 2 段上がり (1 段をジャンプする登り方) を行い, 残りの階段を 1 段上がりするときの登り方は何通りあるか。
- (3) 少なくとも 1 回は 2 段上りをするとき, 登り方は何通りあるか。
- (4) 最大 3 段上がり (2 段をジャンプする登り方) まで許すとき, 可能な登り方の総数は何通りあるか。

【解答】 (1) 1 通り (2) 9 通り (3) 88 通り (4) 274 通り

(1) 1 通り

(2) 2 段上がりが 1 回, 1 段上がりが 8 回の場合である。

9 回のうちのどの 1 回が 2 段上がりかで場合が分かれるから 9 通り

(3) 1 段上がりと 2 段上がりで, n 段の階段を登る方法の総数を $U(n)$ とする。

n 段の階段を登るとき, 次の 2 つの場合に分けられる。

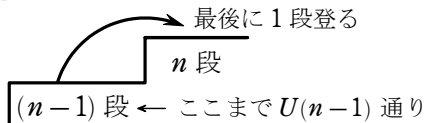
[1] 最後に 1 段上りの場合

この場合の数は, $(n-1)$ 段目までの登り方の総数と等しく $U(n-1)$ 通り

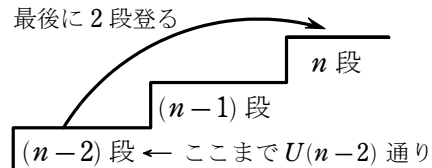
[2] 最後に 2 段上りの場合

この場合の数は, $(n-2)$ 段目までの登り方の総数と等しく $U(n-2)$ 通り

[1]



[2]



したがって $U(n) = U(n-1) + U(n-2)$ [$n \geq 3$]

$U(1) = 1$, $U(2) = 2$ であるから

$$U(3) = U(2) + U(1) = 2 + 1 = 3$$

同様に $U(4) = U(3) + U(2) = 3 + 2 = 5$

$$U(5) = U(4) + U(3) = 5 + 3 = 8$$

$$U(6) = U(5) + U(4) = 8 + 5 = 13$$

$$U(7) = U(6) + U(5) = 13 + 8 = 21$$

$$U(8) = U(7) + U(6) = 21 + 13 = 34$$

$$U(9) = U(8) + U(7) = 34 + 21 = 55$$

$$U(10) = U(9) + U(8) = 55 + 34 = 89$$

よって, 少なくとも 1 回は 2 段上がりをして 10 段登る方法の数は, $U(10)$ からすべて

1 段で登る方法の数を引いて

$$U(10) - 1 = 89 - 1 = 88 \text{ (通り)}$$

- (4) 1 段上がりと 2 段上がりと 3 段上がりで、 n 段の階段を登る方法の総数を $V(n)$ とする。

(3) と同様に、最後が 1 段上がり、最後が 2 段上がり、最後が 3 段上りの 3 つの場合に分けて考えると

$$V(n) = V(n-1) + V(n-2) + V(n-3) \quad [n \geq 4]$$

$V(1) = 1, V(2) = 2, V(3) = 4$ であるから

$$V(4) = V(3) + V(2) + V(1) = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$V(5) = V(4) + V(3) + V(2) = 7 + 4 + 2 = 13$$

$$V(6) = V(5) + V(4) + V(3) = 13 + 7 + 4 = 24$$

$$V(7) = V(6) + V(5) + V(4) = 24 + 13 + 7 = 44$$

$$V(8) = V(7) + V(6) + V(5) = 44 + 24 + 13 = 81$$

$$V(9) = V(8) + V(7) + V(6) = 81 + 44 + 24 = 149$$

$$V(10) = V(9) + V(8) + V(7) = 149 + 81 + 44 = 274$$

よって、求める登り方の総数は 274 通り

C 7 - 9

1 から n までの番号を 1 列に並べたとき、左から k 番目の番号が k でないような並べ方の総数を $f(n)$ で表す。

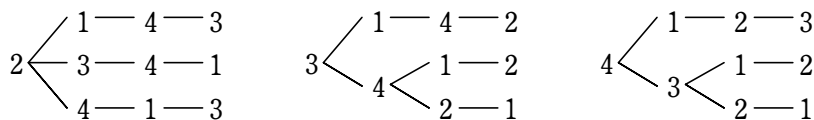
- (1) $f(3), f(4)$ を求めよ。
 (2) $f(5)$ を求めよ。

解答 (1) $f(3) = 2, f(4) = 9$ (2) 証明略, 44

- (1) $n = 3$ のとき 題意の順列は 231, 312

よって $f(3) = 2$

$n = 4$ のとき 題意の順列を樹形図でかいて調べると



よって $f(4) = 9$

- (2) [1] $f(4)$ の場合で、5 を左から 1 ~ 4 番目のどれかの番号と入れかえてもとの数を右端に入れると、左からの順番と番号は一致しないから、この場合の個数は

$$4 \times f(4) \text{ 個}$$

[2] 4 個の順列で 1 個だけ左からの順番と番号が一致しているものを考えると、4 種類の数字ごとにその個数は $f(3)$ 個ある。よって、この一致している数と 5 とを入れかえて、もとの数を右端に入れると左からの順番と番号は一致しないから、この場合の個数は $4 \times f(3)$ 個

[1] + [2] から $f(5) = 4\{f(4) + f(3)\}$

したがって、(1) から $f(5) = 4(9 + 2) = 44$

第 8 章 二項定理

A 8 - 1

(1) ${}_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1}$ を証明せよ。

(2) $k \cdot {}_nC_k = n \cdot {}_{n-1}C_{k-1}$ を証明せよ。

解答 (1) 略 (2) 略

(1) 二項定理により

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + {}_nC_n b^n$$

$a=1, b=-\frac{1}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 \left(-\frac{1}{2}\right) + {}_nC_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad + \cdots + {}_nC_{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + {}_nC_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad {}_nC_0 - \frac{{}_nC_1}{2} + \frac{{}_nC_2}{2^2} - \cdots + (-1)^n \frac{{}_nC_n}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

(2) 二項定理により

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + \cdots + {}_nC_r x^r + {}_nC_{r+1} x^{r+1} + \cdots + {}_nC_n x^n$$

よって、 $(1+x)^n(1+x)$ の展開式における x^{r+1} の項の係数は

$${}_nC_r + {}_nC_{r+1}$$

また、二項定理により

$$(1+x)^{n+1} = {}_{n+1}C_0 + {}_{n+1}C_1 x + \cdots + {}_{n+1}C_r x^r + {}_{n+1}C_{r+1} x^{r+1} + \cdots + {}_{n+1}C_{n+1} x^{n+1}$$

ゆえに、 $(1+x)^{n+1}$ の展開式における x^{r+1} の係数は

$${}_{n+1}C_{r+1}$$

$(1+x)^n(1+x) = (1+x)^{n+1}$ であるから、両辺の展開式における x^{r+1} の項の係数は等しい。

$$\text{よって} \quad {}_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1}$$

A 8 - 2

次の式の展開式における、[] 内に指定した項の係数を求めよ。

$$(1) \left(x^3 + \frac{2}{x}\right)^7 [x^5]$$

$$(2) \left(2x^3 - \frac{1}{3x^2}\right)^5 \text{ [定数項]}$$

解答 (1) 560 (2) $-\frac{40}{27}$

(1) 展開式の一般項は ${}_7C_r(x^3)^{7-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_7C_r x^{21-3r} 2^r x^{-r} = 2^r {}_7C_r x^{21-4r}$

$21-4r=5$ を解いて $r=4$

よって、 x^5 の項の係数は $2^4 {}_7C_4 = 16 \cdot 35 = 560$

(2) 展開式の一般項は

$${}_5C_r(2x^3)^{5-r}\left(-\frac{1}{3x^2}\right)^r = {}_5C_r 2^{5-r} x^{15-3r} \left(-\frac{1}{3}\right)^r x^{-2r} = 2^{5-r} \left(-\frac{1}{3}\right)^r {}_5C_r x^{15-5r}$$

$15-5r=0$ を解いて $r=3$

よって、定数項は

$$2^{5-3} \left(-\frac{1}{3}\right)^3 {}_5C_3 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) \cdot 10 = -\frac{40}{27}$$

A 8 - 3

$(x-y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項の係数を求めよ。

解答 270

$\{(x-y)+3z\}^5$ の展開式において、 z^2 を含む項は ${}_5C_2(x-y)^3(3z)^2$

$(x-y)^3$ の展開式において、 xy^2 の項は ${}_3C_2x(-y)^2$

よって、求める係数は ${}_5C_2 \cdot 3^2 \cdot {}_3C_2 \cdot (-1)^2 = 10 \times 9 \times 3 \times 1 = 270$

別解 $(x-y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の項は $\frac{5!}{1!2!2!}x(-y)^2(3z)^2$

よって、求める係数は $\frac{5!}{1!2!2!} \times (-1)^2 \times 3^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \times 2 \cdot 1} \times 1 \times 9 = 270$

A 8 - 4

次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_r + \cdots + {}_nC_n$

(2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^r {}_nC_r + \cdots + (-1)^n {}_nC_n$

解答 (1) 略 (2) (ア) 略 (イ) 略 (ウ) 略

$$(1) \quad {}_n C_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$${}_{n-1} C_{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \{(n-1)-(k-1)\}!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

よって、 ${}_n C_k = {}_{n-1} C_{k-1}$ が成り立つ。

(2) 二項定理により

$$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_r x^r + \cdots + {}_n C_n x^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ア) 等式①で、 $x=1$ とおくと

$$(1+1)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \cdot 1 + {}_n C_2 \cdot 1^2 + \cdots + {}_n C_r \cdot 1^r + \cdots + {}_n C_n \cdot 1^n$$

$$\text{よって } {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_r + \cdots + {}_n C_n = 2^n$$

(イ) 等式①で、 $x=-1$ とおくと

$$(1-1)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \cdot (-1) + {}_n C_2 \cdot (-1)^2 + \cdots + {}_n C_r \cdot (-1)^r + \cdots + {}_n C_n \cdot (-1)^n$$

$$\text{よって } {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^r {}_n C_r + \cdots + (-1)^n {}_n C_n = 0$$

(ウ) 等式①で、 $x=-2$ とおくと

$$(1-2)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \cdot (-2) + {}_n C_2 \cdot (-2)^2 + \cdots + {}_n C_r \cdot (-2)^r + \cdots + {}_n C_n \cdot (-2)^n$$

$$\text{よって } {}_n C_0 - 2 {}_n C_1 + 2^2 {}_n C_2 - \cdots + (-2)^r {}_n C_r + \cdots + (-2)^n {}_n C_n = (-1)^n$$

B 8 - 1

次の式を簡単にせよ。

$$(1) \quad {}_{2n} C_0 + {}_{2n} C_2 + {}_{2n} C_4 + \cdots + {}_{2n} C_{2r} + \cdots + {}_{2n} C_{2n}$$

$$(2) \quad {}_{2n} C_1 + {}_{2n} C_3 + {}_{2n} C_5 + \cdots + {}_{2n} C_{2r-1} + \cdots + {}_{2n} C_{2n-1}$$

解答 (1) 略 (2) (ア) 略 (イ) 略 (ウ) 略

$$(1) \quad {}_n C_k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$${}_{n-1} C_{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \{(n-1)-(k-1)\}!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

よって、 ${}_n C_k = {}_{n-1} C_{k-1}$ が成り立つ。

(2) 二項定理により

$$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \cdots + {}_n C_r x^r + \cdots + {}_n C_n x^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ア) 等式①で、 $x=1$ とおくと

$$(1+1)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 \cdot 1 + {}_n C_2 \cdot 1^2 + \cdots + {}_n C_r \cdot 1^r + \cdots + {}_n C_n \cdot 1^n$$

$$\text{よって } {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_r + \cdots + {}_n C_n = 2^n$$

(イ) 等式①で、 $x=-1$ とおくと

$$(1-1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot (-1) + {}_nC_2 \cdot (-1)^2 + \cdots + {}_nC_r \cdot (-1)^r + \cdots + {}_nC_n \cdot (-1)^n$$

$$\text{よって } {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^r {}_nC_r + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$$

(ウ) 等式①で、 $x = -2$ とおくと

$$(1-2)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot (-2) + {}_nC_2 \cdot (-2)^2 + \cdots + {}_nC_r \cdot (-2)^r + \cdots + {}_nC_n \cdot (-2)^n$$

$$\text{よって } {}_nC_0 - 2{}_nC_1 + 2^2{}_nC_2 - \cdots + (-2)^r {}_nC_r + \cdots + (-2)^n {}_nC_n = (-1)^n$$

B 8 - 2

${}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 + \cdots + n{}_nC_n$ を計算せよ。

解答 (1) 略 (2) 略

$$\begin{aligned} (1) \quad k{}_nC_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \\ &= n{}_{n-1}C_{k-1} \end{aligned}$$

(2) (1)で示した等式を利用すると

$$\begin{aligned} {}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 + \cdots + n{}_nC_n &= n + n{}_{n-1}C_1 + n{}_{n-1}C_2 + \cdots + n{}_{n-1}C_{n-1} \\ &= n(1 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1}) \\ &= n(1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

B 8 - 3

次の式を計算せよ。 $\sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{k+1}$

解答 (1) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (2) $\frac{1}{n+1}$ (3) $\frac{4^n}{2n+1}$

$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m {}_mC_k x^k$ の両辺を x で積分すると

$$\frac{(1+x)^{m+1}}{m+1} = \sum_{k=0}^m \frac{{}_mC_k}{k+1} x^{k+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

両辺に $x=0$ を代入して $C = \frac{1}{m+1}$

よって $\sum_{k=0}^m \frac{{}_mC_k}{k+1} x^{k+1} = \frac{(1+x)^{m+1}-1}{m+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

(1) ①において $m=n$, $x=1$ とすると

$$\sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

(2) ①において $m=n$, $x=-1$ とすると

$$\sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{k+1} (-1)^{k+1} = -\frac{1}{n+1}$$

よって
$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k {}_nC_k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$(3) \quad 2 \sum_{k=0}^n \frac{{}_{2n}C_{2k}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{{}_{2n}C_k}{k+1} + \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k {}_{2n}C_k}{k+1} = \frac{2^{2n+1}-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

よって
$$\sum_{k=0}^n \frac{{}_{2n}C_{2k}}{2k+1} = \frac{2^{2n}}{2n+1} = \frac{4^n}{2n+1}$$

C 8 - 1

二項定理を用いて、次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

$$(1) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$$

$$(2) \quad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad (x > 0)$$

解答 (1) 略 (2) 略

$$(1) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\left(\frac{1}{n}\right) + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$${}_nC_2 > 0, \quad {}_nC_3 > 0, \quad \cdots, \quad {}_nC_n > 0, \quad \frac{1}{n} > 0$$

であるから、 $n \geq 2$ のとき

$${}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n > 0$$

よって

$${}_nC_0 + {}_nC_1\left(\frac{1}{n}\right) + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n > {}_nC_0 + {}_nC_1\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + n \times \frac{1}{n} = 2$$

したがって
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$$

$$(2) \quad (1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

[1] $n=2$ のとき

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

[2] $n \geq 3$ のとき

${}_nC_3 > 0, \dots, {}_nC_n > 0, x > 0$ であるから

$${}_nC_3x^3 + \dots + {}_nC_nx^n > 0$$

よって $(1+x)^n > {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$

したがって, [1], [2] より, $n \geq 2$ のとき

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

A 9 - 1

- (1) 1 個のさいころを投げるとき, 3 の倍数の目が出る確率を求めよ。
 (2) 赤玉 5 個, 白玉 4 個, 青玉 3 個が入っている袋から玉を 1 個取り出すとき, 赤玉が出る確率を求めよ。

解答 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{5}{12}$

- (1) 3 の倍数の目の出方は, 3, 6 の 2 通り

よって, 求める確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- (2) 玉は全部で 12 個ある。

よって, 求める確率は $\frac{5}{12}$

A 9 - 2

赤玉 5 個, 白玉 4 個, 青玉 3 個が入った袋から, 玉を 3 個同時に取り出すとき, 次の確率を求めよ。

- (1) すべて赤玉が出る確率
 (2) 赤玉 1 個と白玉 2 個が出る確率
 (3) どの色の玉も出る確率

解答 (1) $\frac{1}{22}$ (2) $\frac{3}{22}$ (3) $\frac{3}{11}$

起こりうる場合は 12 個の玉から 3 個を取る組合せであるから, 全部で ${}_{12}C_3$ 通りあり, どの場合も同様に確からしい。

- (1) すべて赤玉が出る場合の数は ${}_5C_3$ 通り

よって, 求める確率は $\frac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{22}$

- (2) 赤玉 1 個と白玉 2 個が出る場合の数は ${}_5C_1 \times {}_4C_2$ 通り

よって, 求める確率は $\frac{{}_5C_1 \times {}_4C_2}{{}_{12}C_3} = \frac{3}{22}$

- (3) どの色の玉も出るとは, 赤玉, 白玉, 青玉が 1 個ずつ出るということである。

この場合の数は ${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1$ 通り

よって, 求める確率は $\frac{{}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1}{{}_{12}C_3} = \frac{3}{11}$

A 9 - 3

1 個のさいころを 6 回投げるとき、3 の倍数の目がちょうど 2 回出る確率を求めよ。

解答 $\frac{80}{243}$

さいころを 1 回投げて、3 の倍数の目が出る確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

よって、求める確率は ${}_6C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}$

A 9 - 4

3 個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 出る目の最大値が 4 以下である確率
- (2) 出る目の最大値が 4 である確率

解答 (1) $\frac{8}{27}$ (2) $\frac{37}{216}$

3 個のさいころを同時に投げる方法は、全部で 6^3 通り

(1) 出る目の最大値が 4 以下となるのは、3 個の目がすべて 4 以下のときである。

その場合の数は 4^3 通り

よって、求める確率は $\frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$

(2) さいころの目の最大値が 4 以下であるという事象を A 、最大値が 3 以下であるという事象を B 、最大値が 4 であるという事象を C とすると $A = B \cup C$

B と C は互いに排反であるから $P(A) = P(B) + P(C)$

よって、求める確率は

$$P(C) = P(A) - P(B) = \frac{4^3}{6^3} - \frac{3^3}{6^3} = \frac{64}{216} - \frac{27}{216} = \frac{37}{216}$$

A 9 - 5

5 人がじゃんけんを 1 回するとき、次の確率を求めよ。

- (1) 1 人だけが勝つ確率
- (2) 2 人が勝つ確率
- (3) あいこになる確率

【解答】 (1) $\frac{5}{81}$ (2) $\frac{10}{81}$ (3) $\frac{17}{27}$

5 人の手の出し方は、1 人につき グー、チョキ、パー の 3 通りの出し方があるから、全部で 3^5 通り

(1) 1 人だけが勝つ場合、勝者の決まり方は 5 通り

そのおのおのについて、勝ち方がグー、チョキ、パーの 3 通り

よって、求める確率は $\frac{5 \times 3}{3^5} = \frac{5}{81}$

(2) 2 人だけが勝つ場合、勝者の決まり方は ${}_5C_2$ 通り

そのおのおのについて、勝ち方がグー、チョキ、パーの 3 通り

よって、求める確率は $\frac{{}_5C_2 \times 3}{3^5} = \frac{10}{81}$

(3) あいこになる場合は、次の [1], [2] のどちらかである。

[1] 手の出し方が 1 種類るとき 3 通り

[2] 手の出し方が 3 種類るとき

(a) {グー, グー, グー, チョキ, パー}

(b) {グー, チョキ, チョキ, チョキ, パー}

(c) {グー, チョキ, パー, パー, パー}

(d) {グー, グー, チョキ, チョキ, パー}

(e) {グー, グー, チョキ, パー, パー}

(f) {グー, チョキ, チョキ, パー, パー}

の 6 つの場合がある。

出す人を区別すると、(a)~(c) は、それぞれ $\frac{5!}{3!}$ 通り

(d)~(f) は、それぞれ $\frac{5!}{2!2!}$ 通り

であるから、全部で $\frac{5!}{3!} \times 3 + \frac{5!}{2!2!} \times 3 = 150$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{3+150}{3^5} = \frac{153}{3^5} = \frac{17}{27}$

A 9 - 6 (旧)

1 から 9 までの整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚ある。この中から 7 枚のカードを取り出して得られる 7 つの整数のうち最大のものを X とする。

(1) X が 8 である確率 $P(X=8)$ を求めよ。

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

解答 (1) $\frac{7}{36}$ (2) $\frac{35}{4}$

9 枚のカードから 7 枚取り出す方法は、全部で

$${}_9C_7 = {}_9C_2 = 36 \text{ (通り)}$$

(1) $X=8$ となるのは、1~8 の 8 枚のカードから 8 を含めて 7 枚取り出す場合で

$${}_7C_6 = 7 \text{ (通り)}$$

よって $P(X=8) = \frac{7}{36}$

(2) 1~9 のカードから 7 枚取り出すから、 X のとりうる値は $X=7, 8, 9$

(1) と同様に考えると $P(X=7) = \frac{1}{36}$

$$P(X=9) = \frac{{}_8C_6}{36} = \frac{{}_8C_2}{36} = \frac{28}{36}$$

したがって、 X の期待値は

$$E(X) = 7 \times \frac{1}{36} + 8 \times \frac{7}{36} + 9 \times \frac{28}{36} = \frac{315}{36} = \frac{35}{4}$$

B 9 - 1

4 つのさいころを同時に振るとき、次の確率を求めよ。

- (1) 4 つとも同じ目が出る確率
- (2) 3 つのさいころに同じ目が出て、他の 1 つにはその目と異なる目が出る確率
- (3) 2 つの異なる目がそれぞれ 2 つずつ出る確率
- (4) 2 つのさいころに同じ目が出て、他の 2 つにはその目と異なりかつ互いに異なる目が出る確率
- (5) 連続した 4 つの自然数の目が出る確率

解答 (1) $\frac{1}{216}$ (2) $\frac{5}{54}$ (3) $\frac{5}{72}$ (4) $\frac{5}{9}$ (5) $\frac{1}{18}$

4 つのさいころの目の出方は、全部で 6^4 通り

(1) 4 つとも同じ目が出る場合は、

$$(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), \dots, (6, 6, 6, 6)$$

の 6 通りある。

よって、求める確率は $\frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}$

(2) 同じ目が出る 3 つのさいころを選ぶ方法は ${}_4C_3=4$ (通り)

その目の選び方は 6 通り

そのおのおのについて、残り 1 つのさいころの目の出方は 5 通り

よって、求める確率は $\frac{4 \times 6 \times 5}{6^4} = \frac{5}{54}$

(3) 2 つの異なる目を選ぶ方法は ${}_6C_2=15$ (通り)

選んだ 2 つの目のうち一方の目が出る 2 つのさいころの選び方は ${}_4C_2=6$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{15 \times 6}{6^4} = \frac{5}{72}$

(4) 同じ目が出る 2 つのさいころを選ぶ方法は ${}_4C_2=6$ (通り)

その目の選び方は 6 通り

そのおのおのについて、残り 2 つのさいころの目の出方は ${}_5P_2=5 \cdot 4=20$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{6 \times 6 \times 20}{6^4} = \frac{5}{9}$

(5) 連続した 4 つの自然数となる目の組合せは

(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6)

の 3 通りがあり、目の出方はこの各組の順列であるから ${}_4P_4 \times 3 = 4! \times 3$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{4! \times 3}{6^4} = \frac{1}{18}$

B 9 - 2

2 つの箱 A, B には、玉が 2 個ずつ入っている。「A, B の両方から同時に玉を 1 個ずつ取り出し、A から取り出した玉を B へ、B から取り出した玉を A へ入れる」という操作を 1 回の試行とする。最初に、箱 A には白玉が 2 個、箱 B には赤玉が 2 個入っていたとして、4 回の試行の後、初めて A の箱に赤玉が 2 個入った状態になる確率を求めよ。

解答 $\frac{1}{8}$

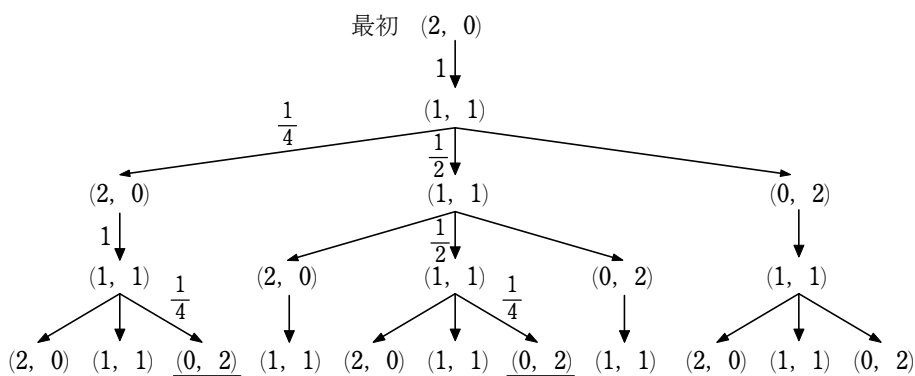
箱 A に白玉が a 個、赤玉が b 個入っている状態を (a, b) で表す。

1 回の試行で、箱 A の玉の個数が $(2, 0) \rightarrow (1, 1)$, $(0, 2) \rightarrow (1, 1)$ と変化する確率はどちらも 1 である。

また、 $(1, 1) \rightarrow (2, 0)$, $(1, 1) \rightarrow (1, 1)$, $(1, 1) \rightarrow (0, 2)$ と変化する確率は、それぞれ

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。

4 回の試行によって、箱 A の玉の個数は、下の樹形図のように変化する。



求める確率は、==をつけた場合の確率であるから $1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

B 9 - 3

A, B, C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは、以後のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんを繰り返し、最後に残ったものを勝者とする。ただし、あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える。

- (1) 1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (2) 2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

解答 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$

A, B, C の 3 人が 1 回で出す手の数は全部で 3^3 通り

- (1) 1 回のじゃんけんで A だけが勝つとき、A の手は、グー、チョキ、パーの 3 通り
B だけ、C だけが勝つ勝ち方も同様に 3 通りずつあるから、求める確率は

$$\frac{3 \times 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

- (2) 2 回のじゃんけんで勝者が決まるのは、次の 2 つの場合である。

[1] 1 回目があいこで、2 回目で 1 人残るとき

3 人のじゃんけんであいこになる場合のうち

全員同じ手を出すのは 3 通り

全員違う手を出すのは $3!$ 通り

よって、あいこになる確率は $\frac{3 + 3!}{3^3} = \frac{1}{3}$

ゆえに、[1] の場合の確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

[2] 1 回目で 2 人残り, 2 回目で 1 人残るとき

3 人のじゃんけんで 2 人だけが勝つ確率は, (1) と同様に考えて $\frac{3 \times 3}{3^3} = \frac{1}{3}$

2 人のじゃんけんで 1 人だけが勝つ確率も, (1) と同様に考えて $\frac{2 \times 3}{3^2} = \frac{2}{3}$

ゆえに, [2] の場合の確率は $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

事象 [1], [2] は互いに排反であるから, 求める確率は $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

B 9 - 4

A, B, C, D の 4 チームが次の方式で試合を行って優勝チームを決める。まず抽選によって 2 チームずつ 2 組に分かれて試合をし, その勝者同士で試合をし, 勝ったほうを優勝チームとする。なお, どの試合にも引き分けはなく, 実力が同じチームが試合をしたときに一方が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であり, 強いチームが弱いチームと試合をしたときに強いチームが勝つ確率は $\frac{4}{5}$ であるとする。A と B, C と D はそれぞれ実力が同じであるが, A, B は C, D より強いとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) A と B が試合をする確率を求めよ。

(2) A が優勝する確率を求めよ。

《学習テーマ》トーナメント① = 1 人固定して考える

《解答》A を固定して考えて, B と何回戦で対戦するかで場合わけ。

C, D は A から見ると対等 = 区別しなくてよい。

(1) (a) 1 回戦で対戦する確率

(b) 2 回戦で対戦する確率

$$\therefore \frac{19}{25}$$

(2) (a) B と 1 回戦で対戦

(b) B と 2 回戦で対戦

(c) B と対戦しない

$$\therefore \frac{54}{125}$$

B 9 - 5

数直線上の点 P は、原点を出発点として、1 回さいころを投げるごとに、5 以上の目が出ると正の向きに 2 進み、他の目が出ると負の向きに 1 進む。さいころを 6 回投げるとき、 P が座標 6 の点にくる確率を求めよ。

解答 $\frac{20}{243}$

さいころを 1 回投げて、5 以上の目が出るという事象を A とすると

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{また} \quad 1 - P(A) = \frac{2}{3}$$

さいころを 6 回投げて、 P が座標 6 の点にくるとする。

このとき、5 以上の目が x 回出るとすると

$$2x + (-1)(6 - x) = 6 \quad \text{これを解くと} \quad x = 4$$

よって、 P が座標 6 の点にくるのは、6 回のうち A がちょうど 4 回起こる場合である。

$$\text{したがって、求める確率は} \quad {}_6C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 15 \times \frac{2^2}{3^6} = \frac{20}{243}$$

B 9 - 6

さいころを 100 回振るとき、1 の目がちょうど k 回出る確率を P_k とする。

(1) P_k を k の式で表せ。ただし、 $0 \leq k \leq 100$ とし、累乗や組み合わせの記号を用いてもよいものとする。

(2) P_k が最大となる k の値を求めよ。

解答 (1) $\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{101-k}{5k} \quad (2) \quad k = 16$

$$(1) \quad P_k = {}_{100}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}$$

$$\text{よって} \quad P_{k-1} = {}_{100}C_{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{101-k} \quad (1 \leq k \leq 100)$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \frac{P_k}{P_{k-1}} &= \frac{{}_{100}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}}{{}_{100}C_{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{101-k}} = \frac{{}_{100}C_k \frac{1}{6}}{{}_{100}C_{k-1} \frac{5}{6}} \\ &= \frac{100!}{k!(100-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(101-k)!}{100!} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{101-k}{5k} \quad (1 \leq k \leq 100) \end{aligned}$$

$$(2) [1] \frac{P_k}{P_{k-1}} < 1 \text{ とすると } \frac{101-k}{5k} < 1$$

両辺に $5k$ (>0) を掛けて $101-k < 5k$

$$\text{よって } k > \frac{101}{6} = 16.8\cdots$$

ゆえに, $k \geq 17$ のとき $P_{k-1} > P_k$

$$[2] \frac{P_k}{P_{k-1}} > 1 \text{ とすると } 101-k > 5k$$

$$\text{これを解くと } k < \frac{101}{6} = 16.8\cdots$$

ゆえに, $1 \leq k \leq 16$ のとき $P_{k-1} < P_k$

$$\text{よって } P_0 < P_1 < P_2 < \cdots < P_{15} < P_{16} > P_{17} > \cdots > P_{100}$$

したがって, P_k が最大となる k の値は $k=16$

C 9 - 1

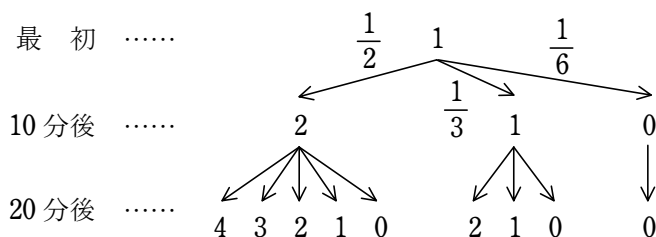
1 個のバクテリアが 10 分後に 2 個, 1 個, 0 個になる確率が, それぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ であるとする。

(1) 20 分後に 2 個になっている確率を求めよ。

(2) 30 分後に 6 個になっている確率を求めよ。

解答 (1) $\frac{11}{36}$ (2) $\frac{5}{96}$

20 分後までのバクテリアの個数の変化を樹形図に表すと, 次のようになる。



(1) 20 分後に 2 個になっている場合は, 次の [1], [2] のどちらかで, これらは互いに排斥である。

[1] 10 分後 1 個 → 20 分後 2 個 の場合

$$\text{この場合の確率は } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

[2] 10 分後 2 個 → 20 分後 2 個 の場合

10 分後の 2 個のバクテリアを A, B とすると, A, B の個数が 20 分後に

$$(A, B) = (2, 0), (1, 1), (0, 2)$$

と変化するとき, 条件を満たす。

$$\text{よって, この場合の確率は } \frac{1}{2} \times \left({}_2C_1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{36}$$

$$\text{したがって, 求める確率は } \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

(2) 30 分後に 6 個になるためには, 20 分後に 3 個以上でなければならない。

[1] 20 分後 3 個 → 30 分後 6 個 の場合

$$\text{20 分後に 3 個となる確率は } \frac{1}{2} \times \left({}_2C_1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{この 3 個が 30 分後に 6 個になる確率は } \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\text{よって, この場合の確率は } \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$

[2] 20 分後 4 個 → 30 分後 6 個 の場合

$$\text{20 分後に 4 個となる確率は } \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}$$

この 4 個が 30 分後に 6 個になるのは, 4 個の個数が

$$(2, 2, 2, 0), (2, 2, 1, 1)$$

と変化するときである。

$$\text{その確率は } {}_4C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{6} + {}_4C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって, この場合の確率は } \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

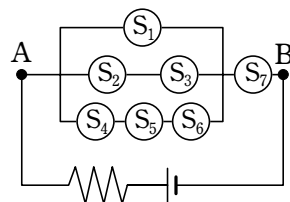
$$[1], [2] \text{ は互いに排反であるから, 求める確率は } \frac{1}{48} + \frac{1}{32} = \frac{5}{96}$$

C 9 - 2

図に示す電気回路がある。S₁ ~ S₇ はスイッチであり, これらのスイッチは他のスイッチの影響を受けず, すべて

ON, OFF の確率が $\frac{1}{2}$ であるものとする。このとき,

A から B へ電流が流れる確率を求めよ。

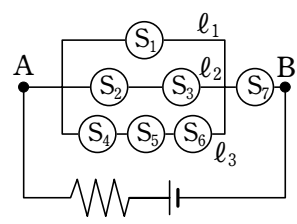


解答 $\frac{43}{128}$

右の図のように、分岐した 3 つの回線を ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 とする。

A から B へ電流が流れるのは、次の ①, ② がともに成り立つ場合である。

- ① ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の少なくとも 1 つに電流が流れる。
- ② S_7 が ON になっている。



① の余事象は、「 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 のすべてに電流が流れない」という事象である。

ℓ_1 に電流が流れない確率は $\frac{1}{2}$

ℓ_2 に電流が流れる確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

よって、 ℓ_2 に電流が流れない確率は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ℓ_3 に電流が流れる確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

よって、 ℓ_3 に電流が流れない確率は $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

したがって、 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 のすべてに電流が流れない確率は $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{21}{64}$

ゆえに、① が起こる確率は $1 - \frac{21}{64} = \frac{43}{64}$

また、② が起こる確率は $\frac{1}{2}$

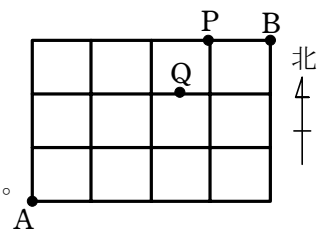
よって、求める確率は $\frac{43}{64} \times \frac{1}{2} = \frac{43}{128}$

C 9 - 3

右の図のように、東西に 4 本、南北に 5 本の道路がある。

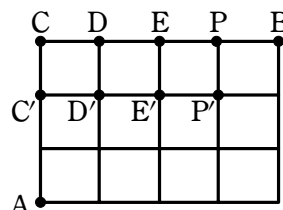
地点 A から出発した人が最短の道順を通って地点 B へ向かう。このとき、途中で地点 P を通る確率を求めよ。

各交差点で、東に行くか、北に行くかは等確率とし、一方しか行けないときは確率 1 でその方向に行くものとする。



解答 $\frac{21}{32}$

P を通る道順は次の 4 つの場合があり、これらは互いに排反である。また、各場合の 1 つの経路の確率は、次のとおりである。



[1] C を通る …… (C' を通り) 確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

[2] C を通らないで D を通る (D' を通り) 確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

[3] D を通らないで E を通る (E' を通り) 確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

[4] E を通らないで P を通る (P' を通り) 確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$$\begin{aligned} \text{よって、求める確率は} & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times {}_3C_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times {}_4C_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_5C_3 \\ & = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{6}{32} + \frac{10}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} \end{aligned}$$

C 9 - 4

さいころを繰り返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする。
すなわち、 k 回目に出た目の数を Y_k とすると、 $X = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ である。

- (1) X が 3 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) X が 4 で割り切れる確率を求めよ。
- (3) X が 6 で割り切れる確率を求めよ。

解答 (1) $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (2) $1 - \left(1 + \frac{2n}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- (1) X が 3 で割り切れない場合は、 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ がすべて 3 で割り切れない、すなわち n 個とも 1, 2, 4, 5 のいずれかになるときである。

よって、 X が 3 で割り切れない確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

したがって、求める確率は $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

- (2) X が 4 で割り切れない場合は、次の [1], [2] のどちらかで、これらは互いに排反である。

[1] $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ がすべて 1, 3, 5 のいずれかとなる場合

[2] $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ のうち 1 つが 2 または 6 で、残りはすべて 1, 3, 5 のいずれかとなる場合

[1] が起こる確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

[2] が起こる確率は ${}_nC_1 \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} = \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって、 X が 4 で割り切れない確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{2n}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$

したがって、求める確率は $1 - \left(1 + \frac{2n}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n$

C 9 - 5

3 枚の硬貨を同時に投げて、表が出たものを取り去り、次に、残っている硬貨があればそれらを同時に投げて、裏が出たものを取り去る。この手続きを繰り返す。ただし、硬貨が残っていても 5 回目を投げて終わりとする。

- (1) 5 回目を投げることがない確率を求めよ。
- (2) 4 回目を投げてちょうど全部の硬貨がなくなる確率を求めよ。
- (3) 4 回目を投げて 1 枚の硬貨が残っている確率を求めよ。

- (1) $\frac{3375}{4096}$ (2) $\frac{631}{4096}$ (3) $\frac{675}{4096}$

C 9 - 6

あるパーティーに、A, B, C, D の 4 人が 1 個ずつプレゼントを持って集まった。これらのプレゼントを一度集めてから無作為に分配することにする。

- (1) A または B が自分のプレゼントを受け取る確率を求めよ。
- (2) 自分が持ってきたプレゼントを受け取る人数が k 人である確率を $P(k)$ とする。
 $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ をそれぞれ求めよ。

解答 (1) $\frac{5}{12}$ (2) $P(0) = \frac{3}{8}$, $P(1) = \frac{1}{3}$, $P(2) = \frac{1}{4}$, $P(3) = 0$, $P(4) = \frac{1}{24}$

- (1) プレゼントの受け取り方の総数は 4! 通り

A, B が自分のプレゼントを受け取る事象をそれぞれ A, B とすると、求める確率は

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3!}{4!} + \frac{3!}{4!} - \frac{2!}{4!} = \frac{6}{24} + \frac{6}{24} - \frac{2}{24} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

- (2) [1] $k=4$ のとき、全員が自分のプレゼントを受け取るから 1 通り。

よって $P(4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

[2] $k=3$ となることは起こらないから $P(3)=0$

[3] $k=2$ のとき、例えば A と B が自分のプレゼントを受け取るとすると、C, D はそれぞれ D, C のプレゼントを受け取ることになるから 1 通り。

$$\text{よって } P(2) = \frac{{}_4C_2 \times 1}{4!} = \frac{1}{4}$$

[4] $k=1$ のとき、例えば A が自分のプレゼントを受け取るとすると、B, C, D はそれぞれ順に C, D, B または D, B, C のプレゼントを受け取る 2 通りがあるから

$$P(1) = \frac{{}_4C_1 \times 2}{4!} = \frac{1}{3}$$

$$[1] \sim [4] \text{ から } P(0) = 1 - \{P(1) + P(2) + P(3) + P(4)\} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{8}$$

C 9 - 7

n を 2 以上の自然数とする。 n 個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも 1 個は 1 の目が出る確率
- (2) 出る目の最小値が 2 である確率
- (3) 出る目の最小値が 2 かつ最大値が 5 である確率

解答 (1) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ (2) $\frac{5^n - 4^n}{6^n}$ (3) $\frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$

(1) n 個とも 1 以外の目が出る確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^n$

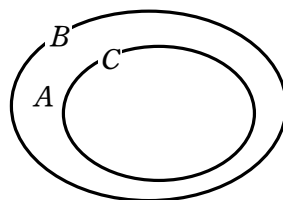
よって、求める確率は $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

- (2) 出る目の最小値が 2 になるという事象を A ,
 どの目も 2 以上になるという事象を B ,
 どの目も 3 以上になるという事象を C とする。
 $B = A \cup C$ であり、 A と C は互いに排反であるから

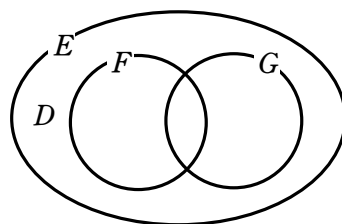
$$P(B) = P(A \cup C) = P(A) + P(C)$$

よって、求める確率は

$$P(A) = P(B) - P(C) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n = \frac{5^n - 4^n}{6^n}$$



- (3) 出る目の最小値が 2 かつ最大値が 5 になるという事象を D , どの目も 2 以上 5 以下になるという事象を E , どの目も 2 以上 4 以下になるという事象を F , どの目も 3 以上 5 以下になるという事象を G とする。
 $E = D \cup (F \cap G)$ であり, D と $F \cap G$ は互いに排反であるから $P(E) = P(D) + P(F \cap G)$



$$= P(D) + P(F) + P(G) - P(F \cap G)$$

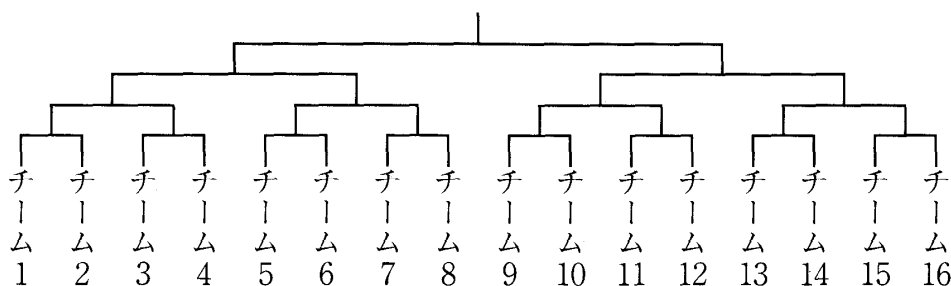
ここで, $F \cap G$ はどの目も 3 か 4 になるという事象である。

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(D) &= P(E) - P(F) - P(G) + P(F \cap G) \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n} \end{aligned}$$

C 9 - 8

16 チームが次の図のようなトーナメントで優勝を争うことになりました。16 チームの中の 1 つであるチーム A は他のどのチームに対しても確率 $\frac{2}{3}$ で勝つものとし, チーム A 以外のチーム同士はすべて互角とします。ただし, 互角とは互いの勝つ確率が $\frac{1}{2}$ であることを意味しています。なお, トーナメントの組合せは無作為のくじ引きで決まるものとします。



問 1 チーム A が優勝する確率を求めなさい。

問 2 チーム A 以外のあるチーム B が優勝する確率を求めなさい。

第 10 章 独立従属・条件付き確率

A 10 - 1

1 枚の硬貨を 3 回投げるとき、1 回目に表が出る事象を A 、少なくとも 1 回表が出る事象を B 、3 回とも同じ面が出る事象を C とする。この 3 つの事象は独立であるか。

解答 独立でない

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

事象 B は、「3 回とも裏が出る」という事象の余事象であるから

$$P(B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

事象 C は、「3 回とも表が出る」と「3 回とも裏が出る」という事象の和事象で、これらは互いに排反であるから

$$P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

事象 $A \cap B \cap C$ は「3 回とも表が出る」という事象であるから

$$P(A \cap B \cap C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

よって $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$

したがって、3 つの事象 A 、 B 、 C は独立でない。

参考 3 つの事象 A 、 B 、 C が独立

$$\iff P(A \cap B) = P(A)P(B), P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(C \cap A) = P(C)P(A), P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

A 10 - 2

2 つの事象 E 、 F があって、確率 $P(E) = 0.4$ 、 $P_{\overline{E}}(F) = 0.5$ 、 $P_F(\overline{E}) = 0.6$ が与えられている。このとき、次の確率を求めよ。

$$(1) P_F(E) \qquad (2) P(E \cup F) \qquad (3) P(F)$$

解答 (1) 0.4 (2) 0.7 (3) 0.5

$$(1) P_F(E) = 1 - P_F(\overline{E}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$\begin{aligned} (2) P(E \cup F) &= 1 - P(\overline{E \cup F}) = 1 - P(\overline{E} \cap \overline{F}) \\ &= 1 - P(\overline{E})P_{\overline{E}}(\overline{F}) = 1 - \{1 - P(E)\}\{1 - P_{\overline{E}}(F)\} \end{aligned}$$

$$= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.5) = 0.7$$

$$\begin{aligned} (3) \quad P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= P(E) + P(F) - P(F)P_F(E) \end{aligned}$$

$$(1), (2) \text{ の結果を代入すると } 0.7 = 0.4 + P(F) - P(F) \times 0.4$$

$$\text{ゆえに } 0.6 \times P(F) = 0.3 \quad \text{よって } P(F) = 0.5$$

A 10 - 3

番号 1 のカードが 1 枚、番号 2 のカードが 2 枚、番号 3 のカードが 3 枚、番号 4 のカードが 4 枚、計 10 枚のカードがある。無作為に 1 枚を取り出したカードの番号を X とする。

- (1) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。
- (2) X の分散 $\sigma^2 = V(X)$ を求めよ。
- (3) 番号 k のカードを取ったら $2k+1$ 万円をもらえるとする。もらえる金額 Y の期待値 $E(Y)$ ($Y=2k+1: k=1, 2, 3, 4$) を求めよ。
- (4) Y の標準偏差を求めよ。

A 10 - 4

1, 2, 3, 4, 5 の各数字が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードがある。これらのカードの中から同時に 2 枚を取り出し、2 枚のカードに書かれている数のうち、小さい方を X 、大きい方を Y とする。次の期待値を求めよ。

- (1) X の期待値
- (2) Y の期待値
- (3) $X+Y$ の期待値

解答 (1) 2 (2) 4 (3) 6

カードの取り出し方の総数は ${}_5C_2 = 10$ (通り)

この 10 通りと、おのおのの組に対する X, Y の値は、次のようになる。

$$(1, 2): X=1, Y=2 \quad (1, 3): X=1, Y=3$$

$$(1, 4): X=1, Y=4 \quad (1, 5): X=1, Y=5$$

$$(2, 3): X=2, Y=3 \quad (2, 4): X=2, Y=4$$

$$(2, 5): X=2, Y=5 \quad (3, 4): X=3, Y=4$$

$$(3, 5): X=3, Y=5 \quad (4, 5): X=4, Y=5$$

- (1) X の値と、 X がその値をとる確率 P は、次の表のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

したがって、 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

(2) Y の値と、 Y がその値をとる確率 P は、次の表のようになる。

Y	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

したがって、 Y の期待値 $E(Y)$ は

$$E(Y) = 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{4}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

(3) $X+Y$ の値と、 $X+Y$ がその値をとる確率 P は、次の表のようになる。

$X+Y$	3	4	5	6	7	8	9	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

したがって、 $X+Y$ の期待値 $E(X+Y)$ は

$$E(X+Y) = 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{2}{10} + 6 \times \frac{2}{10} + 7 \times \frac{2}{10} + 8 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

B 10 - 1

ある工場では、同じ製品をいくつかの機械で製造している。不良品が現れる確率は機械 A の場合は 4 % であるが、それ以外の機械では 7 % に上がる。また、機械 A で製品全体の 60 % を作る。製品の中から 1 個を取り出したとき

- (1) それが不良品である確率を求めよ。
- (2) 不良品であったとき、それが機械 A の製品である確率を求めよ。

解答 (1) $\frac{13}{250}$ (2) $\frac{6}{13}$

取り出した 1 個が、機械 A の製品である事象を A 、不良品である事象を E とすると

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, \quad P_A(E) = \frac{4}{100}, \quad P_{\bar{A}}(E) = \frac{7}{100}$$

(1) 求める確率は $P(E)$ であるから

$$\begin{aligned}
 P(E) &= P(A \cap E) + P(\overline{A} \cap E) = P(A)P_A(E) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E) \\
 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{100} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{100} = \frac{26}{500} = \frac{13}{250}
 \end{aligned}$$

(2) 求める確率は $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A)P_A(E)}{P(E)} = \frac{3}{125} \div \frac{13}{250} = \frac{6}{13}$$

B 10 - 2

4 回に 1 回の割合で帽子を忘れるくせのある K 君が、正月に A, B, C 3 軒を順に年始回りをして家に帰ったところ、帽子を忘れてきたことに気がついた。2 番目の家 B に忘れてきた確率を求めよ。

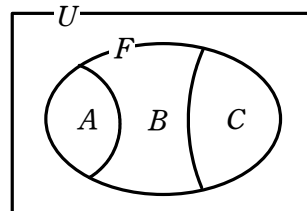
解答 $\frac{12}{37}$

A, B, C のいずれかに忘れるという事象を F , B に忘れるという事象を B とする。

$$\begin{aligned}
 P(F) &= 1 - P(\overline{F}) \\
 &= 1 - \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{37}{64}
 \end{aligned}$$

また $P(F \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

よって、求める確率は $P_F(B) = \frac{P(F \cap B)}{P(F)} = \frac{3}{16} \div \frac{37}{64} = \frac{12}{37}$



B 10 - 3

1 つの袋の中に、A は赤玉 3 個と白玉 4 個、B は赤玉 5 個と白玉 2 個、C は赤玉 4 個と白玉 3 個を入れる。よくかき混ぜてから 1 個を取り出し、取り出した玉が赤玉であるとき、この赤玉が A が入れたものである確率を求めよ。

解答 $\frac{1}{4}$

取り出した玉が A が入れた玉であるという事象を A , 赤玉であるという事象を R とする。

$$P(R) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7},$$

$$P(A \cap R) = P(A)P_A(R) = \frac{7}{21} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

求める確率は $P_R(A)$ である。

$$P_R(A) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{1}{7} \div \frac{4}{7} = \frac{1}{4}$$

B 10 - 4

数直線上を動く点 P が原点の位置にある。1 枚の硬貨を投げて、表が出たら P を正の向きに 2 だけ進め、裏が出たら P を負の向きに 1 だけ進める。硬貨を 6 回投げたときの P の最後の座標を X とする。 X の期待値を求めよ。

解答 3

硬貨を 6 回投げたときの表が出る回数と、6 回投げた後の X の値の関係は、次の表のようになる。

表の出る回数	0	1	2	3	4	5	6
X	-6	-3	0	3	6	9	12

X の値と、その値をとる確率 P の関係は、次の表のようになる。

X	-6	-3	0	3	6
P	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	${}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5$	${}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$	${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2$
	9	12	計		
	${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	1		

したがって、 X の期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned}
 E(X) &= (-6) \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 + (-3) \times {}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 0 \times {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \times {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \times {}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &\quad + 9 \times {}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 (-6 - 18 + 0 + 60 + 90 + 54 + 12) \\
 &= \frac{1}{64} \times 192 = 3
 \end{aligned}$$

第 11 章 整数問題

A 11 - 1

次の数の正の約数の和を求めよ。

(1) 3^7

(2) $3^4 \cdot 7^3$

(3) 864

解答 (1) 3280 (2) 48400 (3) 2520

(1) 求める和は $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^7 = \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 3280$

(2) 求める和は

$$(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)(1 + 7 + 7^2 + 7^3) = \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \times \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 121 \times 400 = 48400$$

(3) $864 = 2^5 \cdot 3^3$ であるから、求める和は

$$(1 + 2 + \cdots + 2^5)(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = \frac{2^6 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 63 \times 40 = 2520$$

A 11 - 2

次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) $2 \cdot 3^2$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

(2) 18, 252

(3) 30, 126, 140

解答 それぞれ最大公約数、最小公倍数の順

(1) 6, 180 (2) 18, 252 (3) 2, 1260

(1) $2 \cdot 3^2$

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

よって、最大公約数は $2 \cdot 3 = 6$

$$\text{最小公倍数は } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

(2) $18 = 2 \cdot 3^2$

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

よって、最大公約数は $2 \cdot 3^2 = 18$

$$\text{最小公倍数は } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$$

(3) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

よって、最大公約数は 2

$$\text{最小公倍数は } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$$

B 11 - 1

等式 $x+5y+2z=15$ を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

解答 $(x, y, z) = (8, 1, 1), (6, 1, 2), (4, 1, 3), (2, 1, 4), (3, 2, 1), (1, 2, 2)$

$$x+5y+2z=15 \text{ から } 5y=15-x-2z$$

$$x \geq 1, z \geq 1 \text{ から } 5y \leq 15-1-2 \cdot 1=12$$

$$\text{よって, } y \leq \frac{12}{5}=2.4 \text{ であるから } y=1, 2$$

$$[1] \ y=1 \text{ のとき } x+2z=10$$

$$\text{これを満たす自然数 } (x, z) \text{ の組は } (x, z) = (8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)$$

$$[2] \ y=2 \text{ のとき } x+2z=5$$

$$\text{これを満たす自然数 } (x, z) \text{ の組は } (x, z) = (3, 1), (1, 2)$$

以上から

$$(x, y, z) = (8, 1, 1), (6, 1, 2), (4, 1, 3), (2, 1, 4), (3, 2, 1), (1, 2, 2)$$

B 11 - 2

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$(1) \ 11x+23y=2$$

$$(2) \ 56x-73y=5$$

解答 k は整数とする。

$$(1) \ x=23k-4, \ y=-11k+2 \quad (2) \ x=73k+4, \ y=56k+3$$

$$(1) \ 11x+23y=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=-4, y=2$ は、 $\textcircled{1}$ の整数解の 1 つである。

$$\text{よって } 11 \cdot (-4) + 23 \cdot 2 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } 11(x+4) + 23(y-2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

11 と 23 は互いに素であるから、 $\textcircled{3}$ より

$$x+4=23k, \ y-2=-11k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって、 $\textcircled{1}$ のすべての整数解は

$$x=23k-4, \ y=-11k+2 \quad (k \text{ は整数})$$

$$(2) \ 56x-73y=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=4, y=3$ は、 $\textcircled{1}$ の整数解の 1 つである。

$$\text{よって } 56 \cdot 4 - 73 \cdot 3 = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } 56(x-4) - 73(y-3) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

56 と 73 は互いに素であるから、 $\textcircled{3}$ より

$$x-4=73k, \ y-3=56k \quad (k \text{ は整数})$$

したがって、 $\textcircled{1}$ のすべての整数解は

$$x=73k+4, \ y=56k+3 \quad (k \text{ は整数})$$

参考 56 と 73 に互除法の計算を行うと、次のようになる。

$$73 = 56 \cdot 1 + 17 \quad \text{移項すると } 17 = 73 - 56 \cdot 1$$

$$56 = 17 \cdot 3 + 5 \quad \text{移項すると } 5 = 56 - 17 \cdot 3 \quad \cdots \cdots (*)$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって } 5 &= 56 - 17 \cdot 3 \\
 &= 56 - (73 - 56 \cdot 1) \cdot 3 \\
 &= 56 \cdot 4 - 73 \cdot 3
 \end{aligned}$$

注意 56 と 73 の互除法の計算は, (*) 以降も

$$\begin{aligned}
 17 &= 5 \cdot 3 + 2 \\
 5 &= 2 \cdot 2 + 1
 \end{aligned}$$

と続くが, (*) の時点で等式 ① の右辺 5 が余りとして出てきたため, そこで互除法の計算を止めている。

B 11 - 3

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

$$xy - 2x + 3y - 1 = 0$$

解答 $(x, y) = (-2, -3), (-8, 3), (-4, 7), (2, 1)$

方程式は次のように変形できる。

$$(x+3)(y-2) + 6 - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+3)(y-2) = -5$$

x, y は整数であるから, $x+3, y-2$ も整数である。

ゆえに $(x+3, y-2) = (1, -5), (-5, 1), (-1, 5), (5, -1)$

よって $(x, y) = (-2, -3), (-8, 3), (-4, 7), (2, 1)$

B 11 - 4

方程式 $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ の整数解をすべて求めよ。

解答 $(x, y) = (1, -2), (1, -4)$

左辺を y について整理すると

$$y^2 + 2(x+2)y + 5x^2 - 4x + 7 = 0 \quad \dots\dots ①$$

y についての 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= (x+2)^2 - (5x^2 - 4x + 7) = -4x^2 + 8x - 3 \\
 &= -(4x^2 - 8x + 3) = -(2x-1)(2x-3)
 \end{aligned}$$

① の解は整数(実数)であるから, $D \geq 0$ である。

よって $-(2x-1)(2x-3) \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad (2x-1)(2x-3) \leq 0$

ゆえに $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad x \text{ は整数であるから } x=1$

このとき, ① は $y^2 + 6y + 8 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (y+2)(y+4) = 0$

よって $y = -2, -4$

したがって $(x, y) = (1, -2), (1, -4)$

B 11 - 5

x, y がともに整数のとき, 次の方程式を満たす (x, y) を求めよ。

$$x^2 + xy + 6x + 7y - 6 = 0$$

解答 (1) $(x, y) = (1, -2), (1, -4)$ (2) $(x, y) = (-8, 10), (-6, 6)$

(1) y について整理すると

$$y^2 + 2(x+2)y + 5x^2 - 4x + 7 = 0 \quad \dots\dots ①$$

この y についての 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= 2^2(x+2)^2 - 4(5x^2 - 4x + 7) \\ &= -4(4x^2 - 8x + 3) \\ &= -4(2x-1)(2x-3) \end{aligned}$$

① の解は整数 (実数) であるから $D \geq 0$

$$\text{よって } -4(2x-1)(2x-3) \geq 0 \quad \text{ゆえに } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

x は整数であるから $x = 1$

$x = 1$ のとき, ① は

$$y^2 + 6y + 8 = 0 \quad \text{すなわち } (y+2)(y+4) = 0$$

ゆえに $y = -2, -4$

よって $(x, y) = (1, -2), (1, -4)$

(2) x について整理すると

$$x^2 + (y+6)x + 7y - 6 = 0 \quad \dots\dots ①$$

x について解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(y+6) \pm \sqrt{(y+6)^2 - 4(7y-6)}}{2} \\ &= \frac{-y-6 \pm \sqrt{y^2 - 16y + 60}}{2} \end{aligned}$$

x が整数であるためには, 根号内の $y^2 - 16y + 60$ が平方数であることが必要である。

よって $y^2 - 16y + 60 = k^2$ (k は 0 以上の整数)

$$(y-8)^2 - k^2 = 4$$

$$(y-8+k)(y-8-k) = 4$$

y, k は整数で, $y-8+k \geq y-8-k$ であるから

$$(y-8+k, y-8-k) = (4, 1), (2, 2), (-1, -4), (-2, -2)$$

ゆえに $(y, k) = \left(\frac{21}{2}, \frac{3}{2}\right), (10, 0), \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right), (6, 0)$

y, k は整数であるから $(y, k) = (6, 0), (10, 0)$

このとき ① から $y = 6$ のとき $x = -6$, $y = 10$ のとき $x = -8$

よって $(x, y) = (-6, 6), (-8, 10)$

B 11 - 6

n は自然数とする。 $n^2 - 14n + 45$ が素数となるような n をすべて求めよ。

解答 $n = 4, 10$

$$\begin{aligned} n^2 - 14n + 45 &= (n-5)(n-9) \\ &= (5-n)(9-n) \end{aligned}$$

$n-5 > n-9$, $5-n < 9-n$ であるから, $n^2 - 14n + 45$ が素数であるとき

$$n-9=1 \quad \text{または} \quad 5-n=1$$

$$n-9=1 \text{ から } n=10 \quad 5-n=1 \text{ から } n=4$$

$$n=10 \text{ のとき } n^2 - 14n + 45 = 5 \cdot 1 = 5 \text{ (素数)}$$

$$n=4 \text{ のとき } n^2 - 14n + 45 = 1 \cdot 5 = 5 \text{ (素数)}$$

よって, 求める n は $n = 4, 10$

B 11 - 7

次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (x \leq y \leq z)$$

解答 x, y, z の組を (x, y, z) と表す。

$$(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$$

$$(1) \quad 1 \leq x \leq y \leq z \text{ から } \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \dots\dots ①$$

$$\text{よって } 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

$$\text{ゆえに } x \leq 3$$

$$x \text{ は自然数であるから } x = 1, 2, 3$$

$$[1] \quad x=1 \text{ のとき } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

これを満たす自然数 y, z は存在しない。

$$[2] \quad x=2 \text{ のとき } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \dots\dots ②$$

$$① \text{ から } \frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

$$\text{ゆえに } y \leq 4$$

$$2 = x \leq y \text{ から } y = 2, 3, 4$$

$$y=2 \text{ のとき, } ② \text{ から } \frac{1}{z} = 0$$

自然数 z はこれを満たさない。

$$y=3 \text{ のとき, } ② \text{ から } \frac{1}{z} = \frac{1}{6}$$

よって $z = 6$ ($y \leq z$ を満たす)

$y=4$ のとき, ② から $\frac{1}{z} = \frac{1}{4}$ よって $z=4$ ($y \leq z$ を満たす)

[3] $x=3$ のとき $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$ …… ③

① から $\frac{2}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$ ゆえに $y \leq 3$

$3 = x \leq y$ から $y=3$

このとき, ③ から $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$

よって $z=3$ ($y \leq z$ を満たす)

したがって $(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

B 11 - 8

4984 と 3471 の最大公約数を, 互除法を用いて求めよ。

解答 89

$$4984 = 3471 \cdot 1 + 1513$$

$$3471 = 1513 \cdot 2 + 445$$

$$1513 = 445 \cdot 3 + 178$$

$$445 = 178 \cdot 2 + 89$$

$$178 = 89 \cdot 2 + 0$$

よって, 最大公約数は 89

$$\begin{array}{r} \begin{array}{ccccc} 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 89 \overline{) 178} & \overline{) 445} & \overline{) 1513} & \overline{) 3471} & \overline{) 4984} \\ \underline{178} & \underline{356} & \underline{1335} & \underline{3026} & \underline{3471} \\ 0 & 89 & 178 & 445 & 1513 \end{array} \end{array}$$

B 11 - 9

a を 8 で割った余りを 1, b を 8 で割った余りを 3 とするとき, 次の式を 8 で割った余りを求めよ。

(1) $3a + 4b$

(2) ab

(3) a^{10}

(4) b^{11}

解答 (1) 7 (2) 3 (3) 1 (4) 3

(1) $3a + 4b$ を 8 で割った余りは $3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 15$ を 8 で割った余りに等しい。

よって 7

(2) ab を 8 で割った余りは $1 \cdot 3 = 3$ を 8 で割った余りに等しい。

よって 3

(3) a^{10} を 8 で割った余りは $1^{10} = 1$ を 8 で割った余りに等しい。

よって 1

(4) b^{11} を 8 で割った余りは $3^{11} = 3 \cdot 3^{10} = 3 \cdot 9^5$ を 8 で割った余りに等しい。

9 を 8 で割った余りは 1 であるから, 求める余りは, $3 \cdot 1^5 = 3$ を 8 で割った余りに等

しい。

よって 3

B 11 - 10

次のものを求めよ。

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) 7^{100} を 6 で割った余り | (2) 26^{40} を 5 で割った余り |
| (3) 3^{50} を 8 で割った余り | (4) 2^{100} を 7 で割った余り |

解答 (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 2

- (1) 7 を 6 で割った余りは 1

よって, 1^{100} を 6 で割った余りは 1

別解 $7 \equiv 1 \pmod{6}$ であるから

$$7^{100} \equiv 1^{100} \equiv 1 \pmod{6}$$

- (2) 26 を 5 で割った余りは 1

よって, 1^{40} を 5 で割った余りは 1

別解 $26 \equiv 1 \pmod{5}$ であるから

$$26^{40} \equiv 1^{40} \equiv 1 \pmod{5}$$

- (3) 3^2 を 8 で割った余りは 1

$$3^{50} = (3^2)^{25}$$

よって, 1^{25} を 8 で割った余りは 1

別解 $3^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから

$$(3^2)^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1 \pmod{8}$$

- (4) 2^3 を 7 で割った余りは 1

$$2^{100} = (2^3)^{33} \cdot 2$$

よって, $1^{33} \cdot 2$ を 7 で割った余りは 2

別解 $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ であるから

$$(2^3)^{33} \cdot 2 \equiv 1^{33} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7}$$

B 11 - 11

次のものを求めよ。

- | | |
|--------------------|---------------------|
| (1) 23^{23} の一の位 | (2) 7^{50} の下 2 桁 |
|--------------------|---------------------|

解答 (1) 7 (2) 49

- (1) 23^{23} の一の位は, 23^{23} を 10 で割った余りに等しい。

10 を法として考えると

$$23 \equiv 3, 23^2 \equiv 3^2 \equiv 9, 23^3 \equiv 3^3 \equiv 7, 23^4 \equiv 3^4 \equiv 1$$

よって, $23^{23} \equiv (23^4)^5 \cdot 23^3 \equiv 1^5 \cdot 7 \equiv 7 \pmod{10}$

したがって、 23^{23} の一の位は 7

- (2) 7^{50} の下 2 桁は、 7^{50} を 100 で割った余りに等しい。

100 を法として考えると

$$7^2 \equiv 49, 7^3 \equiv 49 \cdot 7 \equiv 343 \equiv 43, 7^4 \equiv 43 \cdot 7 \equiv 301 \equiv 1$$

$$\text{よって, } 7^{50} \equiv (7^4)^{12} \cdot 7^2 \equiv 1^{12} \cdot 49 \equiv 49 \pmod{100}$$

したがって、 7^{50} の下 2 桁は 49

B 11 - 12

次の $\square$ に当てはまる 0 以上の整数のうち、最も小さいものを求めよ。

- (1) $9 \equiv \square \pmod{3}$ (2) $13 \equiv \square \pmod{4}$ (3) $100 \equiv \square \pmod{15}$

解答 (1) 0 (2) 1 (3) 10

求める数を n とおく。

- (1) $9 - n$ が 3 の倍数となる最小の n は

$$n = 0 \quad (\text{このとき } 9 - n = 9)$$

- (2) $13 - n$ が 4 の倍数となる最小の n は

$$n = 1 \quad (\text{このとき } 13 - n = 12)$$

- (3) $100 - n$ が 15 の倍数となる最小の n は

$$n = 10 \quad (\text{このとき } 100 - n = 90)$$

B 11 - 13

次の合同式を満たす整数 x を、それぞれの法を用いて表せ。ただし、合同式を満たす x が存在しない場合は、存在しないと答えよ。

- (1) $5x \equiv 2 \pmod{7}$ (2) $4x \equiv 5 \pmod{8}$ (3) $2x \equiv 4 \pmod{6}$

解答 (1) $x \equiv 6 \pmod{7}$ (2) 存在しない (3) $x \equiv 2$ または $x \equiv 5 \pmod{6}$

- (1) $5x \equiv 2 \pmod{7}$ から

$$5x - 2 = 7k \quad (k \text{ は整数})$$

$$\text{両辺から 28 を引くと } 5x - 30 = 7k - 28$$

$$\text{すなわち } 5(x - 6) = 7(k - 4)$$

5 と 7 は互いに素であるから、 $x - 6$ は 7 の倍数である。

$$\text{よって } x \equiv 6 \pmod{7}$$

- (2) $4x \equiv 5 \pmod{8}$ から $4x - 5 = 8k$ (k は整数)

左辺は奇数、右辺は偶数であるから、この等式を満たす整数 x は存在しない。

よって、 $4x \equiv 5 \pmod{8}$ を満たす x は存在しない。

(3) $2x \equiv 4 \pmod{6}$ から $2x - 4 = 6k$ (k は整数)

ゆえに $x = 3k + 2$

整数 k は $k = 2l, 2l + 1$ (l は整数) のいずれかの形で表される。

$k = 2l$ のとき

$$x = 3 \cdot 2l + 2 = 6l + 2 \equiv 2 \pmod{6}$$

$k = 2l + 1$ のとき

$$x = 3(2l + 1) + 2 = 6l + 5 \equiv 5 \pmod{6}$$

よって $x \equiv 2$ または $x \equiv 5 \pmod{6}$

別解

(1) 7 を法とするから, $x = 0, 1, 2, \dots, 6$ として, $5x$ を 7 で割った余りを調べると, 次のようになる。

$$5 \cdot 0 = 0 \equiv 0, \quad 5 \cdot 1 = 5 \equiv 5, \quad 5 \cdot 2 = 10 \equiv 3, \quad 5 \cdot 3 = 15 \equiv 1,$$

$$5 \cdot 4 = 20 \equiv 6, \quad 5 \cdot 5 = 25 \equiv 4, \quad 5 \cdot 6 = 30 \equiv 2 \pmod{7}$$

よって $x \equiv 6 \pmod{7}$

(2) 8 を法とするから, $x = 0, 1, 2, \dots, 7$ として, $4x$ を 8 で割った余りを調べると, 次のようになる。

$$4 \cdot 0 = 0 \equiv 0, \quad 4 \cdot 1 = 4 \equiv 4, \quad 4 \cdot 2 = 8 \equiv 0, \quad 4 \cdot 3 = 12 \equiv 4,$$

$$4 \cdot 4 = 16 \equiv 0, \quad 4 \cdot 5 = 20 \equiv 4, \quad 4 \cdot 6 = 24 \equiv 0, \quad 4 \cdot 7 = 28 \equiv 4 \pmod{8}$$

よって, $4x \equiv 5 \pmod{8}$ を満たす x は存在しない。

(3) 6 を法とするから, $x = 0, 1, 2, \dots, 5$ として, $2x$ を 6 で割った余りを調べると, 次のようになる。

$$2 \cdot 0 = 0 \equiv 0, \quad 2 \cdot 1 = 2 \equiv 2, \quad 2 \cdot 2 = 4 \equiv 4, \quad 2 \cdot 3 = 6 \equiv 0,$$

$$2 \cdot 4 = 8 \equiv 2, \quad 2 \cdot 5 = 10 \equiv 4 \pmod{6}$$

よって $x \equiv 2$ または $x \equiv 5 \pmod{6}$

B 11 - 14

正の整数を 5 進法で表すと数 $abc_{(5)}$ となり, 3 倍して 9 進法に直すと数 $cba_{(9)}$ となる。
この整数を 10 進法で表せ。

解答 88

$$abc_{(5)} = a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0$$

$$cba_{(9)} = c \cdot 9^2 + b \cdot 9^1 + a \cdot 9^0$$

ただし, $1 \leq a \leq 4, 0 \leq b \leq 4, 1 \leq c \leq 4$ である。

条件から

$$3(a \cdot 5^2 + b \cdot 5^1 + c \cdot 5^0) = c \cdot 9^2 + b \cdot 9^1 + a \cdot 9^0$$

整理すると $37a + 3b - 39c = 0$

よって $b = 13c - \frac{37}{3}a \quad \dots\dots \textcircled{1}$

b, c は整数であり, $1 \leq a \leq 4$ から $a = 3$

① に $a = 3$ を代入すると

$$b = 13c - 37$$

したがって $c = \frac{b + 37}{13} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

c は整数であり, $0 \leq b \leq 4$ から $b = 2$

② に $b = 2$ を代入すると

$$c = \frac{2 + 37}{13} = 3$$

よって $a = 3, b = 2, c = 3$

したがって, 求める整数は $3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 88$

C 11 - 1

(1) 連続した 4 つの自然数の積は, 24 の倍数であることを証明せよ。

(2) n が整数のとき, $n^9 - n^3 + 3n^2 + 9n + 6$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

解答 (1) 略 (2) 略

(1) 連続した 4 つの自然数の中には

4 の倍数が 1 個 (これを n とする)

3 の倍数が 1 個 または 2 個

4 の倍数でない偶数が 1 個 (n とは異なる)

含まれる。

よって, 連続した 4 つの自然数の積は $4 \times 3 \times 2 = 24$ の倍数である。

(2) $n^9 - n^3 + 3n^2 + 9n + 6$

$$= n^3(n^6 - 1) + 3(n^2 + 3n + 2)$$

$$= n^3(n^3 + 1)(n^3 - 1) + 3(n + 1)(n + 2)$$

$$= n^3(n + 1)(n^2 - n + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) + 3(n + 1)(n + 2)$$

$$= (n - 1)n(n + 1) \cdot n^2(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) + 3(n + 1)(n + 2)$$

ここで, $(n - 1)n(n + 1)$ は連続した 3 つの整数の積であるから 6 の倍数, $(n + 1)(n + 2)$

は連続した 2 つの整数の積であるから 2 の倍数である。

よって, $(n - 1)n(n + 1) = 6k$, $(n + 1)(n + 2) = 2l$ (k, l は整数) とおくと

$$\begin{aligned} n^9 - n^3 + 3n^2 + 9n + 6 &= 6k \cdot n^2(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) + 3 \cdot 2l \\ &= 6\{n^2(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)k + l\} \end{aligned}$$

ここで、 $n^2(n^2+n+1)(n^2-n+1)k+l$ は整数であるから、 $n^9-n^3+3n^2+9n+6$ は 6 の倍数である。

C 11 - 2

次の等式を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{3} \quad (2 \leq x \leq y \leq z)$$

解答 $(x, y, z) = (2, 2, 18), (2, 3, 6)$

$$2 \leq x \leq y \leq z \text{ であるから } \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{よって } \frac{5}{3} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{6}{x}$$

$$\text{すなわち } \frac{5}{3} \leq \frac{6}{x} \quad \text{ゆえに } x \leq \frac{18}{5} = 3.6$$

x は 2 以上の自然数であるから $x = 2, 3$

$$[1] \quad x=2 \text{ のとき } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{7}{6} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{ここで、① から } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{2}{y} + \frac{3}{y} = \frac{5}{y}$$

$$\text{よって } \frac{7}{6} \leq \frac{5}{y} \quad \text{ゆえに } y \leq \frac{30}{7} = 4.2\dots\dots$$

y は自然数で、 $2 = x \leq y$ であるから $y = 2, 3, 4$

$$y=2 \text{ のとき、② から } \frac{3}{z} = \frac{1}{6} \quad \text{よって } z=18 \quad (\text{これは適する})$$

$$y=3 \text{ のとき、② から } \frac{3}{z} = \frac{1}{2} \quad \text{よって } z=6 \quad (\text{これは適する})$$

$$y=4 \text{ のとき、② から } \frac{3}{z} = \frac{2}{3} \quad \text{これを満たす自然数 } z \text{ はない。}$$

$$[2] \quad x=3 \text{ のとき } \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{4}{3} \quad \dots\dots ③$$

$$\frac{2}{y} + \frac{3}{z} \leq \frac{5}{y} \text{ であるから } \frac{4}{3} \leq \frac{5}{y} \quad \text{ゆえに } y \leq \frac{15}{4} = 3.75$$

y は自然数で、 $3 = x \leq y$ であるから $y = 3$

$$\text{このとき、③ から } \frac{3}{z} = \frac{2}{3} \quad \text{これを満たす自然数 } z \text{ はない。}$$

以上から $(x, y, z) = (2, 2, 18), (2, 3, 6)$

C 11 - 3

$xyz = x + y + z$ を満たす自然数 x, y, z の組をすべて求めよ。

解答 $(x, y, z) = (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$

x, y, z を入れ替えても、もとの式と変わらないので、まず $1 \leq x \leq y \leq z$ …… ① と仮定する。

よって $xyz = x + y + z \leq z + z + z = 3z$

ゆえに $xy \leq 3$ …… ②

x, y は自然数であるから ①, ② から

$$(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$$

[1] $(x, y) = (1, 1)$ のとき

与式から $z = 2 + z$ これを満たす自然数 z はない。

[2] $(x, y) = (1, 2)$ のとき

与式から $2z = 3 + z$

よって $z = 3$ ($y \leq z$ を満たす)

[3] $(x, y) = (1, 3)$ のとき

与式から $3z = 4 + z$

よって $z = 2$ ($y \leq z$ を満たさない)

以上から $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

よって、① の条件をはずして考えると

$$(x, y, z) = (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

C 11 - 4

p, q を互いに素な自然数とする。

(1) すべての整数 x に対して、 p 個の整数 $x - q, x - 2q, \dots, x - pq$ を p で割った余りはすべて異なることを証明せよ。

(2) $x > pq$ を満たすすべての整数 x は、ある自然数 a, b を用いて $x = ap + bq$ と表されることを証明せよ。

解答 (1) 略 (2) 略

(1) 整数 l, m が $1 \leq l < m \leq p$ を満たすとする。

$x - lq$ と $x - mq$ を p で割った余りが等しいと仮定すると、整数 L, M を用いて

$$x - lq = pL + k, \quad x - mq = pM + k$$

と表される。

$$\text{よって} \quad x - lq - (x - mq) = pL + k - (pM + k)$$

$$\text{すなわち} \quad (m - l)q = (L - M)p$$

p, q は互いに素であるから、 $m - l$ は p の倍数である。

$$\text{一方、} 1 \leq l < m \leq p \text{ であるから} \quad 0 < m - l \leq p - 1 \quad \dots\dots \text{①}$$

よって、 $m - l$ が p の倍数であることは、① に矛盾する。

ゆえに、 $x - lq$ と $x - mq$ を p で割った余りは異なる。

すなわち、すべての整数 x に対して、 p 個の整数 $x - q, x - 2q, \dots, x - pq$ を p で割った余りはすべて異なる。

(2) (1) より, p 個の整数

$$x-q, x-2q, \dots, x-pq$$

を p で割った余りはすべて異なる。

一方, これらを p で割った余りは 0 以上 $p-1$ 以下の整数である。

よって, $x-q, x-2q, \dots, x-pq$ の中に, p で割った余りが 0 であるものが存在する。

その数を $x-bq$ (b は $1 \leq b \leq p$ を満たす自然数) とすると, ある整数 a を用いて

$$x-bq=ap \quad \text{すなわち} \quad x=ap+bq$$

と表される。

また, $1 \leq b \leq p$ と $x > pq$ から $0 < x-pq \leq x-bq$

よって, $0 < ap$ であるから $a > 0$

ゆえに, a は自然数である。

したがって, x はある自然数 a, b を用いて $x=ap+bq$ と表される。

第 12 章 平面図形

A 12 - 1

図の点 P, Q は, 線分 AB をどのように内分または外分するか。



解答 (1) 点 P は線分 AB を 1 : 2 に内分する。点 Q は線分 AB を 1 : 2 に外分する。

(2) 点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分する。点 Q は線分 AB を 6 : 1 に外分する。

(1) 点 P は線分 AB 上にあつて $AP : PB = 1 : 2$

よつて, 点 P は線分 AB を 1 : 2 に内分する。

点 Q は線分 BA の延長上にあつて $AQ : QB = 3 : 6 = 1 : 2$

よつて, 点 Q は線分 AB を 1 : 2 に外分する。

(2) 点 P は線分 AB 上にあつて $AP : PB = 2 : 3$

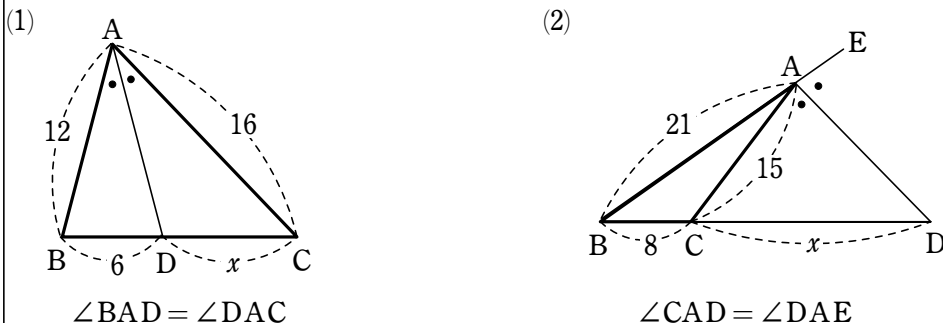
よつて, 点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分する。

点 Q は線分 AB の延長上にあつて $AQ : QB = 6 : 1$

よつて, 点 Q は線分 AB を 6 : 1 に外分する。

A 12 - 2

次の図において, x の値を求めよ。



解答 (1) $x = 8$ (2) $x = 20$

(1) AD は $\angle A$ の二等分線であるから $BD : DC = AB : AC$

$AB : AC = 12 : 16 = 3 : 4$ であるから $6 : x = 3 : 4$

よつて $3x = 24$ ゆえに $x = 8$

(2) AD は $\triangle ABC$ の $\angle A$ の外角の二等分線であるから $BD : DC = AB : AC$

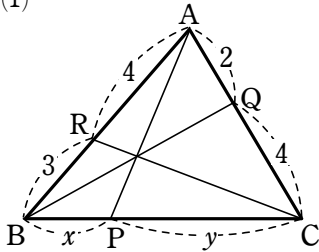
$AB : AC = 21 : 15 = 7 : 5$ であるから $(x + 8) : x = 7 : 5$

よって $7x=5(x+8)$ ゆえに $x=20$

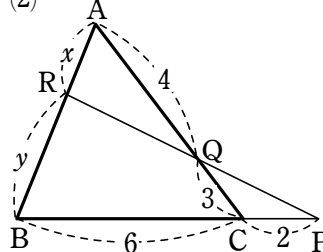
A 12 - 3

下の図において、 $x:y$ を求めよ。

(1)



(2)



【解答】 (1) $3:8$ (2) $1:3$

(1) $\triangle ABC$ にチェバの定理を用いて $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$

$$\text{よって } \frac{x}{y} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

したがって $x:y=3:8$

(2) $\triangle ABC$ と RP にメネラウスの定理を用いて $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$

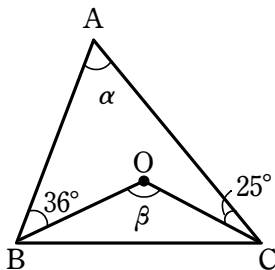
$$\text{よって } \frac{8}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y} = 1$$

したがって $x:y=1:3$

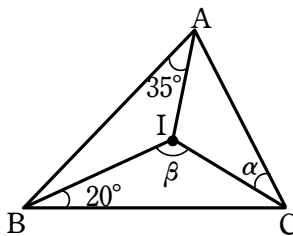
A 12 - 4

$\triangle ABC$ の外心を O 、内心を I とする。次の図の α 、 β の大きさを求めよ。

(1)



(2)



【解答】 (1) $\alpha=61^\circ$, $\beta=122^\circ$ (2) $\alpha=35^\circ$, $\beta=125^\circ$

(1) $AO=BO=CO$ から $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ は二等辺三角形。

よって $\angle OAB = \angle OBA = 36^\circ$, $\angle OAC = \angle OCA = 25^\circ$

したがって $\alpha = \angle OAB + \angle OAC = 36^\circ + 25^\circ = 61^\circ$

中心角と円周角の関係から

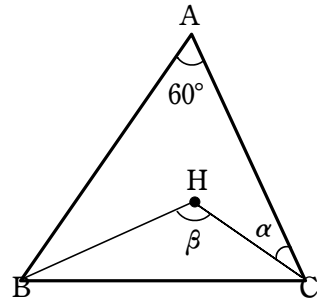
$$\beta = 2\alpha = 2 \times 61^\circ = 122^\circ$$

(2) I は内心であるから $35^\circ \times 2 + 20^\circ \times 2 + 2\alpha = 180^\circ$ ゆえに $\alpha = 35^\circ$

$$\angle ICB = \alpha = 35^\circ \text{ より } \beta = 180^\circ - (20^\circ + 35^\circ) = 125^\circ$$

A 12 - 5

右の図において、点 H は $\triangle ABC$ の垂心である。
 α , β を求めよ。



解答 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$

BH の延長と辺 CA の交点を D, CH の延長と辺 AB の交点を E とする。H は $\triangle ABC$ の垂心であるから

$$BD \perp CA, CE \perp AB$$

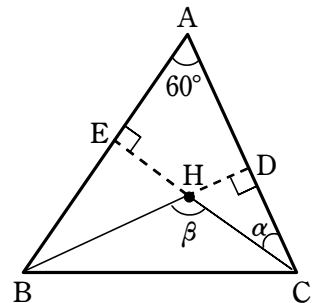
よって $\angle BDC = 90^\circ$, $\angle AEC = 90^\circ$

$\triangle AEC$ において、内角の和は 180° であるから

$$\alpha = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$$

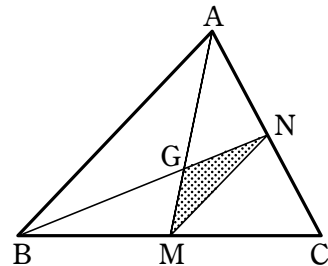
また、 $\triangle CDH$ において

$$\beta = \alpha + 90^\circ = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$



A 12 - 6

$\triangle ABC$ の 2 つの中線 AM, BN の交点を G とし、M と N を結ぶ。 $\triangle ABC$ と $\triangle GMN$ の面積比を求めよ。



解答 12 : 1

$$AN = NC \text{ であるから } \triangle NBC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

$$BM = MC \text{ であるから } \triangle NBM = \frac{1}{2} \triangle NBC$$

$$\text{点 } G \text{ は } \triangle ABC \text{ の重心であるから } BG : GN = 2 : 1$$

$$\text{よって } \triangle GMN = \frac{1}{3} \triangle NBM$$

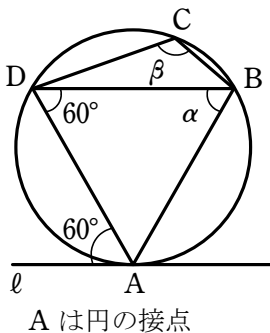
$$\begin{aligned} \text{すなわち } \triangle GMN &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \triangle NBC \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{1}{12} \triangle ABC \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \triangle ABC : \triangle GMN = 12 : 1$$

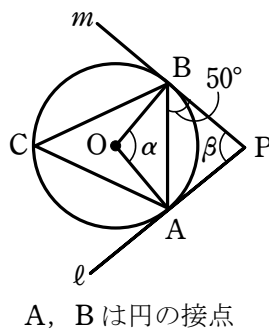
A 12 - 7

下の図において、 α , β を求めよ。ただし、直線 ℓ , m は円の接線とする。

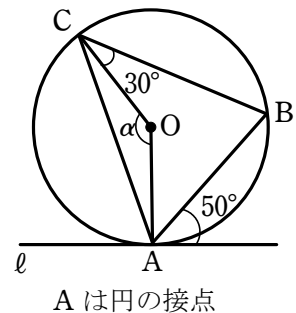
(1)



(2)



(3)



解答 (1) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$ (2) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 80^\circ$ (3) $\alpha = 140^\circ$

(1) 円の接線と弦の作る角により $\alpha = 60^\circ$

$\triangle ABD$ において、内角の和は 180° であるから

$$\angle DAB = 180^\circ - (\alpha + 60^\circ) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$$

円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$$\beta = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

- (2) 円の接線と弦の作る角により $\angle ACB = 50^\circ$
 よって、円周角の定理により $\alpha = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$
 四角形 OAPB において、 $\angle OBP = \angle OAP = 90^\circ$ であるから

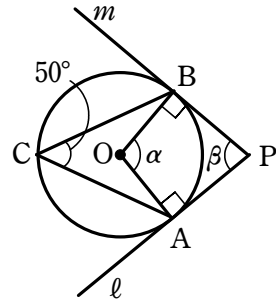
$$\begin{aligned}\beta &= 360^\circ - (\alpha + 90^\circ + 90^\circ) \\ &= 360^\circ - (100^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 80^\circ\end{aligned}$$

- (3) 円の接線と弦の作る角により $\angle ACB = 50^\circ$
 よって $\angle OCA = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$

$\triangle OAC$ は二等辺三角形であるから $\angle OAC = \angle OCA = 20^\circ$

$\triangle OAC$ において、内角の和は 180° であるから

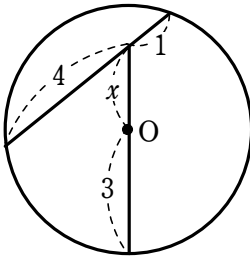
$$\alpha = 180^\circ - 2 \times 20^\circ = 140^\circ$$



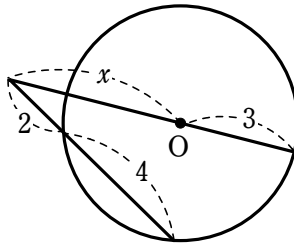
A 12 - 8

下の図において、 x を求めよ。ただし、 O は円の中心、直線 PT は円の接線で、 T は接点である。

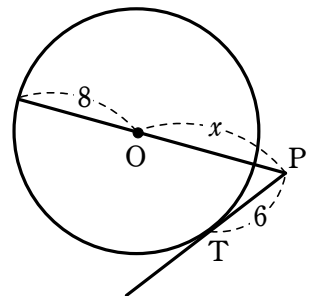
(1)



(2)



(3)



解答 (1) $x = \sqrt{5}$ (2) $x = \sqrt{21}$ (3) $x = 10$

- (1) 右の図において、方べきの定理により

$$(3-x)(3+x) = 1 \cdot 4$$

式を整理して $x^2 = 5$

$$x > 0 \text{ より } x = \sqrt{5}$$

- (2) 方べきの定理により

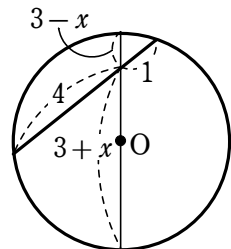
$$(x-3)(x+3) = 2 \cdot (2+4)$$

式を整理して $x^2 = 21$

$$x > 0 \text{ より } x = \sqrt{21}$$

- (3) 方べきの定理により

$$(x-8)(x+8) = 6^2$$



式を整理して $x^2 = 100$

$x > 0$ より $x = 10$

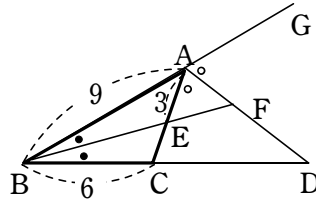
B 12 - 1

右の図において、

$$\angle ABF = \angle FBD$$

$$\angle CAD = \angle DAG$$

のとき、EC、CD、AF : FD の値を求めよ。



解答 $EC = 2$, $CD = \frac{15}{2}$, $AF : FD = 2 : 3$

$\angle B$ の二等分線と辺 AC の交点が E であるから

$$BA : BC = AE : EC \quad \text{すなわち} \quad BA \cdot EC = BC \cdot AE$$

$$\text{よって} \quad 9 \cdot EC = 6 \cdot 3 \quad \text{ゆえに} \quad EC = 2$$

また、 $\angle A$ の外角の二等分線と辺 BC の延長の交点が D であるから

$$AB : AC = BD : DC \quad \text{すなわち} \quad AB \cdot DC = AC \cdot BD$$

$$AC = AE + EC = 3 + 2 = 5 \quad \text{であるから} \quad 9 \cdot CD = 5 \cdot (6 + CD)$$

$$\text{ゆえに} \quad CD = \frac{15}{2}$$

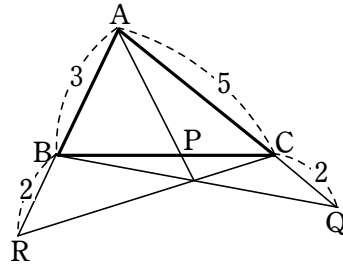
更に、 $\angle B$ の二等分線と辺 AD の交点が F であるから $BA : BD = AF : FD$

$$\text{また} \quad BD = BC + CD = 6 + \frac{15}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad AF : FD = 9 : \frac{27}{2} = 2 : 3$$

B 12 - 2

下の図において、線分比 BP : PC を求めよ。



解答 (1) $BP : PC = 4 : 15$ (2) $BP : PC = 7 : 5$

(1) チェバの定理から $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\text{BP}}{\text{PC}} \cdot \frac{5}{2} = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{\text{BP}}{\text{PC}} = \frac{4}{15}$$

したがって $BP : PC = 4 : 15$

(2) チェバの定理から $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$

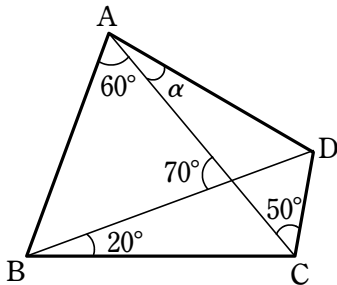
$$\frac{\text{BP}}{\text{PC}} \cdot \frac{2}{2+5} \cdot \frac{3+2}{2} = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{\text{BP}}{\text{PC}} = \frac{7}{5}$$

したがって $BP : PC = 7 : 5$

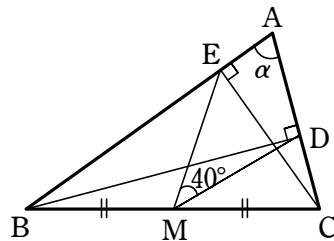
B 12 - 3

下の図において、 α を求めよ。

(1)



(2)


$$BD \perp AC, \quad CE \perp AB$$

M は辺 BC の中点

解答 (1) $\alpha = 20^\circ$ (2) $\alpha = 70^\circ$

- (1) 対角線 AC, BD の交点を E とする。

$\triangle ABE$ において

$$\angle ABE = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ$$

したがって,

$$\angle ABD = \angle ACD = 50^\circ$$

であるから, 4 点 A, B, C, D は 1 つの円周上にある。

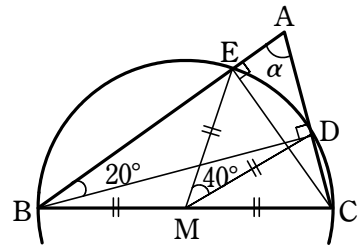
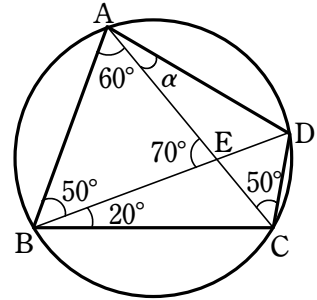
$\widehat{CD}$ に対する円周角は等しいから $\alpha = \angle DBC = 20^\circ$

- (2) $\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$ であるから, 4 点 E, B, C, D は点 M を中心とする 1 つの円周上にある。

$$\text{よって } \angle EBD = \frac{1}{2} \angle EMD = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$$

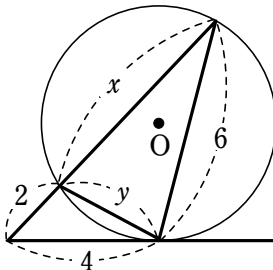
$\triangle ABD$ において

$$\alpha = 180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$$



B 12 - 4

次の図において, x, y の値を求めよ。



解答 (1) $x=6, y=3$ (2) $x=6, y=4$

- (1) 右の図のように点を定める。

$\angle BDC = \angle CDA, \angle BCD = \angle CAD$ から

$$\triangle BCD \sim \triangle CAD$$

よって $BD : BC = CD : CA$

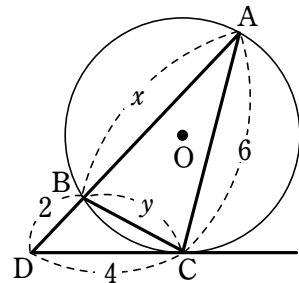
$$2 : y = 4 : 6 \quad \text{よって } y = 3$$

また $BD : CD = CD : AD$

$$2 : 4 = 4 : (x+2)$$

$$2(x+2) = 16$$

よって $x = 6$



(2) 方べきの定理により

$$x^2 = y(y+5) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$6^2 = y(y+5) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ により, } x^2 = 6^2 \quad x > 0 \text{ から } x = 6$$

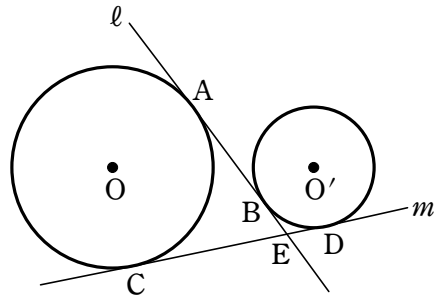
$$\textcircled{2} \text{ から } y^2 + 5y - 36 = 0$$

$$(y+9)(y-4) = 0 \quad y > 0 \text{ から } y = 4$$

B 12 - 5

右の図において、直線 ℓ は点 A, B で、直線 m は点 C, D でそれぞれ円 O, O' に接し、 ℓ と m は点 E で交わっている。円 O の半径は 10, 円 O' の半径は 6, 中心間の距離 OO' は 20 である。次の線分の長さを求めよ。

- (1) AB (2) CD (3) BE



解答 (1) 12 (2) $8\sqrt{6}$ (3) $4\sqrt{6} - 6$

(1) 右の図のように、点 O' から OA の延長に垂線 O'H を下ろす。

四角形 ABO'H は長方形であるから

$$AB = HO' \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

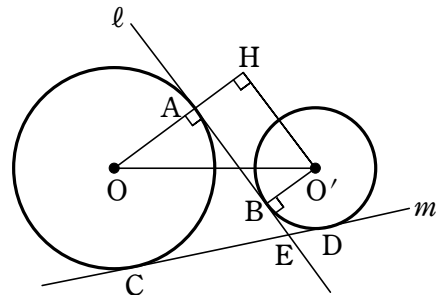
$$HA = O'B = 6$$

$$\text{よって } OH = OA + HA = 10 + 6 = 16$$

直角三角形 OO'H において、三平方の定理により

$$\begin{aligned} HO' &= \sqrt{OO'^2 - OH^2} \\ &= \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$

ゆえに、 $\textcircled{1}$ から $AB = 12$



- (1) 求める体積は、正四角錐 $PRSTU$ の体積の 2 倍である。

平面 $RSTU$ で正六面体を切ったときの断面は右の図のようになる。

四角形 $RSTU$ は 1 辺の長さが 6 の正方形であるから、正六面体の 1 辺の長さは $6\sqrt{2}$ である。

正四角錐 $PRSTU$ の高さは、正六面体の 1 辺の長さの半分であるから

$$\frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

よって
$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} \right) \times 2 = 72\sqrt{2}$$

- (2) $\triangle PRS$ は正三角形であるから、線分 RS の中点を M と

すると
$$PM = \frac{\sqrt{3}}{2} PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$$

よって、 $\triangle PRS$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot RS \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

- (3) 正八面体に内接する球の中心を O とすると、正八面体は

合同な 8 つの四面体 $OPRS$, $OPST$, $OPTU$, $OPUR$, $OQRS$, $OQST$, $OQTU$, $OQUR$ に分割できる。

四面体 $OPRS$ の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \triangle PRS \cdot r = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot r = 3\sqrt{3}r$$

$V = 8V_1$ であるから $72\sqrt{2} = 8 \cdot 3\sqrt{3}r$ よって $r = \sqrt{6}$

- 別解** (3) 辺 RS , TU の中点をそれぞれ M , N とし、

正八面体に内接する球の中心を O とする。

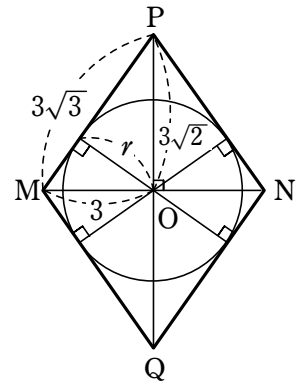
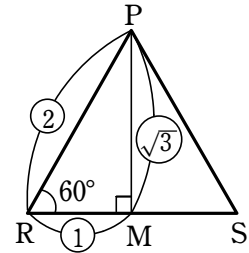
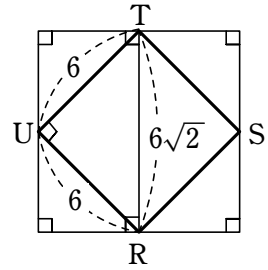
3 点 P , M , N を通る平面で切った断面で考える。

$\triangle PMO$ の面積を 2 通りに表すと

$$\frac{1}{2} \cdot PM \cdot r = \frac{1}{2} \cdot MO \cdot PO$$

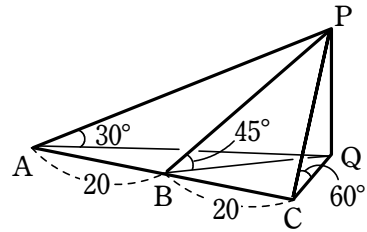
すなわち
$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2}$$

よって
$$r = \sqrt{6}$$



C 12 - 2

右の図のように、一直線上に並んだ 3 地点 A, B, C から塔 PQ の仰角を測ると、それぞれ 30° , 45° , 60° であった。また、 $AB=20$ m, $BC=20$ m であった。塔 PQ の高さを求めよ。



解答 $10\sqrt{6}$ m

PQ = x (m) とすると

$$AQ = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x, \quad BQ = \frac{x}{\tan 45^\circ} = x,$$

$$CQ = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$\angle ABQ = \theta$ とすると $\angle CBQ = 180^\circ - \theta$

$\triangle ABQ$ で余弦定理により

$$(\sqrt{3}x)^2 = 20^2 + x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x \cos \theta$$

整理すると $x^2 + 20x \cos \theta - 200 = 0$ …… ①

$\triangle CBQ$ で余弦定理により $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = 20^2 + x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x \cos(180^\circ - \theta)$

整理すると $x^2 + 60x \cos \theta + 600 = 0$ …… ②

① $\times 3$ - ② から $2x^2 = 1200$ よって $x^2 = 600$

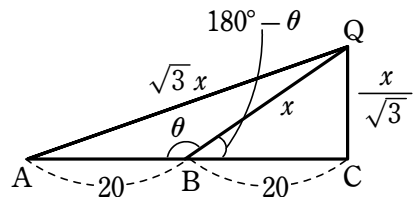
$x > 0$ であるから $x = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

このとき、① から $600 + 20 \cdot 10\sqrt{6} \cos \theta - 200 = 0$

よって $\cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{6}}$

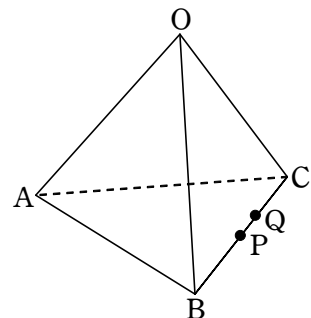
これは $-1 < \cos \theta < 1$ を満たすから、適する。

したがって $PQ = 10\sqrt{6}$ (m)

**C 12- 3**

右の図のように、1 辺の長さが 18 cm の正四面体 OABC がある。辺 BC の中点を P, 2 : 1 の比に分ける点を Q とする。このとき、次の問いに答えよ。

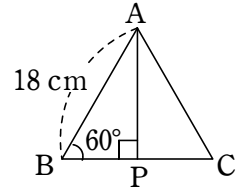
- (1) 線分 AP の長さを求めよ。
- (2) 点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の長さを求めよ。
- (3) 正四面体 OABC の体積を求めよ。
- (4) 点 Q から $\triangle OAB$ に下ろした垂線の長さを求めよ。



【解答】 (1) $9\sqrt{3}$ cm (2) $6\sqrt{6}$ cm (3) $486\sqrt{2}$ cm³ (4) $4\sqrt{6}$ cm

(1) $\triangle ABC$ は 1 辺が 18 cm の正三角形であるから

$$AP = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 18 = 9\sqrt{3} \text{ (cm)}$$



(2) 点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線を OH とすると、H は AP 上にある。

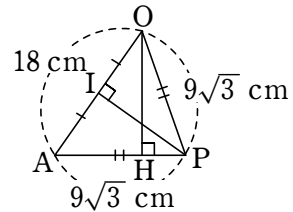
$\triangle OAP$ は $AP = OP$ の二等辺三角形であるから、P から OA にひいた垂線を PI とすると、 $OI = 9$ cm より

$$PI = \sqrt{(9\sqrt{3})^2 - 9^2} = 9\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$\triangle OAP$ の面積について

$$\frac{1}{2} \times 18 \times 9\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 9\sqrt{3} \times OH$$

$$\begin{aligned} OH &= \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= 6\sqrt{6} \text{ (cm)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 18 \times 9\sqrt{3} \right) \times 6\sqrt{6} &= 162 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= 486\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

(4) 点 C から $\triangle OAB$ に下ろした垂線を CJ, 点 Q から $\triangle OAB$ に下ろした垂線を QK とすると

$$CJ = OH = 6\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$\triangle BCJ$ において、 $CJ \parallel QK$ であるから

$$CJ : QK = BC : BQ$$

$$6\sqrt{6} : QK = (2+1) : 2$$

$$QK = 4\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

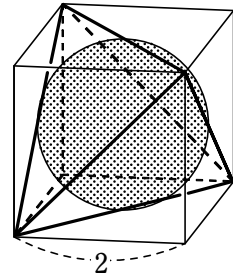
C 12 - 4

正四面体 T と半径 1 の球面 S とがあって、 T の 6 つの辺がすべて S に接しているという。 T の 1 辺の長さを求めよ。

【解答】 $2\sqrt{2}$

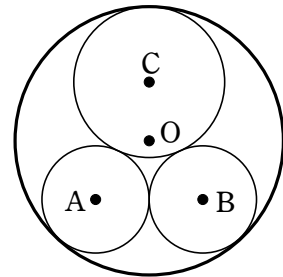
半径 1 の球面 S に各面の中心で接する立方体を考える。
 この立方体において、互いに隣り合わない 4 つの頂点を結んで正四面体を作ると、この正四面体の 6 つの辺はすべてその中点で S に接する。
 よって、この正四面体が T であり、その 1 辺の長さは

$$2\sqrt{2}$$



C 12 - 5

右の図のように、半径 2 の外接する 2 円 A , B が、半径 5 の円 O に内接している。
 2 円 A , B に外接し、円 O に内接する円 C の半径を求めよ。



解答 $\frac{5(4+\sqrt{5})}{11}$

$\triangle CAB$ は $CA=CB$ の二等辺三角形であり、 $\triangle OAB$ は $OA=OB$ の二等辺三角形である。

よって、 C から AB に垂線 CH を下ろすと、 CH は O を通る。

また、 H は円 A と円 B の接点である。

円 C の半径を r とすると

$$CA=r+2, CO=5-r$$

また $OA=5-2=3, AH=2$

$\triangle OAH$ において、三平方の定理により

$$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$$

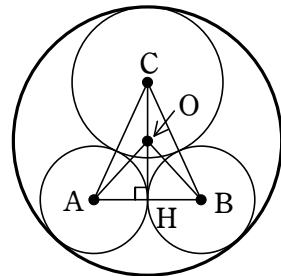
$\triangle CAH$ において、三平方の定理により

$$CA^2=AH^2+CH^2$$

したがって $(r+2)^2=2^2+\{(5-r)+\sqrt{5}\}^2$

整理すると $14r+2\sqrt{5}r=30+10\sqrt{5}$

よって $r=\frac{30+10\sqrt{5}}{14+2\sqrt{5}}=\frac{5(4+\sqrt{5})}{11}$



A 13 - 1

2 点 A (1, -1), B (4, 3) を結ぶ線分 AB について、次のものを求めよ。

- (1) 2点A, Bの距離
- (2) 2 : 1 に内分する点 C
- (3) 3 : 2 に外分する点 D

解答 (1) 5 (2) $\left(3, \frac{5}{3}\right)$ (3) (10, 11)

(1) 5

(2) $\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 4}{2 + 1}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times 3}{2 + 1}\right)$ すなわち $\left(3, \frac{5}{3}\right)$

(3) $\left(\frac{-2 \times 1 + 3 \times 4}{3 - 2}, \frac{-2 \times (-1) + 3 \times 3}{3 - 2}\right)$ すなわち (10, 11)

A 13 - 2

(1) 次の直線の方程式を求めよ。

(ア) 点 (-1, 3) を通り、傾きが -2 (イ) 点 (4, 1) を通り、 x 軸に垂直

(2) 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(ア) (1, -2), (-3, 4) (イ) (-5, 7), (6, 7)

解答 (1) (ア) $y = -2x + 1$ (イ) $x = 4$

(2) (ア) $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ (イ) $y = 7$

(1) (ア) $y - 3 = -2\{x - (-1)\}$ すなわち $y = -2x + 1$

(イ) 通る点の x 座標が 4 であるから $x = 4$

(2) (ア) $y - (-2) = \frac{4 - (-2)}{-3 - 1}(x - 1)$ すなわち $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

(イ) $y - 7 = \frac{7 - 7}{6 - (-5)}\{x - (-5)\}$ すなわち $y = 7$

A 13 - 3

xy 平面上の直線 $(k+2)x + (k+1)y - 2k - 3 = 0$ は実数 k の値にかかわらず、定点を通る。この定点の座標を求めよ。

解答 (1, 1)与式を k について整理して

$$(x+y-2)k+2x+y-3=0$$

これを k についての恒等式とみなすと

$$x+y-2=0, 2x+y-3=0$$

これを解いて $x=1, y=1$

よって、求める定点の座標は (1, 1)

A 13 - 4点 (2, 8) と直線 $y=\frac{3}{2}x+2$ の距離を求めよ。**解答** (1) $\frac{6}{\sqrt{13}}$

$$(1) \text{ 求める距離は } \frac{|3 \cdot 2 - 2 \cdot 8 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

A 13 - 5

次の円の方程式を求めよ。

- (1) 中心が (3, -4) で、原点を通る円
- (2) 中心が (1, 2) で、 x 軸に接する円
- (3) 2 点 (1, 4), (5, 6) を直径の両端とする円
- (4) 2 点 (2, 1), (1, 2) を通り、中心が x 軸上にある円
- (5) 3 点 (4, -1), (6, 3), (-3, 0) を通る円

解答 (1) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ (2) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

$$(3) (x-3)^2+(y-5)^2=5 \quad (4) x^2+y^2=5$$

$$(5) x^2+y^2-2x-6y-15=0$$

$$(1) \text{ 中心と原点の距離は } \sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

これが半径に等しいから、求める円の方程式は $(x-3)^2+(y+4)^2=25$ (2) 中心と x 軸の距離 2 が半径に等しいから、求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

(3) 2 点 (1, 4), (5, 6) を結ぶ線分の中点が円の中心となる。

その座標は $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+6}{2}\right)$ すなわち (3, 5)

半径は、中心 (3, 5) と点 (1, 4) の距離であるから $\sqrt{(1-3)^2+(4-5)^2}=\sqrt{5}$

よって、求める円の方程式は $(x-3)^2+(y-5)^2=5$

(4) 中心が x 軸上にあるから、その座標を $(a, 0)$ とする。

半径は、中心 $(a, 0)$ と点 (2, 1) の距離であるから $\sqrt{(2-a)^2+1}$

ゆえに、円の方程式は、次のように表される。

$$(x-a)^2+y^2=(2-a)^2+1$$

これが点 (1, 2) を通るから $(1-a)^2+2^2=(2-a)^2+1$

これを解いて $a=0$

よって、求める円の方程式は $x^2+y^2=5$

(5) 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点 (4, -1) を通るから $4^2+(-1)^2+4l-m+n=0$

整理すると $4l-m+n+17=0$ …… ①

点 (6, 3) を通るから $6^2+3^2+6l+3m+n=0$

整理すると $6l+3m+n+45=0$ …… ②

点 (-3, 0) を通るから $(-3)^2+0^2-3l+0\cdot m+n=0$

整理すると $-3l+n+9=0$ …… ③

③ から $n=3l-9$ …… ④

④ を ① に代入して整理すると $7l-m+8=0$

よって $m=7l+8$ …… ⑤

④, ⑤ を ② に代入して整理すると

$$30l+60=0 \quad \text{ゆえに} \quad l=-2$$

このとき、⑤ から $m=-6$ ④ から $n=-15$

よって、求める円の方程式は $x^2+y^2-2x-6y-15=0$

A 13 - 6

円 $x^2+y^2=9$ …… ① について次の問いに答えよ。

(1) 円 ① 上の点 (2, $-\sqrt{5}$) における接線の方程式を求めよ。

(2) 円 ① に接する傾き -2 の接線の方程式を求めよ。

解答 (1) $2x-\sqrt{5}y=9$ (2) $y=-2x+3\sqrt{5}$, $y=-2x-3\sqrt{5}$

(1) $2\cdot x+(-\sqrt{5})\cdot y=9$ すなわち $2x-\sqrt{5}y=9$

(2) 求める接線の方程式を、 $y=-2x+b$ …… ① とおく。

① から $2x+y-b=0$

円の中心 $(0, 0)$ と直線 ① の距離は、円の半径 3 に等しいから

$$\frac{|2 \cdot 0 + 0 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3 \quad \text{すなわち} \quad |b| = 3\sqrt{5}$$

よって $b = \pm 3\sqrt{5}$

したがって、① から、求める接線の方程式は

$$y = -2x + 3\sqrt{5}, \quad y = -2x - 3\sqrt{5}$$

A 13 - 7

円 $x^2 + 6x + y^2 - 6y + 5 = 0$ 上の点 $(-1, 0)$ における接線の方程式を求めよ。

解答 $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

円の方程式を変形すると

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 13$$

よって、円の中心は $(-3, 3)$

2 点 $(-3, 3)$, $(-1, 0)$ を通る直線の傾きは

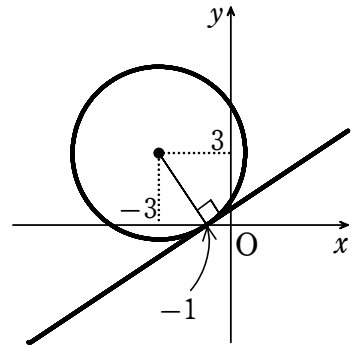
$$\frac{0-3}{-1-(-3)} = -\frac{3}{2}$$

接線の傾きを m とすると

$$m\left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \quad \text{から} \quad m = \frac{2}{3}$$

したがって、求める接線の方程式は

$$y-0 = \frac{2}{3}\{x-(-1)\} \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$



B 13 - 1

2 直線 $l : 2x - y + 3 = 0$, $m : 3x - 2y - 1 = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 直線 l , m の交点の座標を求めよ。
- (2) m 上の点 $P(3, 4)$ の、直線 l に関する対称点の座標を求めよ。
- (3) 直線 l に関して、直線 m と対称な直線の方程式を求めよ。

解答 (1) $(-7, -11)$ (2) $(-1, 6)$ (3) $17x - 6y + 53 = 0$

(1) $2x - y + 3 = 0 \cdots \cdots$ ①, $3x - 2y - 1 = 0 \cdots \cdots$ ② とする。

① $\times 2 -$ ② から $x + 7 = 0$ よって $x = -7$

① に代入して $y = 2x + 3 = 2 \cdot (-7) + 3 = -11$

ゆえに、2 直線 l , m の交点の座標は $(-7, -11)$

(2) 求める対称点を $Q(a, b)$ とする。

$$PQ \perp \ell \text{ から } \frac{b-4}{a-3} \cdot 2 = -1$$

$$\text{よって } a+2b-11=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

線分 PQ の中点は直線 ℓ 上にあるから

$$2 \cdot \frac{3+a}{2} - \frac{4+b}{2} + 3 = 0$$

$$\text{よって } 2a-b+8=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

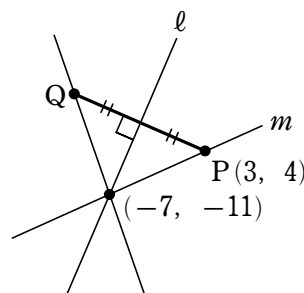
$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ を連立させて解くと } a=-1, b=6$$

したがって、求める点の座標は $(-1, 6)$

(3) 2 直線 ℓ , m の交点 $(-7, -11)$ と、(2) で求めた対称点 Q とを通る直線が求める直線である。その方程式は

$$y-6 = \frac{-11-6}{-7-(-1)} \{x-(-1)\}$$

$$\text{すなわち } 17x-6y+53=0$$



B 13 - 2

3 直線 $x-2y+9=0$, $3x+y-1=0$, $ax-y+5=0$ が三角形を作らないとき、定数 a の値を求めよ。

解答 $a = -3, \frac{1}{2}, 1$

$x-2y+9=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$, $3x+y-1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$, $ax-y+5=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$ とする。

① の傾きは $\frac{1}{2}$, ② の傾きは -3 , ③ の傾きは a

よって、3 直線 ①, ②, ③ が三角形を作らないのは、次の [1], [2] の場合がある。

[1] ③ が ① または ② と平行になる。

$$\text{① と平行になるとき } a = \frac{1}{2} \quad \text{② と平行になるとき } a = -3$$

[2] 3 直線が 1 点で交わる。

$$\text{①, ② を連立して解くと } x=-1, y=4$$

よって、2 直線 ①, ② の交点の座標は $(-1, 4)$

$$\text{この点が ③ 上にもあるとき } a \cdot (-1) - 4 + 5 = 0$$

$$\text{これを解いて } a = 1$$

したがって、求める a の値は $a = -3, \frac{1}{2}, 1$

B 13 - 3

2 直線 $2x+5y-3=0$, $5x+ky-2=0$ が平行になるとき, $k = \text{ア}$ である. また, 直交するときは, $k = \text{イ}$ で, このとき, 交点の座標は, ウ である.

解答 (ア) $\frac{25}{2}$ (イ) -2 (ウ) $\left(\frac{16}{29}, \frac{11}{29}\right)$

$2x+5y-3=0 \cdots \cdots \text{①}$, $5x+ky-2=0 \cdots \cdots \text{②}$ とする.

① と ② が平行になるとき, $k \neq 0$ で傾きが等しいことから $-\frac{2}{5} = -\frac{5}{k}$

よって $k = \text{ア}$ $\frac{25}{2}$

① と ② が垂直のとき, $k \neq 0$ であるから $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{k}\right) = -1$ よって $k = \text{イ}$ -2

このとき, ② は $5x-2y-2=0 \cdots \cdots \text{②}'$

① $\times 2 + \text{②}' \times 5$ から $29x-16=0$ よって $x = \frac{16}{29}$ ① から $y = \frac{11}{29}$

ゆえに, 交点の座標は ウ $\left(\frac{16}{29}, \frac{11}{29}\right)$

B 13 - 4

2 直線 $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$ のなす角の二等分線の方程式を求めよ.

解答 $x+3y-4=0$, $3x-y-2=0$

なす角の二等分線上の点を $P(x, y)$ とすると, 点 P と

2 直線 $2x+y-3=0$, $x-2y+1=0$ の距離が等しいから

$$\frac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|x-2y+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

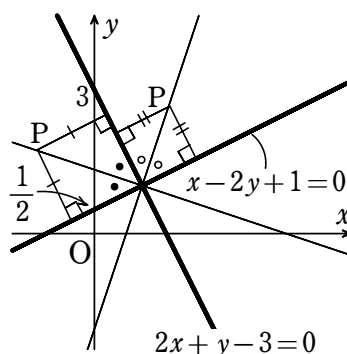
よって $2x+y-3 = \pm(x-2y+1)$

$2x+y-3 = x-2y+1$ から $x+3y-4=0$

$2x+y-3 = -(x-2y+1)$ から $3x-y-2=0$

ゆえに, 求める方程式は

$$x+3y-4=0, 3x-y-2=0$$

**B 13 - 5**

円 $x^2+y^2-10x+6y+25=0$ 上の点 P と, 直線 $x-2y+2=0$ 上の点 Q を結ぶ線分

PQ の長さの最小値を求めよ。

解答 $\frac{13\sqrt{5}-15}{5}$

円の方程式を変形すると

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9$$

よって、円の中心は点 $(5, -3)$ 、半径は 3 である。

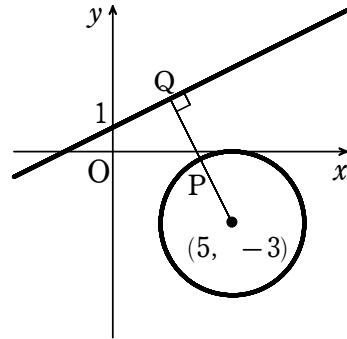
円と直線は交わらないから、線分 PQ の長さは、点 Q が円の中心から直線 $x-2y+2=0$ に下ろした垂線の足で、点 P がその垂線と円との交点にあるとき最小となる。

円の中心 $(5, -3)$ と直線 $x-2y+2=0$ の距離は

$$\frac{|5-2 \cdot (-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

よって、求める最小値は

$$(\text{円の中心と直線の距離}) - (\text{円の半径}) = \frac{13}{\sqrt{5}} - 3 = \frac{13\sqrt{5}-15}{5}$$



B 13 - 6

点 A $(3, 1)$ を通り、円 $x^2 + y^2 = 5$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答 $x+2y=5, 2x-y=5$

接点の座標を (x_1, y_1) とすると、接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = 5$$

これが点 $(3, 1)$ を通るから

$$3x_1 + y_1 = 5$$

よって $y_1 = 5 - 3x_1$ …… ①

また、点 (x_1, y_1) は円 $x^2 + y^2 = 5$ 上にあるから

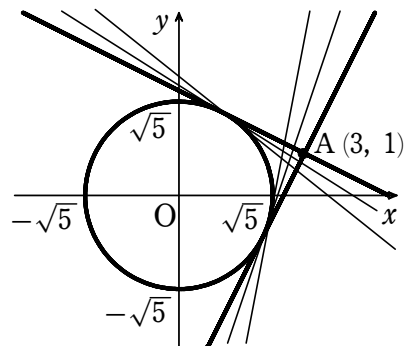
$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \quad \text{…… ②}$$

① を ② に代入して $x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 = 5$

整理すると $x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$ ゆえに $x_1 = 1, 2$

① から $x_1 = 1$ のとき $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ のとき $y_1 = -1$

したがって、接線の方程式は $x + 2y = 5, 2x - y = 5$



B 13 - 7

円 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ と直線 $\ell: y = -x + k$ が異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ。また、 ℓ が C によって切り取られてできる線分の長さが 2 となるとき、 k の値を求めよ。

解答 $1 < k < 5$, $k = 3 \pm \sqrt{2}$

円の方程式を変形すると $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$

よって、 C の中心は点 $(2, 1)$ 、半径は $\sqrt{2}$ である。

また、 $y = -x + k$ を変形すると $x + y - k = 0$

C の中心と ℓ の距離は $\frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|3 - k|}{\sqrt{2}}$

C と ℓ が異なる 2 点で交わる時

$$\frac{|3 - k|}{\sqrt{2}} < \sqrt{2} \quad \text{よって} \quad |k - 3| < 2$$

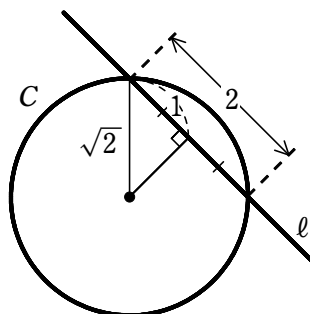
すなわち $-2 < k - 3 < 2$ したがって $1 < k < 5$

円 C によって切り取られてできる線分の長さが 2 となる時、 C の中心と直線 ℓ の距離は

$$\sqrt{(C \text{ の半径})^2 - 1^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

$$\text{よって} \quad \frac{|3 - k|}{\sqrt{2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad |k - 3| = \sqrt{2}$$

$$\text{すなわち} \quad k - 3 = \pm \sqrt{2} \quad \text{したがって} \quad k = 3 \pm \sqrt{2}$$



B 13 - 8

曲線 $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 0$ を P 、 P を x 軸の正の向きに a 、 y 軸の正の向きに b だけ平行移動したものを P' とする。曲線 P と P' が共有点をもつとき a, b の満たす条件は

$a^2 + b^2 \leq \text{ア}$ である。更に、 P と P' の 2 つの交点 A, B を通る直線 l の方程式が

$x + y = -6$ であれば $a = \text{イ}$, $b = \text{ウ}$ である。

解答 (ア) 100 (イ) 1 (ウ) 1

曲線 P の方程式 $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 0$ を変形すると $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$

よって、 P は中心が点 $(-3, -4)$ 、半径が 5 の円である。また、 P' は中心が

点 $(a-3, b-4)$ 、半径が 5 の円である。

半径の等しい 2 円 P, P' が共有点をもつ条件は (中心間の距離) $\leq$ (半径の和)

であるから $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 10$ よって $a^2 + b^2 \leq \text{ア} 100$

2 点 A, B はともに P, P' 上にあるから、 A, B は次の方程式の表す図形上にもある。

$$x^2 + 6x + y^2 + 8y - \{(x-a)^2 + 6(x-a) + (y-b)^2 + 8(y-b)\} = 0$$

整理すると $2ax + 2by = a^2 - 6a + b^2 - 8b$

これは、 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき、2 点 A, B を通る直線を表す。

よって、直線 $x + y = -6$ に一致すると $\frac{2a}{1} = \frac{2b}{1} = \frac{a^2 - 6a + b^2 - 8b}{-6}$

$b = a$ を $a^2 - 6a + b^2 - 8b = -12a$ に代入して $a(a-1) = 0$

$a = 0$ とすると $b = 0$ となり、条件を満たさない。

よって、 $a \neq 0$ から $a = 1, b = 1$

C 13 - 1

次の 2 直線のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $x - 2y + 4 = 0, 3x - y - 3 = 0$

(2) $y = x + 1, y = (-2 + \sqrt{3})x$

解答 (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (2) $\theta = \frac{\pi}{3}$

(1) $x - 2y + 4 = 0$ から $y = \frac{1}{2}x + 2$

$3x - y - 3 = 0$ から $y = 3x - 3$

図のように、 x 軸の正の部分から 2 直線まで

測った角を、それぞれ α, β とすると、

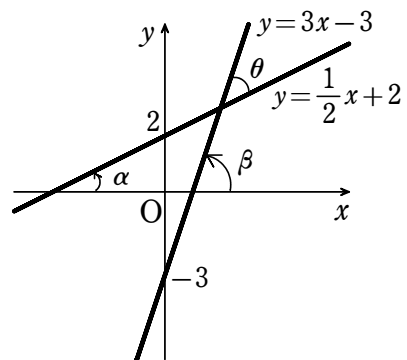
$\theta = \beta - \alpha$ である。

$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = 3$ であるから

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\theta = \frac{\pi}{4}$



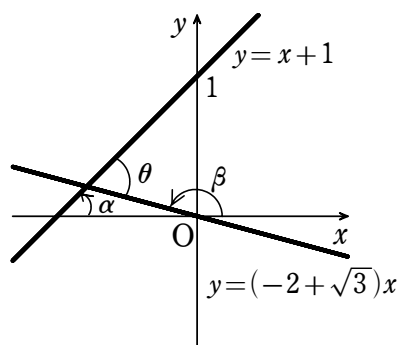
- (2) 図のように、 x 軸の正の部分から 2 直線まで測った角を、それぞれ α , β とすると、
 $\theta = \pi - (\beta - \alpha)$ である。

$\tan \alpha = 1$, $\tan \beta = -2 + \sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{(-2 + \sqrt{3}) - 1}{1 + (-2 + \sqrt{3}) \cdot 1} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって $\tan \theta = \tan\{\pi - (\beta - \alpha)\} = -\tan(\beta - \alpha) = \sqrt{3}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $\theta = \frac{\pi}{3}$



C 13 - 2

平面上に 2 点 $A(-1, 3)$, $B(5, 11)$ がある。

- (1) 直線 $y = 2x$ に関して、点 A と対称な点 P の座標を求めよ。
 (2) 点 Q が直線 $y = 2x$ 上にあるとき、 $QA + QB$ を最小にする点 Q の座標を求めよ。

解答 (1) $(3, 1)$ (2) $\left(\frac{14}{3}, \frac{28}{3}\right)$

- (1) 直線 $y = 2x$ を ℓ とし、点 P の座標を (p, q) とする。

$AP \perp \ell$ であるから、 $p \neq -1$ で

$$\frac{q-3}{p+1} \cdot 2 = -1$$

ゆえに $p + 2q = 5$ …… ①

線分 AP の中点 $\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q+3}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{q+3}{2} = 2 \cdot \frac{p-1}{2}$$

ゆえに $2p - q = 5$ …… ②

①, ② を解いて $p = 3$, $q = 1$

よって、点 P の座標は $(3, 1)$

(2) 右の図のように、2 点 A, B は、直線 ℓ に関して
同じ側にある。

$$\begin{aligned} \text{ここで } QA + QB &= QP + QB \\ &\geq PB \end{aligned}$$

であるから、3 点 P, Q, B が 1 つの直線上にあると
き、 $QA + QB$ は最小になる。

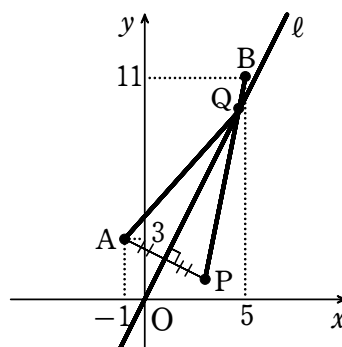
また、直線 PB の方程式は

$$y - 1 = \frac{11 - 1}{5 - 3}(x - 3)$$

$$\text{すなわち } y = 5x - 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ と } y = 2x \text{ を連立して解くと } x = \frac{14}{3}, y = \frac{28}{3}$$

$$\text{よって、求める点 } Q \text{ の座標は } \left(\frac{14}{3}, \frac{28}{3} \right)$$



C 13 - 3

定数 k がどんな値をとっても、

$$(k+3)x - (k-4)y = 5k+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の表す直線はある定点を通る。この定点の座標を求めよ。また、①は、この定点を通るすべての直線を表すことができるかどうかを述べよ。

解答 (3, -2)

① を k について整理すると

$$k(x-y-5) + (3x+4y-1) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

k がどんな値をとっても ①' が成り立つ条件は

$$x - y - 5 = 0, \quad 3x + 4y - 1 = 0$$

これを解くと $x = 3, y = -2$

よって、求める定点の座標は (3, -2)

別解 $k = -3$ としてみると $7y = -14$ すなわち $y = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$k = 4$ としてみると $7x = 21$ すなわち $x = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

この 2 直線 ②, ③ の交点は (3, -2)

逆に、(3, -2) が ① を満たすかどうかは

$$(\text{左辺}) = (k+3) \cdot 3 - (k-4) \cdot (-2) = 5k+1, \quad (\text{右辺}) = 5k+1$$

で成り立つ。すなわち、① は常に定点 (3, -2) を通る。

C 13 - 4

3 直線 $x - y + 1 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$ の囲む三角形の外接円の中心 (外心) の座標と半径を求めよ。

解答 中心の座標は $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, 半径は $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

三角形の頂点の座標は, 連立方程式

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

を解いて $A(-2, -1)$ $B(4, 1)$ $C(1, 2)$

求める外接円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とする。

これが 3 点 A, B, C を通るから

$$5 - 2l - m + n = 0, \quad 17 + 4l + m + n = 0, \quad 5 + l + 2m + n = 0$$

この連立方程式を解くと $l = -3, m = 3, n = -8$

よって, 外接円の方程式は $x^2 + y^2 - 3x + 3y - 8 = 0$

変形すると $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$

ゆえに, 中心の座標は $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, 半径は $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

C 13 - 5

2 つの円 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 5 = 0$ について

(1) 2 円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2) 2 円の 2 つの交点および点 $(1, 3)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答 (1) $x + 2y - 3 = 0$ (2) $4x^2 + 4y^2 - 5x - 10y - 5 = 0$

k を定数とし, 次の方程式を考える。

$$k(x^2 + y^2 - 5) + (x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① は 2 円の 2 つの交点を通る直線または曲線を表す。

(1) ① で $k = -1$ とすると $-2x - 4y + 6 = 0$

これは, x, y の 1 次方程式で直線を表す。

よって, 求める方程式は $x + 2y - 3 = 0$

(2) ① が点 $(1, 3)$ を通るとして, $x = 1, y = 3$ を代入すると

$$5k - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{3}{5}$$

① に代入して整理すると $4x^2 + 4y^2 - 5x - 10y - 5 = 0$

これは円を表すから、求める方程式である。

注意 上の答えは、設問で与えられた 2 つの円が 2 点で交わることが前提となっている。

よって、そのことを確認しておく。

$x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ をそれぞれ変形すると

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2, \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

中心 $(0, 0)$, $(1, 2)$ の間の距離は $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{5} - 2 < \sqrt{5} < \sqrt{5} + 2$ であるから、2 円は 2 点で交わる。

C 13 - 6

円 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ と円 $x^2 + y^2 = 4$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 円の共通接線は全部で何本あるか。
- (2) 2 円の共通接線のうち接点がすべて第 1 象限にあるものの方程式を求めよ。

解答 (1) 4 本 (2) $x + 2\sqrt{6}y = 10$

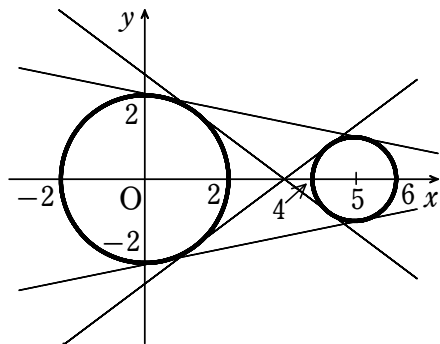
- (1) 円 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ の中心の座標は $(5, 0)$,
半径は 1, 円 $x^2 + y^2 = 4$ の中心の座標は $(0, 0)$,
半径は 2 である。

2 円の中心間の距離は 5 であり、

(2 円の半径の和) < (中心間の距離)

が成り立つから、2 円は離れている。

したがって、共通接線は 4 本ある。



- (2) 共通接線の、円 $x^2 + y^2 = 4$ との接点の座標を (x_1, y_1) ($x_1 > 0, y_1 > 0$) とすると、
接線の方程式は $x_1x + y_1y = 4$ …… ①

円 $(x-5)^2 + y^2 = 1$ の中心 $(5, 0)$ と、この接線の距離は円の半径 1 と等しいから

$$\frac{|5x_1 - 4|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = 1 \quad \dots\dots ②$$

$x_1^2 + y_1^2 = 4$ であるから $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{4} = 2$

よって、② から $|5x_1 - 4| = 2$ ゆえに $x_1 = \frac{6}{5}, \frac{2}{5}$

図から $x_1 = \frac{2}{5}$ が共通外接線の接点の x 座標である。このとき

$$y_1^2 = 4 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{96}{25} \quad y_1 > 0 \text{ であるから} \quad y_1 = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

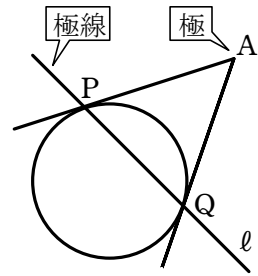
よって、求める共通接線の方程式は、① から

$$\frac{2}{5}x + \frac{4\sqrt{6}}{5}y = 4 \quad \text{すなわち} \quad x + 2\sqrt{6}y = 10$$

C 13 - 7

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 外の点 $A(p, q)$ からこの円に引いた 2 本の接線の接点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。

このとき、直線 ℓ を点 A に関する円の極線といい、 A を極という。



【解答】 ① 略 ② 略

(① の証明) $A(p, q)$ とする。

点 A に関する円の極線の方程式は $px + qy = r^2$

これが他の点 $B(s, t)$ を通るとき $ps + qt = r^2$ …… (A)

また、点 $B(s, t)$ に関する極線は $sx + ty = r^2$

(A) の式から、この直線は点 $A(p, q)$ を通る。

(② の証明) $A(p, q), B(s, t), C(u, v)$ とする。

点 A, B に関する円の極線の方程式は、それぞれ

$$px + qy = r^2, \quad sx + ty = r^2$$

この 2 直線が点 C を通るならば

$$pu + qv = r^2, \quad su + tv = r^2 \quad \dots\dots (B)$$

また、点 C に関する円の極線は $ux + vy = r^2$

(B) により、この直線は 2 点 $A(p, q), B(s, t)$ を通る。

したがって、点 C に関する極線は直線 AB である。

C 13 - 8

$10x^2 + kxy + 2y^2 - 9x - 4y + 2 = 0$ が 2 直線を表すときの k の値を求めよ。

【解答】 $k = 9$

$P = 10x^2 + kxy + 2y^2 - 9x - 4y + 2$ とすると

$$P = 10x^2 + (ky - 9)x + 2y^2 - 4y + 2$$

$P = 0$ が 2 直線を表すから、 P は 1 次式の積に因数分解できる。

$P=0$ を x についての 2 次方程式と考えて、その解を求めると

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(ky-9) \pm \sqrt{(ky-9)^2 - 4 \cdot 10(2y^2 - 4y + 2)}}{2 \cdot 10} \\ &= \frac{-ky + 9 \pm \sqrt{(k^2 - 80)y^2 - 2(9k - 80)y + 1}}{20} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

この 2 つの解を α, β とすると $P = 10(x - \alpha)(x - \beta)$

したがって、 P が 1 次式の積に因数分解できるためには、 α, β が y の 1 次式でなければならない。ゆえに、根号内の式を $Q(y)$ とすると、 $Q(y)$ が y について完全平方式または正の定数でなければならない。ところが、 $k^2 - 80 = 0$ と $9k - 80 = 0$ は同時に成り立たないから、 $Q(y)$ は定数となりえない。

よって、 $Q(y) = 0$ の判別式を D とすると、 $D = 0$ である。

$$\frac{D}{4} = (9k - 80)^2 - (k^2 - 80) \cdot 1 = 80(k^2 - 18k + 81) = 80(k - 9)^2$$

$D = 0$ から $80(k - 9)^2 = 0$ したがって $k = 9$

第 14 章 図形と式 (2)

A 14 - 1

不等式 $(2x - y - 3)(x - y + 1) \leq 0$ の表す領域を図示せよ。

解答 [図] 境界線を含む

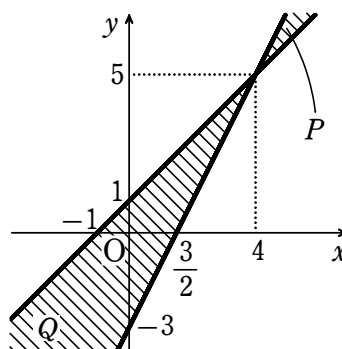
不等式 $(2x - y - 3)(x - y + 1) \leq 0$ が成り立つことは、連立不等式

$$\begin{cases} 2x - y - 3 \geq 0 \\ x - y + 1 \leq 0 \end{cases} \dots\dots ①$$

または $\begin{cases} 2x - y - 3 \leq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases} \dots\dots ②$

が成り立つことと同じである。

よって、求める領域は、①の表す領域 P と ②の表す領域 Q の和集合で、右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



A 14 - 2

2点 $A(6, 1)$ 、 $B(0, 1)$ からの距離の比が $2 : 1$ である点 P の軌跡を求めよ。

解答 中心が点 $(-2, 1)$ 、半径が 4 の円

点 P の座標を (x, y) とする。

$$AP : BP = 2 : 1 \text{ から } AP = 2BP$$

$$\text{両辺を 2 乗すると } AP^2 = 4BP^2 \dots\dots ①$$

$$\text{また } AP^2 = (x - 6)^2 + (y - 1)^2$$

$$BP^2 = x^2 + (y - 1)^2$$

$$\text{これらを ① に代入すると } (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 4\{x^2 + (y - 1)^2\}$$

$$\text{整理すると } 3x^2 + 3y^2 + 12x - 6y - 33 = 0$$

$$\text{両辺を 3 で割って } x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$$

$$\text{よって } (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4^2 \dots\dots ②$$

逆に、円 ② 上のすべての点は、条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は、中心が点 $(-2, 1)$ 、半径が 4 の円である。

A 14 - 3

x, y が 4 つの不等式 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 、 $x - 3y \geq -6$ 、 $3x + y \leq 12$ を同時に満たすとき、

$x+3y$ の最大値と最小値を求めよ。

解答 $x=3, y=3$ のとき最大値 12, $x=0, y=0$ のとき最小値 0

与えられた連立不等式の表す領域を D とすると, D は 4 点 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(3, 3)$, $(0, 2)$ を頂点とする四角形の周および内部である。

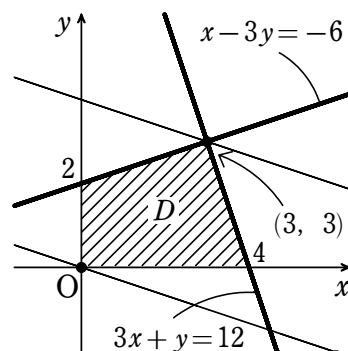
$x+3y=k$ …… ① とおくと, ① は傾きが $-\frac{1}{3}$, y 軸上

の切片が $\frac{k}{3}$ の直線を表す。

この直線 ① が領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から, k の値は, 直線 ① が点 $(3, 3)$ を通るとき, 最大になり, 点 $(0, 0)$ を通るとき, 最小になる。

よって, $x+3y$ は $x=3, y=3$ のとき最大値 12 をとり, $x=0, y=0$ のとき最小値 0 をとる。



A 14 - 4

方程式 $x^2 + y^2 - 4kx + (6k-2)y + 14k^2 - 8k + 1 = 0$ が円を表すとき

(1) 定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) k の値がこの範囲で変化するとき, 円の中心の軌跡を求めよ。

解答 (1) $0 < k < 2$ (2) 直線 $y = -\frac{3}{2}x + 1$ の $0 < x < 4$ の部分

(1) $x^2 + y^2 - 4kx + (6k-2)y + 14k^2 - 8k + 1 = 0$ から

$$(x-2k)^2 + \{y+(3k-1)\}^2 = -k^2 + 2k$$

これが円を表すための条件は $-k^2 + 2k > 0$

よって $k(k-2) < 0$ したがって $0 < k < 2$

(2) 円の中心の座標を (x, y) とすると

$$x = 2k, \quad y = -3k + 1 \quad (0 < k < 2)$$

k を消去すると $y = -\frac{3}{2}x + 1$

$0 < k < 2$ であるから $0 < 2k < 4$ すなわち $0 < x < 4$

よって, 求める軌跡は 直線 $y = -\frac{3}{2}x + 1$ の $0 < x < 4$ の部分

B 14 - 1

平面上の 2 点を $A(2, 2)$, $B(4, 3)$ とする。点 P が放物線 $y = -x^2 + 2x - 3$ 上を動くとき、 $\triangle PAB$ の面積の最小値を求めよ。

解答 $\frac{55}{16}$

$P(t, -t^2 + 2t - 3)$ とおく。

直線 AB の方程式は

$$y - 2 = \frac{3-2}{4-2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad x - 2y + 2 = 0$$

また $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$

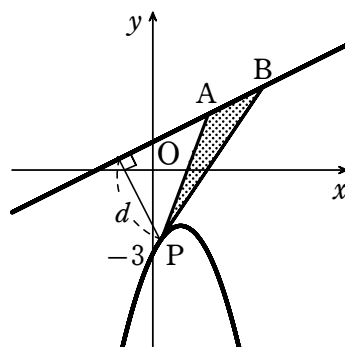
点 P と直線 AB の距離 d は

$$\begin{aligned} d &= \frac{|t - 2(-t^2 + 2t - 3) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{|2t^2 - 3t + 8|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{55}{8} \right| \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{55}{8\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって、 d は $t = \frac{3}{4}$ で最小値 $\frac{55}{8\sqrt{5}}$ をとる。

このとき、 $\triangle PAB$ の面積 S は最小で $S = \frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{55}{8\sqrt{5}} = \frac{55}{16}$

参考 面積が最小になるときの P の座標は $\left(\frac{3}{4}, -\frac{33}{16}\right)$

**B 14 - 2**

不等式 $x^2 + y^2 \leq 5$ を満たす x, y に対して、 $x + y$ の最大値、最小値を求めよ。

解答 $x = \frac{\sqrt{10}}{2}, y = \frac{\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{10}$,

$x = -\frac{\sqrt{10}}{2}, y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ のとき最小値 $-\sqrt{10}$

不等式 $x^2 + y^2 \leq 5$ の表す領域を A とする。

領域 A は、円 $x^2 + y^2 = 5$ およびその内部である。

$$x + y = k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、 $\textcircled{1}$ は傾きが -1 、 y 切片が k である直線を表す。

図から、直線 $\textcircled{1}$ が第 1 象限で円 $x^2 + y^2 = 5$ に接するとき、 k の値は最大となる。

また、直線 $\textcircled{1}$ が第 3 象限で円 $x^2 + y^2 = 5$ に接するとき、 k の値は最小となる。

$$\textcircled{1} \text{ から } y = -x + k$$

$$\text{これを } x^2 + y^2 = 5 \text{ に代入して } x^2 + (-x + k)^2 = 5$$

$$\text{よって } 2x^2 - 2kx + k^2 - 5 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 2(k^2 - 5) = -(k^2 - 10)$$

直線 $\textcircled{1}$ が円に接するのは $D=0$ のときであるから $k^2 - 10 = 0$

$$\text{よって } k = \pm\sqrt{10}$$

ここで、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ から

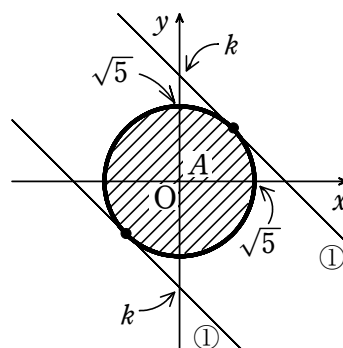
$$k = \sqrt{10} \text{ のとき } x = \frac{\sqrt{10}}{2}, y = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$k = -\sqrt{10} \text{ のとき } x = -\frac{\sqrt{10}}{2}, y = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

したがって、 $x + y$ は

$$x = \frac{\sqrt{10}}{2}, y = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ のとき最大値 } \sqrt{10},$$

$$x = -\frac{\sqrt{10}}{2}, y = -\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ のとき最小値 } -\sqrt{10} \text{ をとる。}$$



B 14 - 3

次の問いに答えよ。

(1) 点 Q が放物線 $y = x^2$ 上を動くとき、点 $A(2, -2)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ を $1:2$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 Q が円 $x^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき、点 $A(4, 2)$ に関して点 Q と対称な点 P の軌跡を求めよ。

解答 (1) 放物線 $y=3x^2-8x+4$ (2) 点 (8, 4) を中心とする半径 2 の円

(1) 点 Q は放物線 $y=x^2$ 上にあるから、Q の座標を (s, t) とすると

$$t=s^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また、点 P は線分 AQ を 1:2 に内分する点であるから、P の座標を (x, y) とすると

$$x=\frac{2\cdot 2+s}{1+2}, \quad y=\frac{2\cdot(-2)+t}{1+2}$$

$$\text{すなわち} \quad s=3x-4, \quad t=3y+4$$

これらを ① に代入して $3y+4=(3x-4)^2$

$$\text{整理すると} \quad y=3x^2-8x+4$$

よって、点 P は放物線 $y=3x^2-8x+4$ 上にある。

逆に、この放物線上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は、放物線 $y=3x^2-8x+4$ である。

(2) 点 Q は円 $x^2+y^2=4$ 上にあるから、Q の座標を (s, t) とすると

$$s^2+t^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また、点 A は線分 PQ の中点であるから、P の座標を (x, y) とすると

$$4=\frac{x+s}{2}, \quad 2=\frac{y+t}{2}$$

$$\text{すなわち} \quad s=-x+8, \quad t=-y+4$$

これらを ① に代入して

$$(-x+8)^2+(-y+4)^2=4$$

$$\text{整理すると} \quad (x-8)^2+(y-4)^2=4$$

よって、点 P は円 $(x-8)^2+(y-4)^2=4$ 上にある。

逆に、この円上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は、点 (8, 4) を中心とする半径 2 の円である。

B 14 - 4

放物線 $y=(x-3)^2$ と直線 $y=mx$ が異なる 2 点 A, B で交わっている。 m の値が変化するとき、線分 AB の中点 P の軌跡を求めよ。

解答 放物線 $y=2x^2-6x$ の $x<-3$, $3<x$ の部分

$y=(x-3)^2$ と $y=mx$ から y を消去して整理すると

$$x^2-(m+6)x+9=0 \quad \cdots \cdots ①$$

判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (m+6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \\ &= m^2 + 12m = m(m+12) \end{aligned}$$

放物線と直線が異なる 2 点で交わるのは、 $D > 0$ の

ときであるから $m(m+12) > 0$

ゆえに $m < -12$, $0 < m \quad \cdots \cdots ②$

2 つの交点 A, B の x 座標をそれぞれ α , β とする。

α , β は ① の異なる 2 つの実数解であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = m + 6$$

よって、中点 P の座標を (x, y) とすると

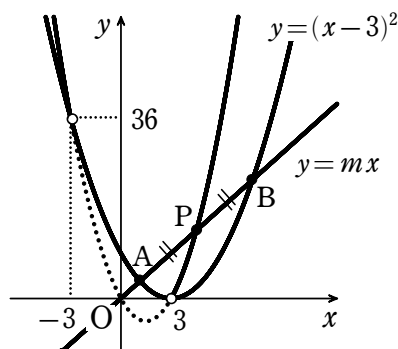
$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{m + 6}{2} \quad \cdots \cdots ③ \quad \text{また} \quad y = mx \quad \cdots \cdots ④$$

③ から $m = 2x - 6 \quad \cdots \cdots ⑤$

⑤ を ④ に代入して $y = (2x - 6)x$ すなわち $y = 2x^2 - 6x$

⑤ を ② に代入して $2x - 6 < -12$, $0 < 2x - 6$ すなわち $x < -3$, $3 < x$

よって、求める軌跡は 放物線 $y = 2x^2 - 6x$ の $x < -3$, $3 < x$ の部分



B 14 - 5

2 点 A (4, 0), B (2, 0) と円 $x^2 + y^2 = 9$ 上の動点とでできる三角形の重心 G の軌跡を求めよ。

解答 円 $(x-2)^2 + y^2 = 1$, 点 (3, 0), (1, 0) は除く

円 $x^2 + y^2 = 9$ 上の動点を P とし、その座標を (s, t) と

すると $s^2 + t^2 = 9 \quad \cdots \cdots ①$

点 G は $\triangle ABP$ の重心であるから、その座標を (x, y)

とすると $x = \frac{4+2+s}{3}$, $y = \frac{0+0+t}{3}$

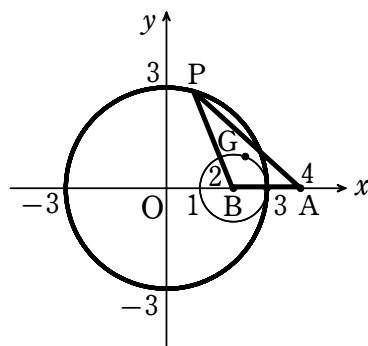
ゆえに $s = 3x - 6$, $t = 3y$

これを ① に代入すると $(3x-6)^2 + (3y)^2 = 9$

よって $(x-2)^2 + y^2 = 1$

ただし、点 P が直線 AB 上にあるとき、図形 ABP は三角形にならない。

したがって、点 P の軌跡は 円 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ ただし、点 (3, 0), (1, 0) は除く。



B 14 - 6

m の値が変化するとき、次の 2 直線の交点 P の軌跡を求めよ。

$$x - my + 1 = 0, \quad (m + 1)x - my + 2 = 0$$

解答 放物線 $y = -x^2 - x$ から点 $(0, 0)$ を除いた図形

2 直線の方程式を変形して

$$x + 1 = my \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x + 2 = -m(x - y) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

点 P の座標を (x, y) とすると、 (x, y) は $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を満たす。

[1] $y \neq 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ から $m = \frac{x+1}{y}$

これを $\textcircled{2}$ に代入して $x + 2 = -\frac{x+1}{y}(x - y)$

よって $y = -x^2 - x \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{3}$ で $y = 0$ とすると $x = 0, -1$

したがって、 $y \neq 0$ のとき、点 $P(x, y)$ は、放物線 $\textcircled{3}$ から 2 点 $(0, 0)$, $(-1, 0)$ を除いた図形上にある。

[2] $y = 0$ のとき、 $\textcircled{1}$ から $x = -1$

$x = -1, y = 0$ を $\textcircled{2}$ に代入すると $m = 1$

よって、点 $(-1, 0)$ は、 $m = 1$ のときの 2 直線の交点である。

[1], [2] より、点 P の軌跡は、放物線 $y = -x^2 - x$ から点 $(0, 0)$ を除いた図形である。

別解 $x - my + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad (m + 1)x - my + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ とする。

$\textcircled{1}$ で $m = 0$ とすると $x + 1 = 0$

$\textcircled{2}$ で $m = 0$ とすると $x + 2 = 0$

これを同時に満たす x の値は存在しないから、 $m = 0$ のとき、2 直線 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の交点は存在しない。よって、 $m \neq 0$ である。

このとき、 $\textcircled{1}$ から $x = my - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$ に代入して y について整理すると $m^2 y = m - 1$

$m \neq 0$ であるから $y = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

これを $\textcircled{3}$ に代入して $x = -\frac{1}{m} \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ から m を消去すると $y = -x^2 - x$

ただし、 $\textcircled{5}$ より、 $x = 0$ となることはないから、点 $(0, 0)$ は除く。

よって、点 P の軌跡は、放物線 $y = -x^2 - x$ から点 $(0, 0)$ を除いた図形である。

B 14 - 7

a がすべての実数値をとって変化するとき、放物線 $y = x^2 + ax + a^2$ が通らない領域を図示せよ。

解答 [図] 境界線を含まない

$y = x^2 + ax + a^2$ を a について整理すると

$$a^2 + xa + x^2 - y = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

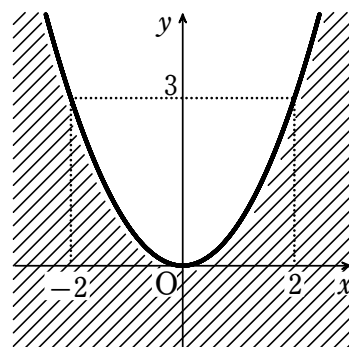
放物線 $y = x^2 + ax + a^2$ が点 (x, y) を通らない条件は、方程式 ① を満たす実数 a が存在しないことである。

よって、 a についての 2 次方程式 ① の判別式を D とすると $D = x^2 - 4(x^2 - y) < 0$

したがって $y < \frac{3}{4}x^2$

よって、求める領域は [図] の斜線部分である。

ただし、境界線を含まない。

**C 14 - 1**

点 (x, y) が、不等式 $(x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ の表す領域上を動くとき、次の式の最大値、最小値を求めよ。

(1) $\frac{y}{x}$

(2) $x^2 + y^2$

解答 (1) $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{9}{5}$ のとき最大値 $\frac{3}{4}$; $x = 3$, $y = 0$ のとき最小値 0

(2) $x = 3 + \frac{3}{\sqrt{10}}$, $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき最大値 $11 + 2\sqrt{10}$;

$x = 3 - \frac{3}{\sqrt{10}}$, $y = 1 - \frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき最小値 $11 - 2\sqrt{10}$

与えられた不等式の表す領域は、右の図の斜線部分である。

ただし、境界線を含む。

(1) $\frac{y}{x} = k$ とおくと、 $y = kx$ …… ①

① は原点を通り、傾き k の直線を表す。図から、直線 ① が円 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ に接するとき、 k の値は最大、最小となる。

接するとき、円の中心 $(3, 1)$ と直線 ① の距離が

円の半径 1 に等しいから $\frac{|k \cdot 3 - 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 1$

分母を払うと $|3k - 1| = \sqrt{k^2 + 1}$ 両辺を 2 乗して $(3k - 1)^2 = k^2 + 1$

ゆえに $4k^2 - 3k = 0$ よって $k = 0, \frac{3}{4}$

$k = 0$ のとき、接点の座標は $(3, 0)$

$k = \frac{3}{4}$ のとき、① は $y = \frac{3}{4}x$ …… ②

また、円の中心 $(3, 1)$ を通り、直線 ② に垂直な直線の方程式は

$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3)$ すなわち $y = -\frac{4}{3}x + 5$ …… ③

接点は、2 直線 ②、③ の交点であるから、その座標は $(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$

以上から $x = \frac{12}{5}, y = \frac{9}{5}$ のとき最大値 $\frac{3}{4}$; $x = 3, y = 0$ のとき最小値 0

(2) $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) …… ④ とおく。

④ は、原点を中心とし、半径 r の円を表す。

図から、2 円が内接するとき、 r^2 の値は最大となる。このとき、2 円の中心間の距離は

$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

であるから $r - 1 = \sqrt{10}$

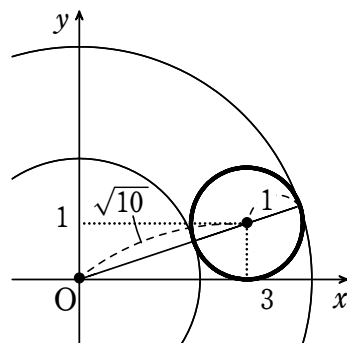
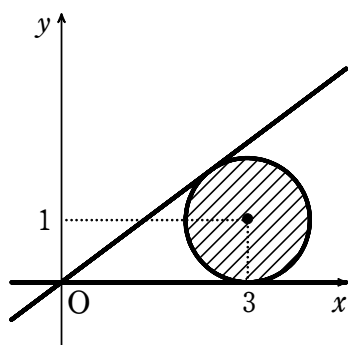
よって $r^2 = (\sqrt{10} + 1)^2 = 11 + 2\sqrt{10}$

また、2 円が外接するとき、 r^2 の値は最小となる。

このとき $r + 1 = \sqrt{10}$

よって $r^2 = (\sqrt{10} - 1)^2 = 11 - 2\sqrt{10}$

接点は、円 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ と直線 $y = \frac{1}{3}x$



の交点である。

円と直線の式から x を消去すると $(3y-3)^2+(y-1)^2=1$

すなわち $10(y-1)^2=1$ ゆえに $y=1\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

このとき $x=3y=3\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ (複号同順)

以上から $x=3+\frac{3}{\sqrt{10}}, y=1+\frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき 最大値 $11+2\sqrt{10}$

$x=3-\frac{3}{\sqrt{10}}, y=1-\frac{1}{\sqrt{10}}$ のとき 最小値 $11-2\sqrt{10}$

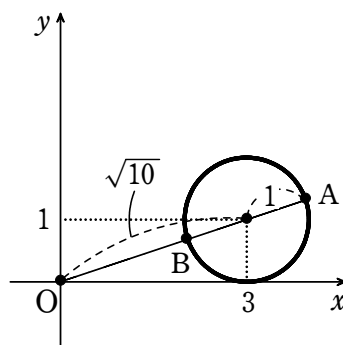
別解 x^2+y^2 は、原点と点 (x, y) の距離の 2 乗を表す。右の図のように、円上の点で、原点 O から最も遠い点を A 、最も近い点を B とすると、

$$OA = \sqrt{3^2+1^2} + 1 = \sqrt{10} + 1$$

$$OB = \sqrt{3^2+1^2} - 1 = \sqrt{10} - 1$$

よって、最大値は $(\sqrt{10}+1)^2=11+2\sqrt{10}$

最小値は $(\sqrt{10}-1)^2=11-2\sqrt{10}$



C 14 - 2

直線 $y=ax+b$ が 2 点 $P(1, -1)$, $Q(2, 1)$ の間を通るとき、点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

解答 〔図〕 境界線を含まない

条件を満たすのは、2 点 P, Q のうち、一方が直線 $y=ax+b$ の上側、他方が下側にあるときである。

よって $(-1 > a \cdot 1 + b \text{ かつ } 1 < a \cdot 2 + b)$

または

$$(-1 < a \cdot 1 + b \text{ かつ } 1 > a \cdot 2 + b)$$

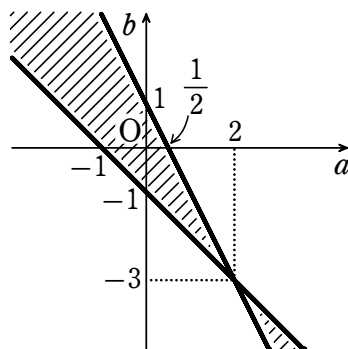
したがって

$$\begin{cases} a+b+1 < 0 \\ 2a+b-1 > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a+b+1 > 0 \\ 2a+b-1 < 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} b < -a-1 \\ b > -2a+1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b > -a-1 \\ b < -2a+1 \end{cases}$$

したがって、点 (a, b) の存在範囲は [図] の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



参考 $f(x, y) = ax - y + b$ とおく。

直線 $y = ax + b$ すなわち $f(x, y) = 0$ により平面は 2 つの領域 $f(x, y) > 0$, $f(x, y) < 0$ に分けられる。

P, Q がそれぞれ別の領域に属すればよいので

$$\begin{cases} f(1, -1) < 0 \\ f(2, 1) > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} f(1, -1) > 0 \\ f(2, 1) < 0 \end{cases}$$

C 14 - 3

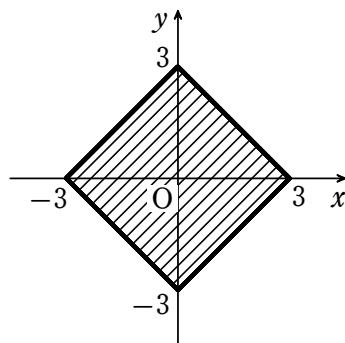
- (1) 不等式 $|x| + |y| \leq 3$ の表す領域を図示せよ。
- (2) 実数 x, y は方程式 $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ を満たすとする。このとき、 $t = |x| + |y|$ の最大値を求めよ。

解答 (1) [図] 境界線を含む

$$(2) 1 + 3\sqrt{2}$$

- (1) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき $x + y \leq 3$
- $x < 0, y \geq 0$ のとき $-x + y \leq 3$
- $x < 0, y < 0$ のとき $-x - y \leq 3$
- $x \geq 0, y < 0$ のとき $x - y \leq 3$

よって、求める領域は右の図の斜線部分。ただし、境界線を含む。



- (2) 方程式 $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ を変形すると

$$x^2 + (y-1)^2 = 3^2$$

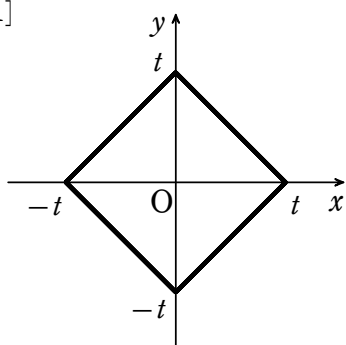
これは中心 $(0, 1)$ 、半径 3 の円を表す。

一方、 t を正の定数とすると、方程式 $|x| + |y| = t$ は下の図 [1] のような、4 点 $(0, t)$, $(t, 0)$, $(-t, 0)$, $(0, -t)$ を頂点とする正方形の周を表す。

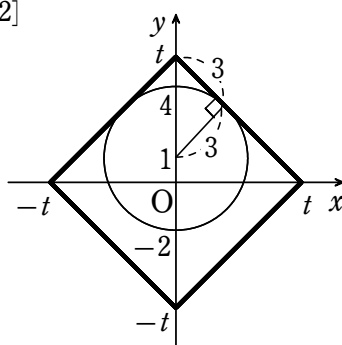
t が最大となるのは、円 $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ と正方形 $|x| + |y| = t$ が、下の図 [2] の

ように第 1 象限で接するときである。

[1]



[2]



このとき、点 $(0, 1)$ と直線 $x + y - t = 0$ の距離が 3 であるから

$$\frac{|1 - t|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3 \quad \text{よって} \quad t = 1 \pm 3\sqrt{2}$$

$t > 0$ であるから、 t の最大値は $1 + 3\sqrt{2}$

C 14 - 4

実数 a, b が $a^2 + b^2 + a + b = 1$ を満たしながら変わるとき、点 $(a + b, ab)$ はどんな曲線を描くか。

解答 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ただし、 $-1 - \sqrt{3} \leq x \leq -1 + \sqrt{3}$

点 $(a + b, ab)$ を (x, y) とすると $x = a + b, y = ab$

よって $a^2 + b^2 + a + b = (a + b)^2 + (a + b) - 2ab$ から

$$x^2 + x - 2y - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}(x^2 + x - 1) \dots\dots ①$$

また a, b は 2 次方程式 $t^2 - (a + b)t + ab = 0$ すなわち $t^2 - xt + y = 0$ の 2 つの実数解であるから、判別式を D とすると

$$D = (-x)^2 - 4y \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad y \leq \frac{1}{4}x^2 \dots\dots ②$$

$$①, ② \text{ から } \frac{1}{2}(x^2 + x - 1) \leq \frac{1}{4}x^2$$

整理すると $x^2 + 2x - 2 \leq 0$

これを解くと $-1 - \sqrt{3} \leq x \leq -1 + \sqrt{3}$

したがって 求める曲線は $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ただし $-1 - \sqrt{3} \leq x \leq -1 + \sqrt{3}$

C 14 - 5

実数 m が変化するとき、直線 $y = mx$ と円 $(x-5)^2 + y^2 = 4$ の 2 つの交点 A, B を結ぶ線分 AB の中点 P はどんな曲線を描くか。

解答 円 $x^2 + y^2 - 5x = 0$ の $x > \frac{21}{5}$ の部分

2 つの交点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β とする。

$y = mx$ と $(x-5)^2 + y^2 = 4$ から y を消去すると

$$(m^2 + 1)x^2 - 10x + 21 = 0$$

α, β はこの 2 次方程式の異なる 2 つの実数解であるから、判別式 D について

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - (m^2 + 1) \cdot 21 > 0$$

ゆえに $m^2 + 1 < \frac{25}{21}$ …… ①

また、解と係数の関係により $\alpha + \beta = \frac{10}{m^2 + 1}$

よって、線分 AB の中点の座標を (x, y) とすると

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{5}{m^2 + 1} \quad \dots\dots ② \quad \text{また} \quad y = mx \quad \dots\dots ③$$

② から $x \neq 0$ であり、③ より $m = \frac{y}{x}$

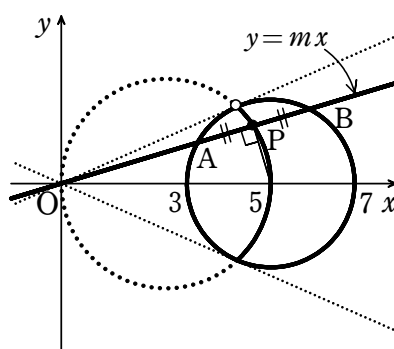
また、② から $(m^2 + 1)x = 5$

m を消去して $\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right\}x = 5$ すなわち $x^2 + y^2 - 5x = 0$

$m^2 + 1 > 0$ であるから、① により

$$\frac{1}{m^2 + 1} > \frac{21}{25} \quad \text{これと ② から} \quad x > \frac{21}{5}$$

よって、求める軌跡は 円 $x^2 + y^2 - 5x = 0$ の $x > \frac{21}{5}$ の部分



C 14 - 6

xy 平面上の 2 点 (t, t) , $(t-1, 1-t)$ を通る直線を ℓ とする。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) t が $0 \leq t \leq 1$ を動くとき、 ℓ の通りうる範囲を図示せよ。

解答 (1) $y = (2t-1)x - 2t^2 + 2t$ (2)

(1) ℓ_t の方程式は $y - t = \frac{(1-t)-t}{(t-1)-t}(x-t)$

すなわち $y = (2t-1)x - 2t^2 + 2t$

(2) ℓ_t の方程式を t について整理すると

$$2t^2 - 2(x+1)t + x + y = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

左辺を $f(t)$ とすると $f(t) = 2\left(t - \frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + y$

① が $0 \leq t \leq 1$ である解をもつのは、次の 2 つの場合である。

[1] 2 つの解がともに $0 \leq t \leq 1$ の場合

$$\frac{D}{4} = (x+1)^2 - 2(x+y) \geq 0, \quad f(0) = x+y \geq 0,$$

$$f(1) = 2 - 2(x+1) + x + y \geq 0, \quad 0 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$$

よって $y \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2},$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad y \geq -x, \quad y \geq x$$

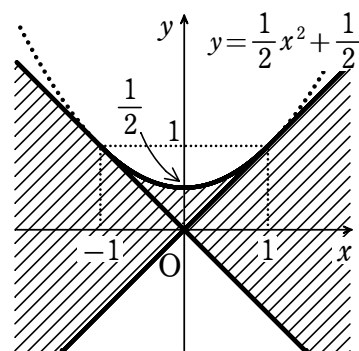
[2] 1 つの解が $0 \leq t \leq 1$ の場合

$$f(0)f(1) = (x+y)(-x+y) \leq 0$$

したがって $(x+y)(-x+y) \leq 0$

[1], [2] の場合を合わせると、求める領域は図の斜線部分のようになる。

ただし、境界線を含む。



別解 $g(x) = (2t-1)x - 2t^2 + 2t$ とおく。

$$g(x) = -2t^2 + 2(x+1)t - x = -\frac{1}{2}\{x - (2t-1)\}^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

よって $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} - g(x) = \frac{1}{2}\{x - (2t-1)\}^2$

この式は放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ と直線 $y = g(x)$ (直線 ℓ_t) の接点の x 座標が $2t-1$ であることを表す。

t を $0 \leq t \leq 1$ の範囲で動かすと、直線 ℓ_t の通りうる範囲は上の図の斜線部分のようになる。ただし、境界線を含む。

第 15 章 三角関数

A 15 - 1

次の θ について、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を、それぞれ求めよ。

(1) $\theta = \frac{7}{4}\pi$

(2) $\theta = -\frac{5}{6}\pi$

(3) $\theta = \frac{3}{2}\pi$

解答 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の順に (1) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 -1

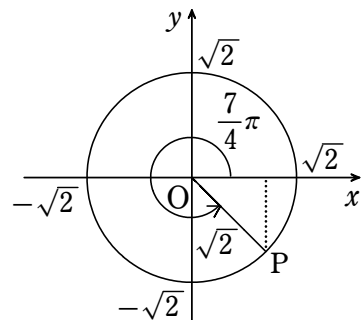
(2) $-\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (3) -1 、 0 、定義されない

(1) 右の図で、点 P の座標は $(1, -1)$ である。

よって $\sin \frac{7}{4}\pi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\cos \frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \frac{7}{4}\pi = \frac{-1}{1} = -1$$

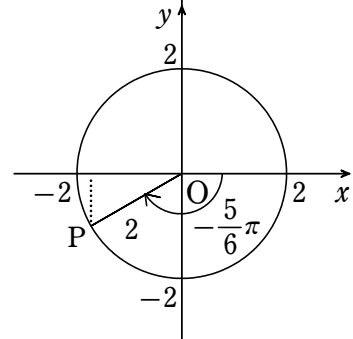


(2) 右の図で、点 P の座標は $(-\sqrt{3}, -1)$ である。

よって $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

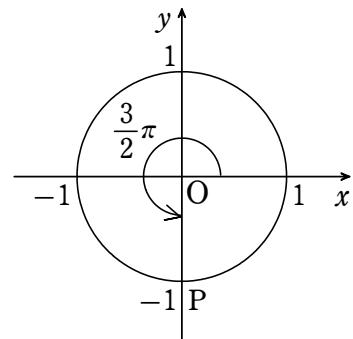


(3) 右の図で、点 P の座標は $(0, -1)$ である。

よって $\sin \frac{3}{2}\pi = \frac{-1}{1} = -1$

$$\cos \frac{3}{2}\pi = \frac{0}{1} = 0$$

$\tan \frac{3}{2}\pi$ は定義されない。



A 15 - 2

- (1) θ の動径が第 2 象限にあり、 $\sin \theta = \frac{3}{4}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を、それぞれ求めよ。
- (2) θ の動径が第 4 象限にあり、 $\tan \theta = -3$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ の値を、それぞれ求めよ。

解答 (1) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan \theta = -\frac{3}{\sqrt{7}}$ (2) $\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

(1) $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

θ の動径が第 2 象限にあるとき、 $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

(2) $\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + (-3)^2} = \frac{1}{10}$

θ の動径が第 4 象限にあるとき、 $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

また $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = (-3) \times \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

A 15 - 3

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。また、 θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$

(2) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

解答 n は整数とする。 $0 \leq \theta < 2\pi$ の解、 θ の範囲に制限がないときの解の順に

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi; \theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi$

(2) $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi; \theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{7}{4}\pi + 2n\pi$

$$(3) \quad \theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi; \theta = \frac{5}{6}\pi + n\pi$$

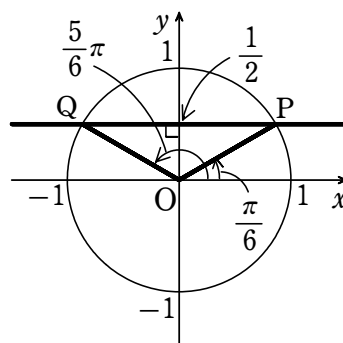
(1) 右の図のように、単位円と直線 $y = \frac{1}{2}$ の交点を P,

Q とすると、動径 OP, OQ が角 θ の動径である。

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で、求める θ は $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

θ の範囲に制限がないときは

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



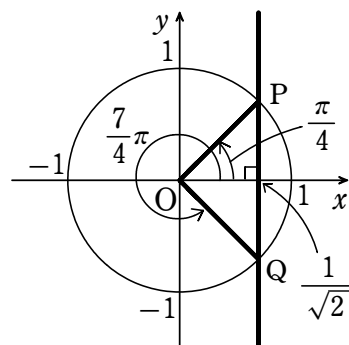
(2) 右の図のように、単位円と直線 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の交点を

P, Q とすると、動径 OP, OQ が角 θ の動径である。

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で、求める θ は $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$

θ の範囲に制限がないときは

$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{7}{4}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



(3) 右の図のように、単位円と、原点と

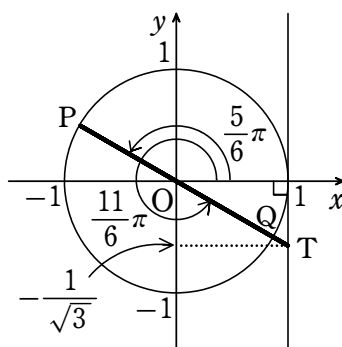
点 $T\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を結ぶ直線の交点を P, Q とす

ると、動径 OP, OQ が角 θ の動径である。

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で、求める θ は $\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

θ の範囲に制限がないときは

$$\theta = \frac{5}{6}\pi + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



A 15 - 4

加法定理を用いて、 $\sin 165^\circ$, $\cos 165^\circ$, $\tan 165^\circ$ の値を求めよ。

解答 順に $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $-2+\sqrt{3}$

$$\sin 165^\circ = \sin(120^\circ + 45^\circ) = \sin 120^\circ \cos 45^\circ + \cos 120^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 165^\circ = \cos(120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\tan 165^\circ = \tan(120^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 120^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 120^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 1}{1 - (-\sqrt{3}) \cdot 1} = \frac{-\sqrt{3} + 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-2} = -2 + \sqrt{3}$$

【参考】 $165^\circ = 135^\circ + 30^\circ$ としてもよい。

A 15 - 5

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ のとき, $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ の値を求めよ。

【解答】 $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$, $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ であるから } \cos \alpha < 0$$

$$\text{よって } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{したがって } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1}{5} \quad \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \cos \frac{\alpha}{2} > 0$$

$$\text{よって } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

A 15 - 6

次の関数の最大値, 最小値を求めよ。

(1) $y = \sin x - \cos x$

(2) $y = \sqrt{6} \sin x - \sqrt{2} \cos x$

解答 (1) 最大値 $\sqrt{2}$, 最小値 $-\sqrt{2}$ (2) 最大値 $2\sqrt{2}$, 最小値 $-2\sqrt{2}$

$$(1) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ であるから } y = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ であるから } -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$$

したがって y の最大値は $\sqrt{2}$, 最小値は $-\sqrt{2}$

$$(2) \sqrt{6} \sin x - \sqrt{2} \cos x = 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \text{ であるから } y = 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \text{ であるから } -2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2}$$

したがって y の最大値は $2\sqrt{2}$, 最小値は $-2\sqrt{2}$

A 15 - 7

$2\sin 4\theta \cos 2\theta$ を和の形, $\cos 5\theta + \cos 3\theta$ を積の形にせよ。

解答 順に $\sin 6\theta + \sin 2\theta$, $2\cos 4\theta \cos \theta$

$$2\sin 4\theta \cos 2\theta = 2 \cdot \frac{1}{2} \{ \sin(4\theta + 2\theta) + \sin(4\theta - 2\theta) \} = \sin 6\theta + \sin 2\theta$$

$$\cos 5\theta + \cos 3\theta = 2\cos \frac{5\theta + 3\theta}{2} \cos \frac{5\theta - 3\theta}{2} = 2\cos 4\theta \cos \theta$$

B 15 - 1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の不等式を解け。

$$(1) \sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \cos \theta \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3) \tan \theta < -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(4) 2\sin \theta + \sqrt{3} \leq 0 \quad (5) 2\cos \theta > \sqrt{3} \quad (6) \tan \theta + 1 \geq 0$$

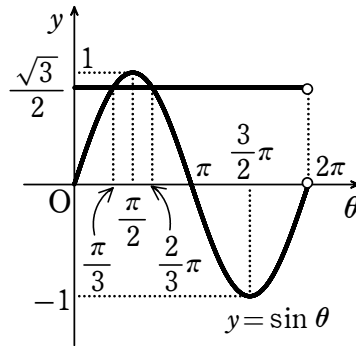
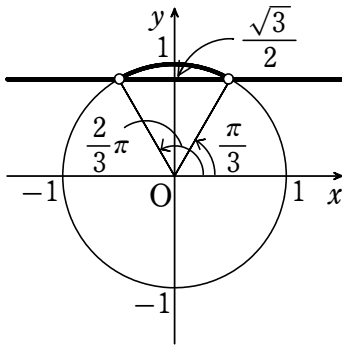
解答 (1) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$ (3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$

$$(4) \frac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi \quad (5) 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(6) 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \leq \theta < 2\pi$$

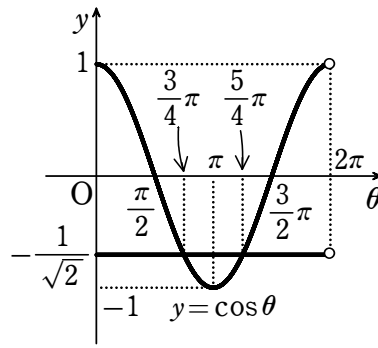
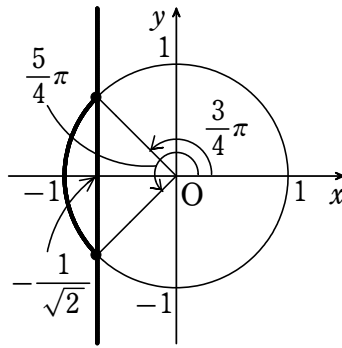
$$(1) 0 \leq \theta < 2\pi \text{ の範囲で } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ となる } \theta \text{ は } \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

よって, 不等式の解は, 図から $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$



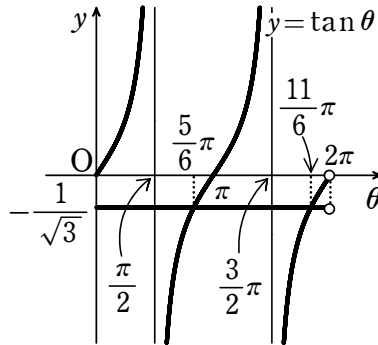
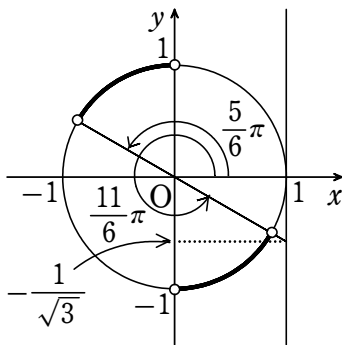
(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$

よって、不等式の解は、図から $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$



(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ は $\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

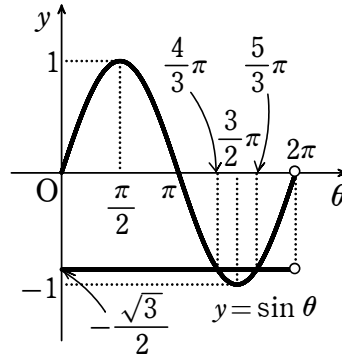
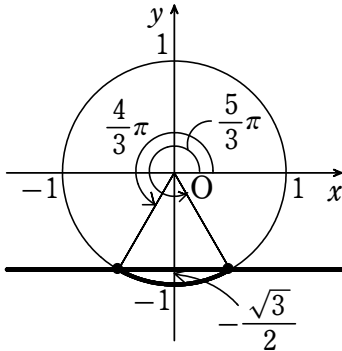
よって、不等式の解は、図から $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$



(4) 不等式を変形すると $\sin \theta \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は $\theta = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

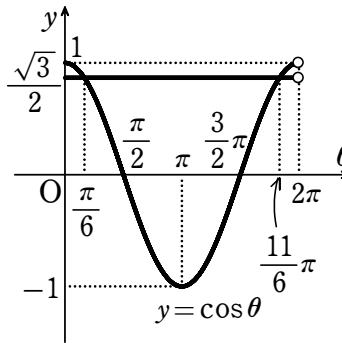
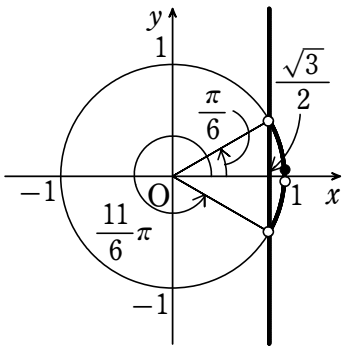
よって、不等式の解は、図から $\frac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$



(5) 不等式を変形すると $\cos \theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$

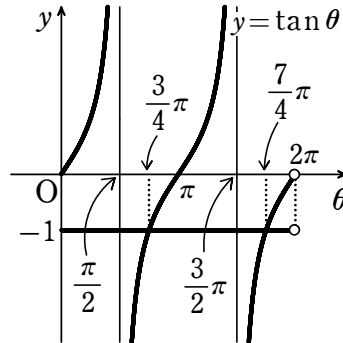
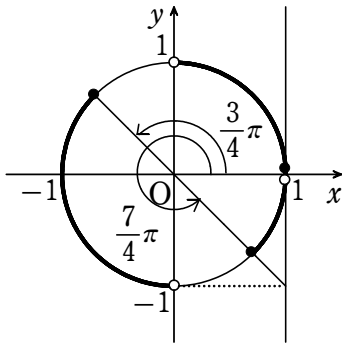
よって、不等式の解は、図から $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$



(6) 不等式を変形すると $\tan \theta \geq -1$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan \theta = -1$ となる θ は $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

よって、不等式の解は、図から $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \leq \theta < \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \leq \theta < 2\pi$

**B 15 - 2**

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

(3) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

解答 (1) $-\frac{1}{8}$ (2) $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ (3) -8

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

よって $1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$ したがって $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{8} \right) \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

(3) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

$$= 1 \div \left(-\frac{1}{8} \right) = 1 \times (-8) = -8$$

B 15 - 3

$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。

解答 $-\frac{59}{72}$

$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$ の辺々を 2 乗して加えると

$$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

よって $(\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta) + (\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4}$

すなわち $2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \frac{13}{36}$

よって $2 + 2\cos(\alpha - \beta) = \frac{13}{36}$

したがって $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{59}{72}$

B 15 - 4

$\sin 22.5^\circ$, $\cos 22.5^\circ$, $\tan 22.5^\circ$ の値を求めよ。

解答 順に $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\sqrt{2}-1$

$$\sin^2 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$\sin 22.5^\circ > 0$ であるから $\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos^2 22.5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$\cos 22.5^\circ > 0$ であるから $\cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$$\tan^2 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$\tan 22.5^\circ > 0$ であるから $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$

B 15 - 5

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$(1) \sin 2\theta = \sqrt{3} \sin \theta \qquad (2) \cos 2\theta - 3\cos \theta - 1 = 0$$

解答 (1) $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11}{6}\pi$ (2) $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

(1) 左辺を変形すると $2\sin \theta \cos \theta = \sqrt{3} \sin \theta$

整理すると $\sin \theta (2\cos \theta - \sqrt{3}) = 0$

よって $\sin \theta = 0$ または $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, $\sin \theta = 0$ から $\theta = 0, \pi$

$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ から $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$

したがって $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11}{6}\pi$

(2) 左辺を変形すると $(2\cos^2 \theta - 1) - 3\cos \theta - 1 = 0$

整理すると $2\cos^2 \theta - 3\cos \theta - 2 = 0$

左辺を因数分解すると $(\cos \theta - 2)(2\cos \theta + 1) = 0$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから $\cos \theta - 2 \neq 0$

よって $2\cos \theta + 1 = 0$ すなわち $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

B 15 - 6

$\theta = 18^\circ$ のとき, $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ であることを示せ。また, これを利用して, $\sin 18^\circ$ の値を求めよ。

解答 (前半) 略 (後半) $\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

$\theta = 18^\circ$ のとき $5\theta = 90^\circ$ よって, $2\theta + 3\theta = 90^\circ$ より, $2\theta = 90^\circ - 3\theta$ であるから

$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$, $\cos 3\theta = -3\cos \theta + 4\cos^3 \theta$ であるから

$2\sin \theta \cos \theta = -3\cos \theta + 4\cos^3 \theta$

$\cos \theta \neq 0$ であるから $2\sin \theta = -3 + 4\cos^2 \theta$

よって $2\sin \theta = -3 + 4(1 - \sin^2 \theta)$

整理して $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$ これを解いて $\sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$\sin\theta > 0$ であるから $\sin\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

参考 3 倍角の公式 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$

[証明] $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$

$$= 2\sin\alpha \cos\alpha \cos\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha \cos\alpha \sin\alpha$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)$$

$$= -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha$$

B 15 - 7

関数 $y = 2\sin x + 3\cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) の最大値, 最小値を求めよ。

解答 最大値 $\sqrt{13}$, 最小値 -3

$$y = 2\sin x + 3\cos x = \sqrt{13} \sin(x + \alpha)$$

ただし $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

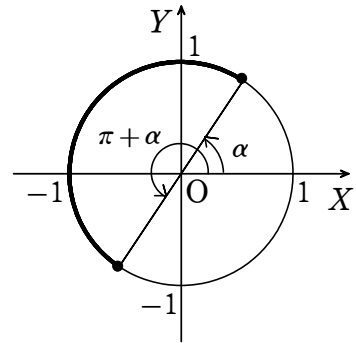
$0 \leq x \leq \pi$ から $\alpha \leq x + \alpha \leq \pi + \alpha$

よって, $x + \alpha = \frac{\pi}{2}$ すなわち $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大値

$$\sqrt{13} \sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{13}$$

$x + \alpha = \pi + \alpha$ すなわち $x = \pi$ のとき最小値

$$2\sin \pi + 3\cos \pi = -3$$



B 15 - 8

次の値を求めよ。

(1) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

(2) $\sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ$

解答 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 0

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) \cos 80^\circ \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 80^\circ \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos(180^\circ - 80^\circ) + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{4} \cos 80^\circ - \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\
 (2) \quad \sin 20^\circ + \sin 140^\circ + \sin 260^\circ &= (\sin 20^\circ + \sin 260^\circ) + \sin 140^\circ \\
 &= 2 \sin 140^\circ \cos 120^\circ + \sin 140^\circ \\
 &= -\sin 140^\circ + \sin 140^\circ = 0
 \end{aligned}$$

B 15 - 9

関数 $y = 2\sin^2 x + \sqrt{7} \sin x \cos x - \cos^2 x$ の最大値, 最小値を求めよ。

解答 最大値は $\frac{5}{2}$, 最小値は $-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
 y &= 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sqrt{7} \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{7} \sin 2x - 3 \cos 2x) + \frac{1}{2} = 2 \sin(2x + \alpha) + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ただし $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, \sin \alpha = -\frac{3}{4}$

$-1 \leq \sin(2x + \alpha) \leq 1$ であるから $-2 + \frac{1}{2} \leq y \leq 2 + \frac{1}{2}$ すなわち $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$

よって 最大値は $\frac{5}{2}$, 最小値は $-\frac{3}{2}$

B 15 - 10

次の関数の最大値, 最小値を求めよ。

$$y = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x - 1$$

解答 最大値 $\frac{1}{2}$, 最小値 $-\frac{7}{2}$

$\sin x + \cos x = t$ とおく。この式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$$

$$\text{よって } \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2}t - \frac{t^2 - 1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}(t^2 - 2\sqrt{2}t) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(t - \sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

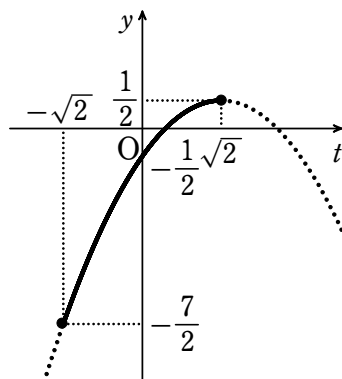
また, $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots\dots ①$$

① の範囲において, y は

$$t = \sqrt{2} \text{ で最大値 } \frac{1}{2} \text{ をとり,}$$

$$t = -\sqrt{2} \text{ で最小値 } -\frac{7}{2} \text{ をとる。}$$



C 15 - 1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式, 不等式を解け。

$$(1) \cos\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \tan\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$(3) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(4) \tan\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) \leq -1$$

解答 (1) $\theta = \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$ (2) $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$

(3) $0 \leq \theta < \frac{7}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi < \theta < 2\pi$ (4) $\frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{6}\pi < \theta \leq \frac{17}{12}\pi$

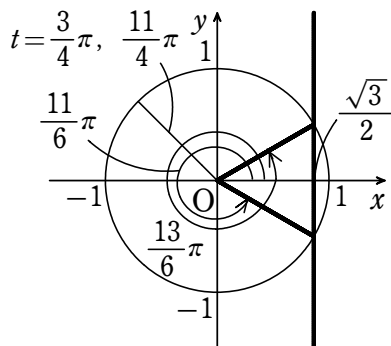
(1) $\theta + \frac{3}{4}\pi = t \quad \dots\dots ①$ とおくと $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $\frac{3}{4}\pi \leq \theta + \frac{3}{4}\pi < 2\pi + \frac{3}{4}\pi$

すなわち $\frac{3}{4}\pi \leq t < \frac{11}{4}\pi \quad \dots\dots ②$

② の範囲で $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ の解は $t = \frac{11}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$

① より, $\theta = t - \frac{3}{4}\pi$ であるから $\theta = \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$



(2) $2\theta - \frac{\pi}{3} = t \dots\dots ①$ とおくと $\tan t = \sqrt{3}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} < 4\pi - \frac{\pi}{3}$

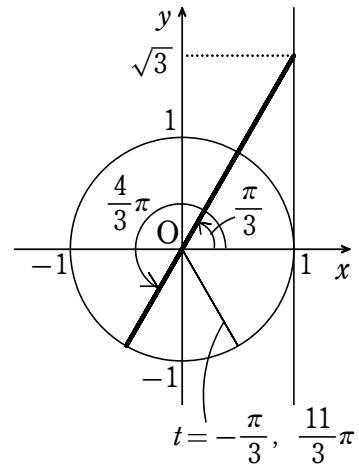
すなわち $-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11}{3}\pi \dots\dots ②$

② の範囲で $\tan t = \sqrt{3}$ の解は

$$t = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi$$

① より, $\theta = \frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$$



(3) $\theta - \frac{\pi}{3} = t \dots\dots ①$ とおくと $\sin t < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} < 2\pi - \frac{\pi}{3}$

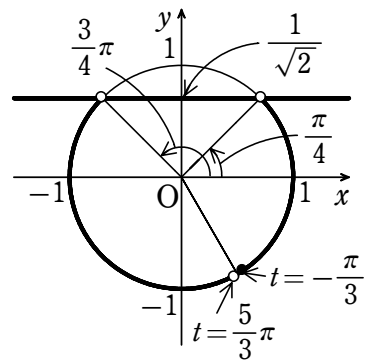
すなわち $-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi \dots\dots ②$

② の範囲で $\sin t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ の解は

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < t < \frac{5}{3}\pi$$

① より, $\theta = t + \frac{\pi}{3}$ であるから

$$0 \leq \theta < \frac{7}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi < \theta < 2\pi$$



(4) $\theta - \frac{2}{3}\pi = t \dots\dots ①$ とおくと $\tan t \leq -1$

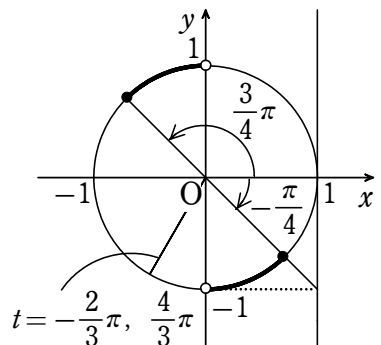
$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-\frac{2}{3}\pi \leq \theta - \frac{2}{3}\pi < 2\pi - \frac{2}{3}\pi$

すなわち $-\frac{2}{3}\pi \leq t < \frac{4}{3}\pi \dots\dots ②$

② の範囲で $\tan t \leq -1$ の解は

$$-\frac{\pi}{2} < t \leq -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} < t \leq \frac{3}{4}\pi$$

① より, $\theta = t + \frac{2}{3}\pi$ であるから



$$\frac{\pi}{6} < \theta \leq \frac{5}{12}\pi, \quad \frac{7}{6}\pi < \theta \leq \frac{17}{12}\pi$$

C 15 - 2

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $2\cos 2\theta + 4\cos \theta + 5 - a = 0$ の異なる解の個数を、定数 a の値の範囲によって調べよ。

解答 $a < 2$, $11 < a$ のとき 0 個； $a = 2$, $3 < a < 11$ のとき 2 個；

$2 < a < 3$ のとき 4 個； $a = 3$ のとき 3 個； $a = 11$ のとき 1 個

方程式を変形すると $2(2\cos^2 \theta - 1) + 4\cos \theta + 5 - a = 0$

よって $4\cos^2 \theta + 4\cos \theta + 3 = a$

$y = 4\cos^2 \theta + 4\cos \theta + 3$, $\cos \theta = t$ とおくと

$$y = 4t^2 + 4t + 3 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また $-1 \leq t \leq 1$

$-1 \leq t \leq 1$ における、関数 $\textcircled{1}$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べると、図から

$a < 2$, $11 < a$ のとき 0 個

$a = 2$, $3 < a < 11$ のとき $-1 < t < 1$ の範囲に 1 個

$2 < a < 3$ のとき $-1 < t < 1$ の範囲に 2 個

$a = 3$ のとき $-1 < t < 1$ の範囲に 1 個と、 $t = -1$ のときの 1 個

$a = 11$ のとき $t = 1$ のときの 1 個

$\cos \theta = t$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の解の個数は、

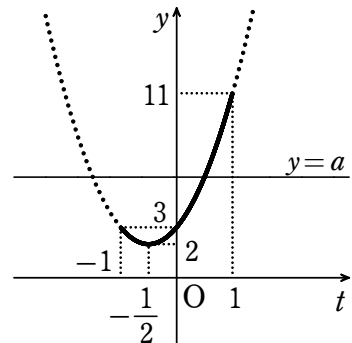
$t = \pm 1$ のとき 1 個、 $-1 < t < 1$ のとき 2 個

であるから、求める解の個数は

$a < 2$, $11 < a$ のとき 0 個； $a = 2$, $3 < a < 11$ のとき 2 個；

$2 < a < 3$ のとき 4 個； $a = 3$ のとき 3 個；

$a = 11$ のとき 1 個

**C 15 - 3**

次の関係式が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような形の三角形か。

$$\cos A + \cos B = \sin C$$

解答 $\angle A = \frac{\pi}{2}$ または $\angle B = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形

$A + B + C = \pi$ …… ① であるから $A + B = \pi - C$

$$\begin{aligned} \text{よって } \cos A + \cos B &= 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

$$\text{また } \sin C = \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right) = 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{ゆえに, 等式 } \cos A + \cos B = \sin C \text{ から } 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} = 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\sin \frac{C}{2} \neq 0 \text{ であるから } \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{この等式を更に変形すると } \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2} &= 0 \\ -2\sin \frac{A-B+C}{4} \sin \frac{A-B-C}{4} &= 0 \\ \sin \frac{(A+C)-B}{4} \sin \frac{A-(B+C)}{4} &= 0 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

A, B, C は三角形の内角であるから

$$0 < A + C < \pi, \quad 0 < B < \pi$$

したがって, $-\pi < (A+C)-B < \pi$ から

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{(A+C)-B}{4} < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{同様に考えて } -\frac{\pi}{4} < \frac{A-(B+C)}{4} < \frac{\pi}{4}$$

よって, ② から

$$\frac{(A+C)-B}{4} = 0 \quad \text{すなわち} \quad A - B + C = 0 \quad \dots\dots ③$$

$$\frac{A-(B+C)}{4} = 0 \quad \text{すなわち} \quad A - B - C = 0 \quad \dots\dots ④$$

$$\text{①} - \text{③} \text{ から } 2B = \pi \quad \text{すなわち} \quad B = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{①} + \text{④} \text{ から } 2A = \pi \quad \text{すなわち} \quad A = \frac{\pi}{2}$$

したがって, $\triangle ABC$ は, $\angle A$ が直角または $\angle B$ が直角の直角三角形である。

y 軸上の 2 点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ と動点 $P(a, 0)$ ($a > 0$) を考える。 $\theta = \angle APB$ とおく。

(1) $\tan \theta$ を a で表せ。

(2) θ が最大になる a を求めよ。

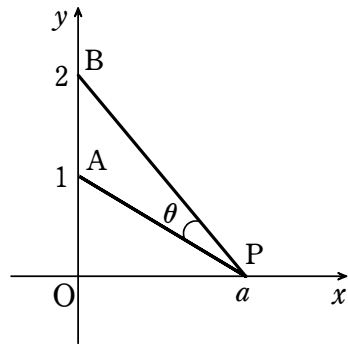
解答 (1) $\tan \theta = \frac{a}{a^2 + 2}$ (2) $a = \sqrt{2}$

(1) $\angle OPA = \alpha$, $\angle OPB = \beta$ とすると

$$\tan \alpha = \frac{1}{a}, \quad \tan \beta = \frac{2}{a}$$

また, $\theta = \beta - \alpha$ であるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{2}{a} - \frac{1}{a}}{1 + \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \frac{2}{a^2}} = \frac{a}{a^2 + 2} \end{aligned}$$



(2) $\tan \theta$ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において, θ が増加するとそれとともに増加するから,

θ が最大であることと, $\tan \theta$ が最大であることは同値である。

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\tan \theta = \frac{a}{a^2 + 2} = \frac{1}{a + \frac{2}{a}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a \cdot \frac{2}{a}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

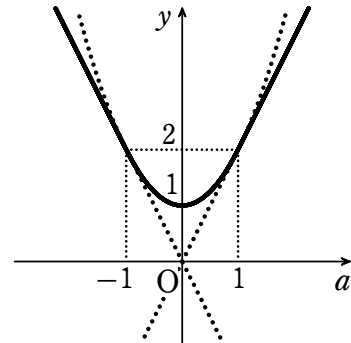
等号が成り立つとき $\tan \theta$ は最大となる。

このとき $a = \frac{2}{a}$ $a > 0$ であるから $a = \sqrt{2}$

C 15 - 5

関数 $f(\theta) = \cos^2 \theta + 2a \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値を $M(a)$ とする。関数 $y = M(a)$ のグラフをかけ。

【解答】 [図] 実線部分



$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より, $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ であるから

$$f(\theta) = 1 - \sin^2 \theta + 2a \sin \theta$$

$\sin \theta = t$ とおくと, $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-1 \leq t \leq 1$ ①

$$\begin{aligned} \text{このとき } f(\theta) &= -t^2 + 2at + 1 = -(t^2 - 2at + a^2) + a^2 + 1 \\ &= -(t - a)^2 + a^2 + 1 \end{aligned}$$

関数 $y = -t^2 + 2at + 1$ のグラフは, 上に凸の放物線で, その頂点は点 $(a, a^2 + 1)$, 軸は直線 $t = a$ である。

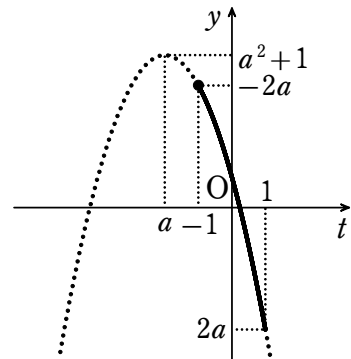
[1] $a < -1$ のとき

グラフは, 右の図の実線部分のようになる。

よって, $t = -1$ のとき最大となる。

$$t = -1 \text{ のとき } y = -(-1)^2 + 2a(-1) + 1 = -2a$$

$$\text{したがって } M(a) = -2a$$



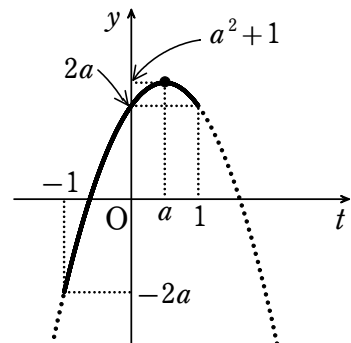
[2] $-1 \leq a \leq 1$ のとき

グラフは, 右の図の実線部分のようになる。

よって, $t = a$ のとき最大となる。

$$t = a \text{ のとき } y = a^2 + 1$$

$$\text{したがって } M(a) = a^2 + 1$$



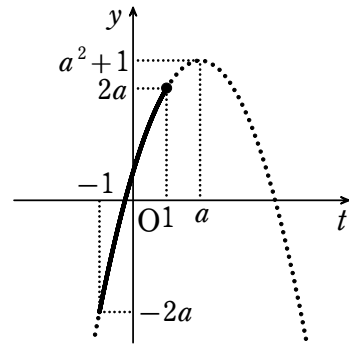
[3] $1 < a$ のとき

グラフは、右の図の実線部分のようになる。

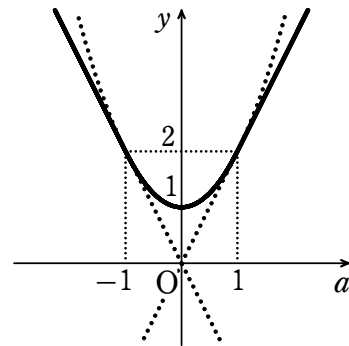
よって、 $t=1$ のとき最大となる。

$$t=1 \text{ のとき } y = -1^2 + 2a \cdot 1 + 1 = 2a$$

$$\text{したがって } M(a) = 2a$$



以上から、関数 $y = M(a)$ のグラフは、右の図のようになる。



C 15 - 6

$t = \tan \frac{\theta}{2}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\sin \theta$, $\cos \theta$ を t の式で表せ。

(2) 関数 $y = \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta + 1}$ について、 y の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ の

値を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ とする。

解答 (1) $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ (2) $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (3) $y = -\frac{1}{2}(t-1)^2$

(4) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 0, $\theta = 0$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

(1) $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = 2 \tan \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

$$(2) \quad \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$(3) \quad (1), (2) \text{ から } y = \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta + 1} = \frac{\frac{2t}{1+t^2} - 1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \frac{2t - (1+t^2)}{1 - t^2 + 1 + t^2} = -\frac{1}{2}(t-1)^2$$

$$(4) \quad 0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \text{ から } 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに, } t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ から } 0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

よって, (3) から, $t=1$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 0,

$t=0$ すなわち $\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる。

$$\boxed{\text{別解}} \quad y = \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta + 1} = \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta - (-1)}$$

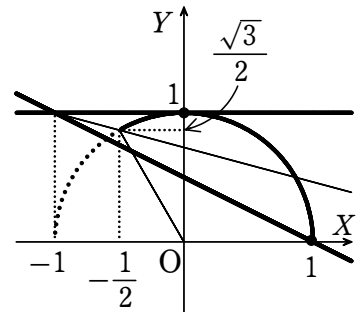
よって, y は 2 点 $(-1, 1)$, $(\cos \theta, \sin \theta)$ を通る直線の傾きを表す。

点 $(\cos \theta, \sin \theta) \left(0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \right)$ は円 $X^2 + Y^2 = 1$ 上にある。

右の図から, 直線の傾きは, 2 点 $(-1, 1)$, $(0, 1)$ を通るとき最大, 2 点 $(-1, 1)$, $(1, 0)$ を通るとき最小となる。

したがって

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } 0, \theta = 0 \text{ のとき最小値 } -\frac{1}{2}$$



第16章 指数・対数関数

A 16 - 1

次の3つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$

(2) 2^{30} , 3^{20} , 7^{10}

解答 (1) $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ (2) $7^{10} < 2^{30} < 3^{20}$

(1) 3つの数を、それぞれ6乗すると

$$(\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8, \quad (\sqrt[3]{3})^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9, \quad (\sqrt[6]{6})^6 = 6$$

$$6 < 8 < 9 \text{ であるから } (\sqrt[6]{6})^6 < (\sqrt{2})^6 < (\sqrt[3]{3})^6$$

$$\sqrt[6]{6} > 0, \sqrt{2} > 0, \sqrt[3]{3} > 0 \text{ であるから } \sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

別解 $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3 \times \frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}, \quad \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{2 \times \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{6}}, \quad \sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}}$

$$6 < 8 < 9 \text{ であるから } 6^{\frac{1}{6}} < 8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}} \text{ すなわち } \sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

(2) $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}, \quad 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$

$$7 < 8 < 9 \text{ であるから } 7^{10} < 8^{10} < 9^{10} \text{ すなわち } 7^{10} < 2^{30} < 3^{20}$$

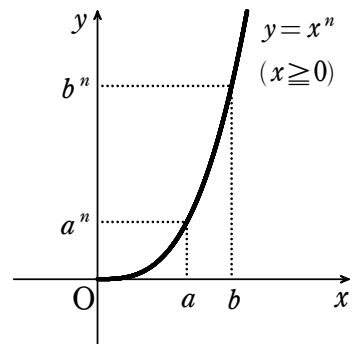
注意 (1), (2)の解答では、次の事柄を使っている。

[1] $a > 0, b > 0$ で、 n が自然数のとき

$$a < b \iff a^n < b^n$$

[2] $a > 0, b > 0$ で、 n が自然数のとき

$$a < b \iff a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$$



A 16 - 2

(1) 次の計算をせよ。

(ア) $8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}}$

(イ) $(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}} b^{-1} \quad (a > 0, b > 0)$

(2) $\sqrt[3]{-8} = \text{ア} \boxed{}, \quad \sqrt[4]{81} = \text{イ} \boxed{}, \quad 64^{\frac{2}{3}} = \text{ウ} \boxed{}$

16の実数である4乗根は $\text{エ} \boxed{}$ である。

(3) $(\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[6]{4} - 3\sqrt[9]{8})^3$ を簡単にせよ。

【解答】 (1) (ア) 4 (イ) a (2) (ア) -2 (イ) 3 (ウ) 16 (エ) ± 2
(3) 2

$$(1) \text{ (ア) } 8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{(イ)} \quad (ab^{-2})^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}} b^{-1} &= a^{-\frac{1}{2}} b^{(-2) \times (-\frac{1}{2})} \times a^{\frac{3}{2}} b^{-1} \\ &= a^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} b^{1-1} = a^{\frac{2}{2}} b^0 = a \end{aligned}$$

$$(2) \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \qquad 64^{\frac{2}{3}} = (4^3)^{\frac{2}{3}} = 4^2 = 16$$

16の4乗根は $x^4=16$ を満たす数 x である。

$$x^4=16 \iff x^4-16=0 \iff (x^2+4)(x+2)(x-2)=0$$

この方程式の実数解が求めるもので ± 2

$$(3) (\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[6]{4} - 3\sqrt[9]{8})^3 = (2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 = 2$$

A 16 - 3

次の方程式，不等式を解け。

$$(1) 2^x - 24 \cdot 2^{-x} = 5 \qquad (2) \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} > \frac{2}{81}$$

【解答】 (1) $x=3$ (2) $x<1$

$$(1) \text{ 方程式の両辺に } 2^x (>0) \text{ を掛けて } (2^x)^2 - 24 = 5 \cdot 2^x$$

$$\text{ゆえに } (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$2^x = t \text{ とおくと, } t > 0 \text{ であり, 方程式は } t^2 - 5t - 24 = 0$$

$$\text{よって } (t+3)(t-8) = 0 \qquad t > 0 \text{ であるから } t = 8$$

$$\text{ゆえに } 2^x = 8 \text{ すなわち } 2^x = 2^3$$

$$\text{したがって } x = 3$$

$$(2) \text{ 不等式を変形すると } \frac{1}{9} \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^x \right\}^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{1}{3} \right)^x - \frac{2}{81} > 0$$

$$\text{両辺に } 81 \text{ を掛けて } 9 \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^x \right\}^2 + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^x - 2 > 0$$

$$\left(\frac{1}{3} \right)^x = t \text{ とおくと, } t > 0 \text{ であり, 不等式は } 9t^2 + 3t - 2 > 0$$

$$\text{よって } (3t-1)(3t+2) > 0$$

$$3t+2>0 \text{ であるから } 3t-1>0 \text{ すなわち } t>\frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3} \text{ すなわち } \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$\text{底 } \frac{1}{3} \text{ は } 1 \text{ より小さいから } x < 1$$

A 16 - 4

$\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき、次の式を a , b を用いて表せ。

$$(1) \log_{10} \frac{1}{12}$$

$$(2) \log_{10} 15$$

$$(3) \log_{10} \sqrt{0.75}$$

$$(4) \log_2 2.7$$

$$(5) \log_{18} \sqrt[3]{24}$$

$$\text{【解答】 } (1) -2a-b \quad (2) 1-a+b \quad (3) \frac{b}{2}-a \quad (4) \frac{3b-1}{a} \quad (5) \frac{3a+b}{3a+6b}$$

$$(1) \log_{10} \frac{1}{12} = -\log_{10}(2^2 \times 3) = -\log_{10} 2^2 - \log_{10} 3 = -2\log_{10} 2 - \log_{10} 3 = -2a - b$$

$$(2) \log_{10} 15 = \log_{10}(5 \times 3) = \log_{10} 5 + \log_{10} 3 = \log_{10} \frac{10}{2} + \log_{10} 3 \\ = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 1 - a + b$$

$$(3) \log_{10} \sqrt{0.75} = \frac{1}{2} \log_{10} \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (\log_{10} 3 - \log_{10} 2^2) = \frac{1}{2} (\log_{10} 3 - 2\log_{10} 2) \\ = \frac{1}{2} (b - 2a) = \frac{b}{2} - a$$

$$(4) \log_2 2.7 = \frac{\log_{10} 2.7}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} \frac{3^3}{10}}{\log_{10} 2} = \frac{3\log_{10} 3 - \log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \frac{3b-1}{a}$$

$$(5) \log_{18} \sqrt[3]{24} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\log_{10} 24}{\log_{10} 18} = \frac{\log_{10}(2^3 \times 3)}{3\log_{10}(2 \times 3^2)} = \frac{3\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{3(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3)} = \frac{3a+b}{3a+6b}$$

A 16 - 5

$3^x = 7^y = \sqrt{21}$ のとき、 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ の値を求めよ。

$$\text{【解答】 } 2$$

10 を底として、 $3^x = 7^y = \sqrt{21}$ の各辺の対数をとると

$$x \log_{10} 3 = y \log_{10} 7 = \frac{1}{2} \log_{10} 21$$

$$x \log_{10} 3 = \frac{1}{2} \log_{10} 21 \text{ から } \frac{1}{x} = \frac{2 \log_{10} 3}{\log_{10} 21}$$

$$y \log_{10} 7 = \frac{1}{2} \log_{10} 21 \text{ から } \frac{1}{y} = \frac{2 \log_{10} 7}{\log_{10} 21}$$

$$\text{よって } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2 \log_{10} 3 + 2 \log_{10} 7}{\log_{10} 21} = \frac{2 \log_{10} (3 \times 7)}{\log_{10} 21} = \frac{2 \log_{10} 21}{\log_{10} 21} = 2$$

B 16 - 1

3つの数 $\log_3 6$, $\log_5 10$, $\frac{3}{2}$ の大小を不等号を用いて表せ。

解答 $\log_5 10 < \frac{3}{2} < \log_3 6$

$$\log_3 6 - \frac{3}{2} = \log_3 6 - \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 \frac{6}{3\sqrt{3}} = \log_3 \frac{2}{\sqrt{3}} > \log_3 1 = 0$$

$$\text{よって } \log_3 6 > \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } \frac{3}{2} - \log_5 10 = \log_5 5^{\frac{3}{2}} - \log_5 10 = \log_5 \frac{5\sqrt{5}}{10} = \log_5 \frac{\sqrt{5}}{2} > \log_5 1 = 0$$

$$\text{よって } \frac{3}{2} > \log_5 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \log_5 10 < \frac{3}{2} < \log_3 6$$

B 16 - 2

$x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} = 3$ のとき, $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{8}} + x^{-\frac{1}{8}}$ の値を求めよ。

解答 順に 7 , $\sqrt{5}$

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = (x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}})^2 - 2 \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = (x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$(x^{\frac{1}{8}} + x^{-\frac{1}{8}})^2 = x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$x^{\frac{1}{8}} + x^{-\frac{1}{8}} > 0 \text{ であるから } x^{\frac{1}{8}} + x^{-\frac{1}{8}} = \sqrt{5}$$

B 16 - 3

次の式の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10} 2}$

(2) $3^{-2\log_3 4}$

(3) $16^{\log_2 10}$

解答 (1) 2 (2) $\frac{1}{16}$ (3) 10000

(1) $10^{\log_{10} 2} = M$ とおく。

左辺は正の数であるから、両辺の10を底とする対数をとると

$$\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 10 = \log_{10} M$$

よって $\log_{10} 2 = \log_{10} M$

ゆえに $M=2$ すなわち $10^{\log_{10} 2} = 2$

(2) $3^{-2\log_3 4} = M$ とおく。

左辺は正の数であるから、両辺の3を底とする対数をとると

$$-2\log_3 4 \cdot \log_3 3 = \log_3 M$$

よって $\log_3 4^{-2} = \log_3 M$

ゆえに $M = \frac{1}{16}$ すなわち $3^{-2\log_3 4} = \frac{1}{16}$

(3) $16^{\log_2 10} = M$ とおく。

左辺は正の数であるから、両辺の2を底とする対数をとると

$$\log_2 10 \cdot \log_2 16 = \log_2 M$$

よって $4\log_2 10 = \log_2 M$ ゆえに $\log_2 10^4 = \log_2 M$

よって $M=10000$ すなわち $16^{\log_2 10} = 10000$

別解 対数の定義 $a^p = M \iff p = \log_a M$ から $a^{\log_a M} = M$ であることがわかる。

このことを用いると、次のように計算できる。

(1) $10^{\log_{10} 2} = 2$

(2) $3^{-2\log_3 4} = 3^{\log_3 (4^{-2})} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$

(3) $16^{\log_2 10} = (2^4)^{\log_2 10} = 2^{4\log_2 10} = 2^{\log_2 10^4} = 10^4 = 10000$

B 16 - 4

次の方程式を解け。

(1) $\log_2(x^2 + x - 2) = 2$

(2) $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$

解答 (1) $x=2, -3$ (2) $x=1$ (3) $x=4$ (4) $x=\frac{1}{3}, 27$

(1) 対数の定義から $x^2+x-2=2^2$

整理すると $x^2+x-6=0$

よって $(x-2)(x+3)=0$

したがって $x=2, -3$

(2) 真数は正であるから $x>0$ かつ $x+3>0$

すなわち $x>0$ …… ①

方程式を変形すると $\log_2 x(x+3) = \log_2 2^2$

ゆえに $x(x+3)=2^2$ 整理すると $x^2+3x-4=0$

よって $(x-1)(x+4)=0$

① より $x=1$

(3) 真数は正であるから $x-3>0$ かつ $2x+1>0$

すなわち $x>3$ …… ①

方程式を変形すると $\log_3(x-3)(2x+1) = \log_3 3^2$

ゆえに $(x-3)(2x+1)=3^2$ 整理すると $2x^2-5x-12=0$

よって $(2x+3)(x-4)=0$

① より $x=4$

(4) 真数は正であるから $x>0$ かつ $x^2>0$

すなわち $x>0$ …… ①

方程式を変形すると $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$

$\log_3 x = t$ とおくと $t^2 - 2t - 3 = 0$

ゆえに $(t+1)(t-3)=0$

よって $t=-1, 3$ すなわち $\log_3 x = -1, 3$

$\log_3 x = -1$ のとき $x=3^{-1}=\frac{1}{3}$ $\log_3 x = 3$ のとき $x=3^3=27$

① より $x=\frac{1}{3}, 27$

B 16 - 5

次の不等式を解け。

(1) $\log_5(2x+3) < \log_5(x+5)$

(2) $2\log_{0.2}(x-2) > \log_{0.2}(x+4)$

$$(3) \log_3(x-4) + \log_3(x-2) < 1 \quad (4) \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x^3 - 4 \leq 0$$

解答 (1) $-\frac{3}{2} < x < 2$ (2) $2 < x < 5$ (3) $4 < x < 5$ (4) $\frac{1}{16} \leq x \leq 2$

(1) 真数は正であるから $2x+3>0$ かつ $x+5>0$

すなわち $x > -\frac{3}{2}$ …… ①

底5は1より大きいから、不等式より

$$2x+3 < x+5 \quad \text{よって} \quad x < 2 \quad \dots\dots ②$$

①, ②の共通範囲を求めて $-\frac{3}{2} < x < 2$

(2) 真数は正であるから $x-2>0$ かつ $x+4>0$

すなわち $x > 2$ …… ①

不等式を変形すると $\log_{0.2}(x-2)^2 > \log_{0.2}(x+4)$

底0.2は1より小さいから $(x-2)^2 < x+4$

整理すると $x^2-5x < 0$ よって $0 < x < 5$ …… ②

①, ②の共通範囲を求めて $2 < x < 5$

(3) 真数は正であるから $x-4>0$ かつ $x-2>0$

すなわち $x > 4$ …… ①

不等式を変形すると $\log_3(x-4)(x-2) < \log_3 3$

底3は1より大きいから $(x-4)(x-2) < 3$

整理すると $x^2-6x+5 < 0$ よって $1 < x < 5$ …… ②

①, ②の共通範囲を求めて $4 < x < 5$

(4) 真数は正であるから $x>0$ かつ $x^3>0$

すなわち $x > 0$ …… ①

不等式を変形すると $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 3\log_{\frac{1}{2}} x - 4 \leq 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ とおくと $t^2 - 3t - 4 \leq 0$

ゆえに $(t+1)(t-4) \leq 0$ よって $-1 \leq t \leq 4$

ゆえに $-1 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 4$

すなわち $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから $\frac{1}{16} \leq x \leq 2$ …… ②

①, ②の共通範囲を求めて $\frac{1}{16} \leq x \leq 2$

B 16 - 6

関数 $y = 4^x - 2^{x+2}$ ($0 \leq x \leq 2$) について、次の問いに答えよ。

(1) $2^x = t$ とおいて、 y を t で表せ。また、 t の値の範囲を求めよ。

(2) y の最大値、最小値を求めよ。

解答 (1) $y = t^2 - 4t$, $1 \leq t \leq 4$ (2) $x = 2$ で最大値 0, $x = 1$ で最小値 -4

(1) $4^x - 2^{x+2} = (2^2)^x - 2^2 \cdot 2^x = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x$

よって、 $2^x = t$ とおくと $y = t^2 - 4t$

$0 \leq x \leq 2$ のとき $2^0 \leq 2^x \leq 2^2$ したがって $1 \leq t \leq 4$

(2) $t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$ であるから $y = (t-2)^2 - 4$

$1 \leq t \leq 4$ の範囲で y は

$t = 4$ で最大値 0, $t = 2$ で最小値 -4

をとる。

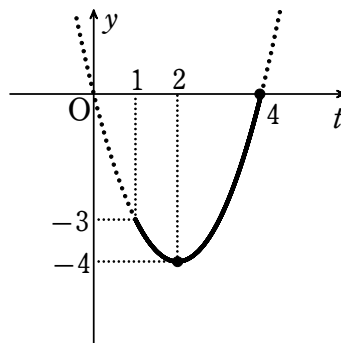
$t = 4$ のとき $2^x = 4$ よって $x = 2$

$t = 2$ のとき $2^x = 2$ よって $x = 1$

したがって、 y は

$x = 2$ で最大値 0, $x = 1$ で最小値 -4

をとる。



B 16 - 7

1.25^n の整数部分が 3 桁であるような自然数 n の値の範囲を求めよ。

ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

解答 $21 \leq n \leq 30$

1.25^n の整数部分が 3 桁であるとき $10^2 \leq 1.25^n < 10^3$

各辺の常用対数をとると $\log_{10} 10^2 \leq \log_{10} 1.25^n < \log_{10} 10^3$ …… ①

ここで、 $1.25 = \frac{5}{4} = \frac{10}{2^3}$ であるから

$$\log_{10} 1.25^n = n \log_{10} \frac{10}{2^3} = n(\log_{10} 10 - \log_{10} 2^3) = n(1 - 3\log_{10} 2)$$

ゆえに、①は $2 \leq n(1 - 3\log_{10} 2) < 3$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ を代入して $2 \leq 0.097n < 3$

よって $20.6 \dots \leq n < 30.9 \dots$

したがって、自然数 n の値の範囲は $21 \leq n \leq 30$

B 16 - 8

$\left(\frac{1}{30}\right)^{20}$ を小数で表したとき、小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

解答 小数第 30 位

$$\log_{10} \left(\frac{1}{30}\right)^{20} = -20 \log_{10} 30 = -20(\log_{10} 3 + \log_{10} 10) = -20 \times (0.4771 + 1) = -29.542$$

よって $-30 < \log_{10} \left(\frac{1}{30}\right)^{20} < -29$ ゆえに $10^{-30} < \left(\frac{1}{30}\right)^{20} < 10^{-29}$

したがって、 $\left(\frac{1}{30}\right)^{20}$ は小数第 30 位に初めて 0 でない数字が現れる。

C 16 - 1

連立方程式 $8 \cdot 3^x - 3^y = -27$, $\log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1$ を解け。

解答 $x=3$, $y=5$

$$\begin{cases} 8 \cdot 3^x - 3^y = -27 & \dots\dots ① \\ \log_2(x+1) - \log_2(y+3) = -1 & \dots\dots ② \end{cases} \text{ とする。}$$

②において、真数は正であるから $x+1 > 0$, $y+3 > 0$

すなわち $x > -1$, $y > -3$ $\dots\dots ③$

②を変形して $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(y+3)$

ゆえに $\log_2 2(x+1) = \log_2(y+3)$

よって $2(x+1) = y+3$

すなわち $y = 2x - 1$ $\dots\dots ④$

④を①に代入すると $8 \cdot 3^x - 3^{2x-1} = -27$

したがって $8 \cdot 3^x - \frac{1}{3}(3^x)^2 = -27$

すなわち $(3^x)^2 - 24 \cdot 3^x - 81 = 0$

ゆえに $(3^x + 3)(3^x - 27) = 0$

$3^x + 3 > 0$ であるから $3^x = 27$ よって $x = 3$

$x = 3$ を④に代入すると $y = 5$

$x = 3, y = 5$ は③を満たす。

したがって $x = 3, y = 5$

C 16 - 2

不等式 $\log_2\{\log_3(x-1) + \log_3(x+7)\} < 1$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

解答 $-3 + \sqrt{17} < x < 2$

真数は正であるから $x-1 > 0$ かつ $x+7 > 0$ …… ①

更に, $\log_3(x-1) + \log_3(x+7) > 0$ から $\log_3\{(x-1)(x+7)\} > \log_3 1$

底3は1より大きいから $(x-1)(x+7) > 1$

ゆえに $x^2 + 6x - 8 > 0$

よって $x < -3 - \sqrt{17}$, $-3 + \sqrt{17} < x$ …… ②

$-3 - \sqrt{17} < -7$, $1 < -3 + \sqrt{17}$ であるから, ①, ②より, 真数に関する条件は

$-3 + \sqrt{17} < x$ …… ③

このとき, 不等式から $\log_2[\log_3\{(x-1)(x+7)\}] < \log_2 2$

底2は1より大きいから $\log_3\{(x-1)(x+7)\} < 2 = \log_3 9$

底3は1より大きいから $(x-1)(x+7) < 9$

ゆえに $x^2 + 6x - 16 < 0$ すなわち $(x+8)(x-2) < 0$

よって $-8 < x < 2$ …… ④

したがって, ③, ④から $-3 + \sqrt{17} < x < 2$

C 16 - 3

関数 $y = 8(2^x + 2^{-x}) - (4^x + 4^{-x}) - 10$ について, $2^x + 2^{-x} = t$ とおくとき, y を t の式で表せ。また, y の最大値とそのときの x の値を求めよ。

解答 $y = -t^2 + 8t - 8$, $x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$ で最大値 8

$4^x + 4^{-x} = 2^{2x} + 2^{-2x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}$

$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$

ゆえに $y = 8t - (t^2 - 2) - 10$ よって $y = -t^2 + 8t - 8$

$2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号は $2^x = 2^{-x}$ すなわち $x = 0$ のとき成り立つ。

ゆえに $t \geq 2$ …… ①

また $y = -(t-4)^2 + 8$

① の範囲において、 y は $t = 4$ で最大値 8 をとる。

$t = 4$ のとき $2^x + 2^{-x} = 4$

両辺に 2^x を掛けて整理すると $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$

$2^x > 0$ であるから $2^x = 2 \pm \sqrt{3}$ よって $x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$

したがって $x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$ で最大値 8

参考 $t = 2^x + 2^{-x}$ のグラフは、右の図のようになり、

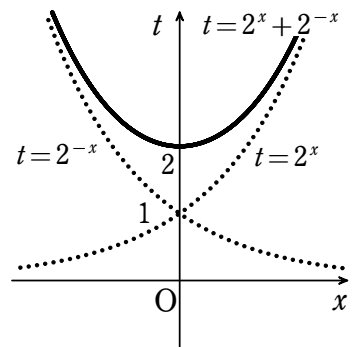
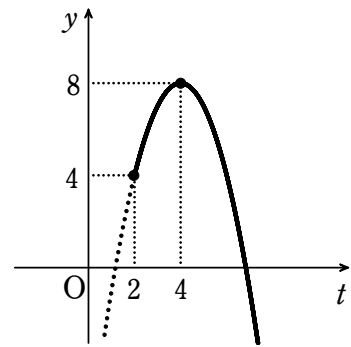
1 つの t の値に対応する x の値の個数は

$t < 2$ のとき 0 個

$t = 2$ のとき 1 個

$t > 2$ のとき 2 個

となる。



C 16 - 4

1 枚で 70 % の花粉を除去できるフィルターがある。99.99 % より多くの花粉を一度に除去するには、このフィルターは最低何枚必要か。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

解答 8 枚

1 枚のフィルターで 30 % の花粉が残るから、 n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る。

よって、求める条件は $0.3^n < 1 - 0.9999$ すなわち $0.3^n < 0.0001$

この両辺の常用対数をとると $n \log_{10} 0.3 < \log_{10} 0.0001$

この不等式を変形して

$$n \log_{10}(3 \times 10^{-1}) < \log_{10} 10^{-4}$$

$$n(\log_{10} 3 - 1) < -4$$

$$-0.5229n < -4$$

$$\text{よって } n > \frac{4}{0.5229} = 7.6 \dots\dots$$

したがって、フィルターは最低 8 枚必要である。

C 16 - 5

12^{30} について、次の問いに答えよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

- (1) 12^{30} の桁数を求めよ。
- (2) 12^{30} の最高位の数字を求めよ。
- (3) 12^{30} の一の位の数字を求めよ。

解答 (1) 33 桁 (2) 2 (3) 4

$$\begin{aligned} (1) \log_{10} 12^{30} &= 30 \log_{10} 2^2 \cdot 3 = 30(2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\ &= 30(2 \times 0.3010 + 0.4771) = 32.373 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } 32 < \log_{10} 12^{30} < 33 \quad \text{よって } 10^{32} < 12^{30} < 10^{33}$$

したがって 12^{30} は 33 桁の整数

$$(2) (1) \text{ から } 12^{30} = 10^{32.373} = 10^{32} \times 10^{0.373}$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010 < 0.373 < 0.4771 = \log_{10} 3 \quad \text{であるから}$$

$$2 < 10^{0.373} < 3$$

よって 12^{30} の最高位の数字は 2

$$(3) 12^{30} = (10 + 2)^{30}$$

$2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64 \dots$ となり 2^n の一の位は、2, 4, 8, 6 を繰り返す。

$$2^{30} = 2^{4 \times 7 + 2} = (2^4)^7 \times 2^2 \quad \text{であるから } 2^{30} \text{ の一の位の数字は } 4$$

C 16 - 6

不等式 $(\log_x y)^2 + 2 \leq 3 \log_x y$ の表す領域を図示せよ。

解答 [図] 境界線は 2 点 (0, 0), (1, 1) を含まない

で、他は含む。

対数の底, 真数の条件から

$$x > 0, x \neq 1, y > 0$$

$$\text{不等式から} \quad (\log_x y)^2 - 3\log_x y + 2 \leq 0$$

$$\text{すなわち} \quad (\log_x y - 1)(\log_x y - 2) \leq 0$$

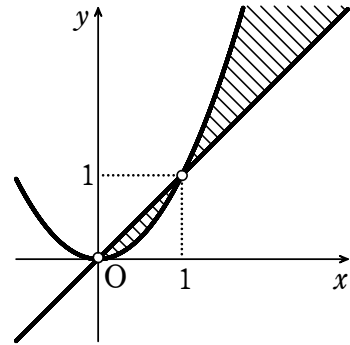
$$\text{ゆえに} \quad 1 \leq \log_x y \leq 2$$

$$\text{よって, } 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad x^2 \leq y \leq x$$

$$x > 1 \text{ のとき} \quad x \leq y \leq x^2$$

したがって、求める領域は右の図の斜線部分である。

ただし、境界線は2点 $(0, 0)$, $(1, 1)$ を含まないで、他は含む。



C 16 - 7

座標平面上で不等式 $2(\log_3 x - 1) \leq \log_3 y - 1 \leq \log_3 \left(\frac{x}{3}\right) + \log_3(2 - x)$ を満たす点 (x, y) 全体の作る領域を図示せよ。

解答 [図] 境界線は原点を除き他は含む

真数は正であるから $x > 0$ かつ $y > 0$ かつ $2 - x > 0$

すなわち $0 < x < 2$ かつ $y > 0$ …… ①

$2(\log_3 x - 1) \leq \log_3 y - 1$ から $\log_3 y \geq 2\log_3 x - 1$

よって $\log_3 y \geq \log_3 \left(\frac{x^2}{3}\right)$

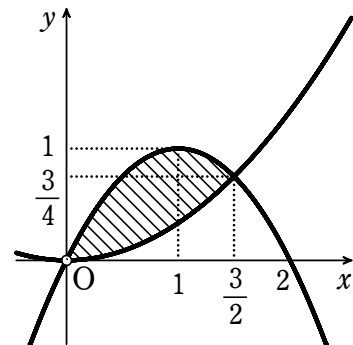
底 3 は 1 より大きいから $y \geq \frac{x^2}{3}$ …… ②

$\log_3 y - 1 \leq \log_3 \left(\frac{x}{3}\right) + \log_3(2 - x)$ から

$$\log_3 y \leq \log_3 x(2 - x)$$

底 3 は 1 より大きいから $y \leq x(2 - x)$ よって $y \leq -(x - 1)^2 + 1$ …… ③

①, ②, ③ から、求める領域は[図]の斜線部分である。ただし、境界線は原点を除いて他は含む。



第 17 章 数学 II の微分

A 17 - 1

次の極限値を求めよ。

$$(ア) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

$$(イ) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 12}$$

解答 (1) (ア) 12 (イ) $\frac{5}{7}$

$$(ア) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) \\ = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 12$$

$$(イ) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x + 3)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 2}{x - 4} = \frac{-3 - 2}{-3 - 4} = \frac{5}{7}$$

A 17 - 2

導関数の定義に従って、次の関数の導関数を求めよ。

$$f(x) = x^3 - 3x$$

解答 $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x + h)^3 - 3(x + h)\} - (x^3 - 3x)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 - 3)h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 - 3 + 3xh + h^2) = 3x^2 - 3$$

A 17 - 3

次の関数を微分せよ。

$$(1) y = x^3 - 7x^2 - 8$$

$$(2) y = -2x^3 + 6x^2 + 4x$$

$$(3) y = \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

解答 (4) $y' = 3x^2 - 14x$ (5) $y' = -6x^2 + 12x + 4$ (6) $y' = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

$$(4) y' = (x^3)' - 7(x^2)' - (8)' = 3x^2 - 7 \cdot 2x - 0 = 3x^2 - 14x$$

$$(5) y' = -2(x^3)' + 6(x^2)' + 4(x)' = -2 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x + 4 \cdot 1 = -6x^2 + 12x + 4$$

$$(6) y' = \frac{5}{6}(x^3)' - \frac{1}{4}(x)' + \left(\frac{3}{2}\right)' = \frac{5}{6} \cdot 3x^2 - \frac{1}{4} \cdot 1 + 0 = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{4}$$

A 17 - 4

関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフ上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

解答 $y = 2x - 3$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ とすると

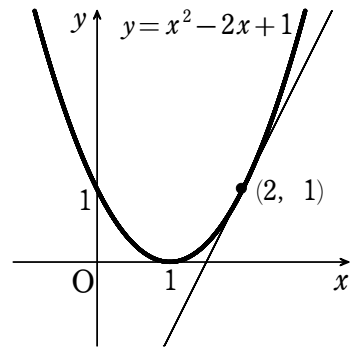
$$f'(x) = 2x - 2$$

ゆえに $f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$

よって、点 $(2, 1)$ における接線の方程式は

$$y - 1 = 2(x - 2)$$

すなわち $y = 2x - 3$

**A 17 - 5**

放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ について、傾きが 2 である接線の方程式と接点の座標を求めよ。

解答 $y = 2x - 8, (3, -2)$

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ とすると $f'(x) = 2x - 4$

接点の座標を $(a, a^2 - 4a + 1)$ とすると、接線の傾きが 2 であるから $f'(a) = 2$

ゆえに $2a - 4 = 2$ これを解いて $a = 3$

よって、接点の座標は $(3, -2)$

したがって、接線の方程式は $y - (-2) = 2(x - 3)$ すなわち $y = 2x - 8$

A 17 - 6

次の関数の増減を調べ、極値を求めよ。また、そのグラフをかけ。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

(2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$

解答 (1) $x = 1$ で極大値 3, $x = 3$ で極小値 -1 [図] (2) 極値はない [図]

(1) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$

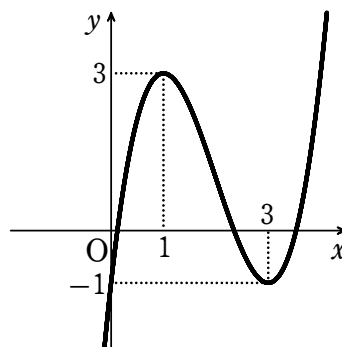
$y' = 0$ とすると $x = 1, 3$

y の増減表は、次のようになる。

x	...	1	...	3	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

よって、 $x=1$ で極大値 3、 $x=3$ で極小値 -1 をとる。

また、グラフは [図]



$$(2) \quad y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = 1$$

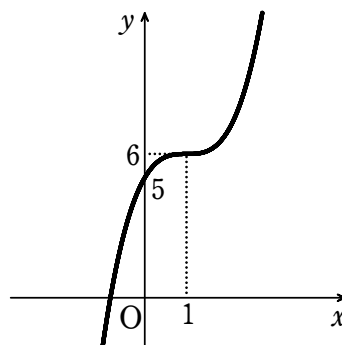
y の増減表は、次のようになる。

x	...	1	...
y'	+	0	+
y	↗	6	↗

すべての実数について $y' \geq 0$ であるから、 y は常に増加する。

よって、極値はない。

また、グラフは [図]



B 17 - 1

次の等式が成り立つように、定数 a 、 b の値を定めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx}{x-2} = 1$$

解答 $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx}{x-2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \text{ が成り立つとする。}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + bx) = 0$$

$$\text{よって、} 4a + 2b = 0 \text{ となり } b = -2a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{このとき } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 - 2ax}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} ax = 2a$$

$2a=1$ のとき ① が成り立つから $a=\frac{1}{2}$

このとき、② から $b=-1$ したがって $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$

B 17 - 2

次の 2 つの条件 [1], [2] をともに満たす 2 次関数 $f(x)$ と定数 k の値を求めよ。

$$[1] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$$[2] \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = k$$

解答 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$, $k = -3$

極限値が存在するためには $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

ゆえに、 $f(0) = 0$, $f(2) = 0$ であり、 $f(x)$ は x , $x-2$ を因数にもつ。

また、 $f(x)$ は 2 次関数であるから $f(x) = ax(x-2)$ ($a \neq 0$) とおける。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a(x-2) = -2a \quad [1] \text{ から } -2a = 3 \quad \dots\dots ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} ax = 2a \quad [2] \text{ から } 2a = k \quad \dots\dots ②$$

①, ② から $a = -\frac{3}{2}$, $k = -3$ これは $a \neq 0$ を満たす。

したがって $f(x) = -\frac{3}{2}x(x-2) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

B 17 - 3

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、次の極限を $f'(a)$ など表せ。

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h}$$

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-2h)}{h}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(x)}{x-a}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(a)}{x-a}$$

解答 (1) $3f'(a)$ (2) $5f'(a)$ (3) $3a^2 f(a) - a^3 f'(a)$ (4) $2af(a) + a^2 f'(a)$

$$(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \cdot 3 = 3f'(a)$$

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a) + f(a) - f(a-2h)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-2h) - f(a)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \cdot 3 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{-2h} \cdot (-2) \\
&= 3f'(a) + 2f'(a) = 5f'(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(x)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 f(a) - a^3 f(a) + a^3 f(a) - a^3 f(x)}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \cdot f(a) - \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot a^3 \\
&= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) \cdot f(a) - f'(a) \cdot a^3 \\
&= 3a^2 f(a) - a^3 f'(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(x) - a^2 f(x) + a^2 f(x) - a^2 f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \cdot f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot a^2 \\
&= \lim_{x \rightarrow a} (x + a) \cdot f(x) + f'(a) \cdot a^2 \\
&= 2a f(a) + a^2 f'(a)
\end{aligned}$$

別解 $x^2 f(x) = g(x)$ とおくと 与式 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

よって $\{x^2 f(x)\}' = 2xf(x) + x^2 f'(x)$

したがって $g'(a) = 2af(a) + a^2 f'(a)$

B 17 - 4

関数 $y = x^2 - 3x + 6$ のグラフに点 $(1, 0)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

解答 $y = -5x + 5, y = 3x - 3$

$y = x^2 - 3x + 6$ を微分すると $y' = 2x - 3$

接点の座標を $(a, a^2 - 3a + 6)$ とすると、接線の傾きは $2a - 3$ となるから、その方程式

は $y - (a^2 - 3a + 6) = (2a - 3)(x - a)$

すなわち $y = (2a - 3)x - a^2 + 6$ …… ①

この直線が点 (1, 0) を通るから

$$0 = 2a - 3 - a^2 + 6$$

よって $a^2 - 2a - 3 = 0$

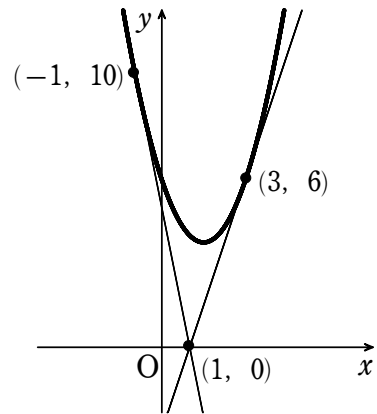
すなわち $(a + 1)(a - 3) = 0$

ゆえに $a = -1, 3$

したがって、求める接線の方程式は、① より

$$a = -1 \text{ のとき } y = -5x + 5$$

$$a = 3 \text{ のとき } y = 3x - 3$$



B 17 - 5

2つの曲線 $y = x^3 + ax^2$ と $y = x^2 + bx + c$ が点 (2, 4) において、共通の接線をもつとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

解答 $a = -1, b = 4, c = -8$

$f(x) = x^3 + ax^2, g(x) = x^2 + bx + c$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax, g'(x) = 2x + b$$

2つの曲線はともに点 (2, 4) を通るから $f(2) = 4, g(2) = 4$

よって $8 + 4a = 4$ …… ①

$$4 + 2b + c = 4$$
 …… ②

また、点 (2, 4) において、共通の接線をもつから $f'(2) = g'(2)$

よって $12 + 4a = 4 + b$ …… ③

①, ②, ③ を解いて $a = -1, b = 4, c = -8$

B 17 - 6

2つの放物線 $y = -x^2 + 1, y = x^2 + 6x + 10$ の共通接線の方程式を求めよ。

解答 $y = 1, y = 6x + 10$

$y = -x^2 + 1$ から $y' = -2x$

よって、放物線 $y = -x^2 + 1$ 上の点 $(a, -a^2 + 1)$ における接線の方程式は

$$y - (-a^2 + 1) = -2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = -2ax + a^2 + 1 \quad \text{…… ①}$$

直線 ① が放物線 $y = x^2 + 6x + 10$ にも接するとき、 $-2ax + a^2 + 1 = x^2 + 6x + 10$ すなわ

ち $x^2 + 2(a+3)x - a^2 + 9 = 0$ の判別式 D について、 $D=0$ が成り立つ。

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - 1 \cdot (-a^2 + 9) = 2a^2 + 6a = 2a(a+3)$$

であるから $2a(a+3)=0$ よって $a=0, -3$

これを①に代入すると、求める接線の方程式は $y=1, y=6x+10$

別解 [恒等式の考え方を利用] (①を求めるまで同じ)

$$y = x^2 + 6x + 10 \text{ から } y' = 2x + 6$$

よって、放物線 $y = x^2 + 6x + 10$ 上の点 $(b, b^2 + 6b + 10)$ における接線の方程式は

$$y - (b^2 + 6b + 10) = (2b + 6)(x - b) \quad \text{すなわち} \quad y = (2b + 6)x - b^2 + 10 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

①と②が一致するとき

$$-2a = 2b + 6 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$a^2 + 1 = -b^2 + 10 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

③から $a = -b - 3$ これを④に代入して $(-b - 3)^2 + 1 = -b^2 + 10$

整理して $2b^2 + 6b = 0$ すなわち $2b(b + 3) = 0$ よって $b = 0, -3$

これを②に代入すると、求める接線の方程式は $y = 6x + 10, y = 1$

B 17 - 7

次の関数の極値を求め、そのグラフをかけ。

(1) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

(2) $y = x^4 - 4x^3 + 5$

解答 (1) $x = -2$ で極小値 -32 , $x = 0$ で極大値 0 , $x = 1$ で極小値 -5 [図]

(2) $x = 3$ で極小値 -22 [図]

(1) $y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x+2)(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = -2, 0, 1$

y の増減表は次のようになる。

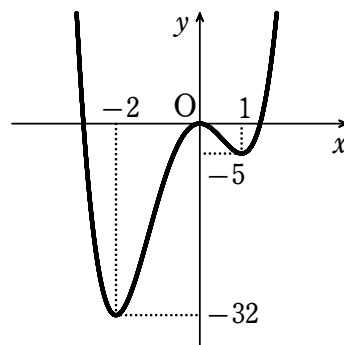
x	...	-2	...	0	...	1	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$\searrow$	極小 -32	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -5	$\nearrow$

よって、 y は $x = -2$ で極小値 -32 ,

$x = 0$ で極大値 0 ,

$x = 1$ で極小値 -5 をとる。

また、グラフは右の図のようになる。



$$(2) \quad y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

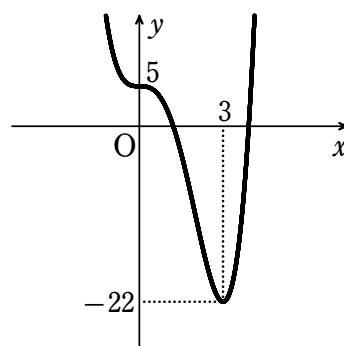
$$y' = 0 \text{ とすると } x = 0, 3$$

y の増減表は次のようになる。

x	...	0	...	3	...
y'	-	0	-	0	+
y		5		極小 -22	

よって、 y は $x=3$ で極小値 -22 をとる。

また、グラフは右の図のようになる。



注意 $x=0$ では、極大でも極小でもない。

B 17 - 8

関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ は $x=3$ で極大値 -26 をとる。定数 a, b の値を求めよ。

解答 解なし。 (極小~なら) $a = -9, b = 1$; 極大値 6

(注) 問題変更のため、「解なし」。極大 $\Rightarrow$ 極小と問題文を変えると、以下の解答。

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b \text{ を微分すると } f'(x) = 3x^2 - 6x + a$$

$$f(x) \text{ が } x=3 \text{ で極小値 } -26 \text{ をとるから } f'(3) = 0, f(3) = -26$$

$$\text{よって } 9 + a = 0, 3a + b = -26 \quad \text{これを解くと } a = -9, b = 1$$

このとき

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

したがって、右の増減表が得られ、 $f(x)$ は条件を満たす。

$$\text{よって } a = -9, b = 1$$

極大値 6

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		極大 6		極小 -26	

B 17 - 9

次の条件を満たすように、定数 k の値の範囲を定めよ。

(1) 関数 $f(x) = x^3 - kx^2 + 5x - 1$ が常に増加する。

(2) 関数 $f(x) = -x^3 + kx^2 - 6x + 7$ が常に減少する。

解答 (1) $-\sqrt{15} \leq k \leq \sqrt{15}$ (2) $-3\sqrt{2} \leq k \leq 3\sqrt{2}$

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 - 2kx + 5$$

$f(x)$ が常に増加するための条件は、すべての実数 x について $f'(x) \geq 0$ が成り立つことである。

よって、2 次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると $D \leq 0$

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 3 \cdot 5 = k^2 - 15 \text{ であるから } k^2 - 15 \leq 0$$

$$\text{したがって } -\sqrt{15} \leq k \leq \sqrt{15}$$

$$(2) f'(x) = -3x^2 + 2kx - 6$$

$f(x)$ が常に減少するための条件は、すべての実数 x について $f'(x) \leq 0$ が成り立つことである。

よって、2 次方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると $D \leq 0$

$$\frac{D}{4} = k^2 - (-3) \cdot (-6) = k^2 - 18 \text{ であるから } k^2 - 18 \leq 0$$

$$\text{したがって } -3\sqrt{2} \leq k \leq 3\sqrt{2}$$

B 17 - 10

$a > 0$ とする。関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ が $x = -2$ で極大値、 $x = 1$ で極小値をとり、極大値と極小値の差が 27 であるとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

解答 $a = 2, b = 3, c = -12$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(x) \text{ が } x = -2, 1 \text{ で極値をとるとき } f'(-2) = 0, f'(1) = 0$$

$$\text{よって } 12a - 4b + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3a + 2b + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{極大値と極小値の差が 27 であるとき } f(-2) - f(1) = -9a + 3b - 3c = 27$$

$$\text{よって } 3a - b + c = -9 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ を解いて $a = 2, b = 3, c = -12$ これは $a > 0$ を満たす。

$$\text{このとき } f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x-1)(x+2)$$

したがって、右の増減表が得られ、条件を満たす。

$$\text{よって } a = 2, b = 3, c = -12$$

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 20	↘	極小 -7	↗

B 17 - 11

方程式 $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - a = 0$ が異なる 4 個の実数解 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をもち、そのうちの 2 個は正、残りの 2 個は負であるとする。

- (1) 定数 a の値の範囲を求めよ。
 (2) 2番目に大きい解 β のとり得る値の範囲を求めよ。

解答 (1) $-9 < a < 0$ (2) $2 < \beta < 3$

方程式を変形すると $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x = a$

よって、方程式の実数解は、曲線 $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$ …… ① と直線 $y = a$ …… ②
 の共有点の x 座標である。

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 4\{x^2(x-3) - (x-3)\} \\ &= 4(x^2 - 1)(x-3) = 4(x+1)(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = \pm 1, 3$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

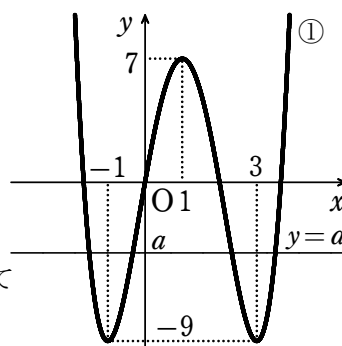
x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小 -9	$\nearrow$	極大 7	$\searrow$	極小 -9	$\nearrow$

よって、曲線 ① は右の図のようになる。

- (1) 曲線 ① と直線 ② が $x > 0$ と $x < 0$ のそれぞれにおいて異なる 2 点を共有するような a の値の範囲を求めて

$$-9 < a < 0$$

- (2) x 軸との交点は、 $x = 0, 2, 1 \pm \sqrt{7}$ 。よって、 $2 < \beta < 3$



B 17 - 12

点 $A(0, a)$ から曲線 $C: y = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ に 3 本の接線が引けるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $-7 < a < 20$

$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ から $y' = 3x^2 - 18x + 15$

C 上の点 $(t, t^3 - 9t^2 + 15t - 7)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 9t^2 + 15t - 7) = (3t^2 - 18t + 15)(x - t)$$

すなわち $y = (3t^2 - 18t + 15)x - 2t^3 + 9t^2 - 7$

この接線が点 $(0, a)$ を通るとすると

$$-2t^3 + 9t^2 - 7 = a \quad \text{…… ①}$$

3 次関数のグラフでは、接点が異なると接線が異なる。

よって、点 A から曲線 C に引くことができる接線の本数は、① の異なる実数解の個数に一致する。

$$f(t) = -2t^3 + 9t^2 - 7 \text{ とすると } f'(t) = -6t^2 + 18t = -6t(t-3)$$

$$f'(t) = 0 \text{ とすると } t = 0, 3$$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	...	0	...	3	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	↘	-7	↗	20	↘

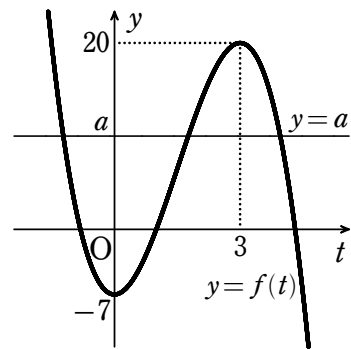
よって、 $y = f(t)$ のグラフは右の図のようになる。

t の 3 次方程式 ① が異なる 3 個の実数解をもつとき、

点 A から曲線 C に 3 本の接線が引ける。

したがって、曲線 $y = f(t)$ と直線 $y = a$ が異なる 3 点で交わる条件を求めて

$$-7 < a < 20$$



B 17 - 13

$x > 0$ のとき、不等式 $x^3 - 5x^2 + 3x + k > 0$ が成り立つように、定数 k の値の範囲を定めよ。

解答 $k > 9$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + k \text{ とすると } f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = (3x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{3}, 3$$

$x > 0$ において、 $f(x)$ の増減表は、次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{3}$	...	3	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	k	↗	$k + \frac{13}{27}$	↘	$k - 9$	↗

$k > k - 9$ であるから、 $x > 0$ における $f(x)$ の最小値は $f(3) = k - 9$

よって、 $x > 0$ において、 $f(x) > 0$ が成り立つためには、 $f(3) > 0$ であればよいから
 $k - 9 > 0$ すなわち $k > 9$

C 17 - 1

3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ は極大値と極小値をもち、それらを区間 $-1 \leq x \leq 1$ 内にとるものとする。この条件を満たすような実数の組 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ。

解答 [図]

境界線のうち、放物線を含まない、他は含む

題意から $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもち、それらがともに $-1 \leq x \leq 1$ の範囲にあることとなる。

$3x^2 + 2ax + b = 0$ の判別式 D について、 $D > 0$ から $a^2 - 3b > 0$ …… ①

$f'(-1) \geq 0, f'(1) \geq 0$ から $3 - 2a + b \geq 0$ …… ②, $3 + 2a + b \geq 0$ …… ③

$f'(x) = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}$ であるから、放物線

$y = f'(x)$ の軸の方程式は $x = -\frac{a}{3}$ で $-1 < -\frac{a}{3} < 1$

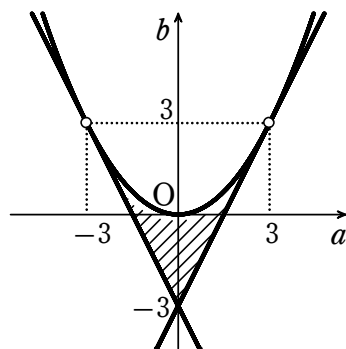
ゆえに $-3 < a < 3$ …… ④

よって、条件を満たす点 (a, b) の存在範囲は、

①, ②, ③, ④ の共通範囲。

右図の斜線部分。

境界線のうち、放物線を含まない、他は含む。

**C 17 - 2**

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ とする。区間 $a \leq x \leq a+1$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ を求めよ。

解答 $a < 0, \frac{9 + \sqrt{33}}{6} \leq a$ のとき $M(a) = a^3 - 3a^2 + 4$;

$0 \leq a < 1$ のとき $M(a) = 4$; $1 \leq a < \frac{9 + \sqrt{33}}{6}$ のとき $M(a) = a^3 - 6a^2 + 9a$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x=1, 3$$

増減表から, $y=f(x)$ のグラフは図のようになる。

[1] $a+1 < 1$ すなわち $a < 0$ のとき

$$M(a) = f(a+1)$$

$$= (a+1)^3 - 6(a+1)^2 + 9(a+1)$$

$$= a^3 - 3a^2 + 4$$

[2] $a < 1 \leq a+1$ すなわち $0 \leq a < 1$ のとき

$$M(a) = f(1) = 4$$

次に, $2 < a < 3$ のとき, $f(a) = f(a+1)$ とすると

$$a^3 - 6a^2 + 9a = a^3 - 3a^2 + 4$$

$$\text{ゆえに } 3a^2 - 9a + 4 = 0$$

$$\text{よって } a = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{6} \quad 2 < a < 3 \text{ であるから } a = \frac{9 + \sqrt{33}}{6}$$

[3] $1 \leq a < \frac{9 + \sqrt{33}}{6}$ のとき $M(a) = f(a) = a^3 - 6a^2 + 9a$

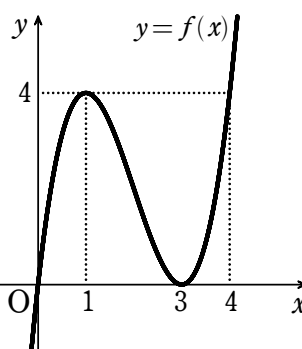
[4] $\frac{9 + \sqrt{33}}{6} \leq a$ のとき $M(a) = f(a+1) = a^3 - 3a^2 + 4$

以上から $a < 0$, $\frac{9 + \sqrt{33}}{6} \leq a$ のとき $M(a) = a^3 - 3a^2 + 4$;

$0 \leq a < 1$ のとき $M(a) = 4$;

$1 \leq a < \frac{9 + \sqrt{33}}{6}$ のとき $M(a) = a^3 - 6a^2 + 9a$

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



C 17 - 3

$a > 0$ とする。関数 $f(x) = |x^3 - 3a^2x|$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ。

(2) $M(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

解答 (1) $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき $M(a) = 1 - 3a^2$, $\frac{1}{2} < a \leq 1$ のとき $M(a) = 2a^3$,

$1 < a$ のとき $M(a) = 3a^2 - 1$

(2) $a = \frac{1}{2}$

(1) $f(-x) = f(x)$ であるから, $0 \leq x \leq 1$ で考えればよい。

$0 \leq x \leq \sqrt{3}a$ のとき $f(x) = -x^3 + 3a^2x$,

$$f'(x) = -3(x^2 - a^2) = -3(x+a)(x-a)$$

$\sqrt{3}a \leq x$ のとき $f(x) = x^3 - 3a^2x$,

$$f'(x) = 3(x^2 - a^2) \geq 3\{(\sqrt{3}a)^2 - a^2\} = 6a^2 > 0$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	a	...	$\sqrt{3}a$	...
$f'(x)$	/	+	0	-	/	+
$f(x)$	0	↗	$2a^3$	↘	0	↗

$\sqrt{3}a \leq x$ において, $f(x) = 2a^3$ を満たす x は $x^3 - 3a^2x = 2a^3$ から

$$(x+a)^2(x-2a)=0 \quad \text{よって} \quad x=2a$$

[1] $0 < 2a \leq 1$ すなわち $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき $M(a) = f(1) = 1 - 3a^2$

[2] $0 < a \leq 1 < 2a$ すなわち $\frac{1}{2} < a \leq 1$ のとき $M(a) = f(a) = 2a^3$

[3] $1 < a$ のとき $M(a) = f(1) = 3a^2 - 1$

(2) (1)の結果から, $M(a)$ は, $0 < a \leq \frac{1}{2}$ で単調に減少, $\frac{1}{2} \leq a$ で単調に増加。

よって, $a = \frac{1}{2}$ において $M(a)$ が最小になる。

C 17 - 4

曲線 $y = x^3 - x$ と直線 $y = 2x + a$ が異なる 3 点を共有するとき, 定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $-2 < a < 2$

与えられた曲線と直線の共有点の個数は $x^3 - x = 2x + a$ すなわち $x^3 - 3x = a$ の異なる実数解の個数に一致する。よって, $y = x^3 - 3x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数が 3 個であるような a の値の範囲を求めればよい。

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ とおくと } f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

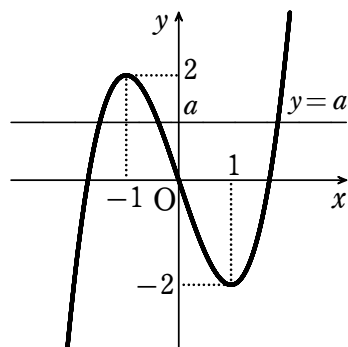
$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \pm 1$$

$f(x)$ の増減表は, 次のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

ゆえに, $y = f(x)$ のグラフは右図のよう

になる。よって, 求める a の値の範囲は $-2 < a < 2$



C 17 - 5

曲線 $C: y = \frac{1}{3}x^3$ 上の点 $A\left(a, \frac{1}{3}a^3\right)$ における接線を l_1 とする (ただし, $a > 0$)。

また, l_1 とは異なる C の接線のうち, 点 A を通る接線を l_2 とするとき

- (1) 接線 l_1 および l_2 が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α および β とするとき, $\tan \alpha, \tan \beta$ を a を用いて表せ。
- (2) l_1 が l_2 となす角を θ (ただし, $0^\circ < \theta < 90^\circ$) とするとき, $\tan \theta$ を a を用いて表せ。
- (3) $\tan \theta$ の最大値と, そのときの a の値を求めよ。

解答 (1) $\tan \alpha = a^2, \tan \beta = \frac{1}{4}a^2$ (2) $\frac{3a^2}{4+a^4}$

(3) $a = \sqrt{2}$ のとき最大値 $\frac{3}{4}$

(1) $y' = x^2$ から, l_1 の方程式は $y = a^2(x - a) + \frac{1}{3}a^3$ よって $l_1: y = a^2x - \frac{2}{3}a^3$

l_2 の接点の x 座標を b とする.

l_2 の方程式は $y = b^2x - \frac{2}{3}b^3$ で, これが点 $\left(a, \frac{1}{3}a^3\right)$ を通るから $\frac{1}{3}a^3 = b^2a - \frac{2}{3}b^3$

とすると $2b^3 - 3ab^2 + a^3 = 0$ ゆえに $(b-a)^2(2b+a) = 0$

$b \neq a$ から $b = -\frac{1}{2}a$ よって $l_2: y = \frac{a^2}{4}x + \frac{1}{12}a^3$

したがって $\tan \alpha = a^2, \tan \beta = \frac{1}{4}a^2$

(2) $\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{1 + \frac{1}{4}a^4} = \frac{3a^2}{4 + a^4}$

(3) $\frac{a^2}{4 + a^4} > 0$ から, $\frac{a^2}{4 + a^4}$ が最大のとき, $\frac{4 + a^4}{a^2}$ は最小となる.

(相加平均) $\geq$ (相乗平均) により $\frac{4 + a^4}{a^2} = \frac{4}{a^2} + a^2 \geq 2\sqrt{\frac{4}{a^2} \cdot a^2} = 4$

等号成立は $\frac{4}{a^2} = a^2, a > 0$ から, $a = \sqrt{2}$ のとき.

ゆえに $a = \sqrt{2}$ のとき最大値 $\frac{3}{4}$

C 17 - 6

曲線 $y = x^4 - 4x^3 + 2x^2$ に異なる 2 点で接する直線の方程式と、その接点の x 座標 α, β ($\alpha < \beta$) を求めよ。

解答 $y = -4x - 1; \alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$

求める接線の方程式を $y = px + q$ とおくと

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - (px + q) = (x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

右辺を展開すると $x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + (\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2$

よって、係数を比較すると

$$-4 = -2(\alpha + \beta) \dots\dots ①, \quad 2 = \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 \dots\dots ②$$

$$-p = -2\alpha\beta(\alpha + \beta) \dots\dots ③, \quad -q = \alpha^2\beta^2 \dots\dots ④$$

①, ② から $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1 \dots\dots ⑤$

これを ③, ④ に代入すると $p = -4, q = -1$

よって、求める直線の方程式は $y = -4x - 1$

また、⑤ から、 α, β は 2 次方程式 $t^2 - 2t - 1 = 0$ の解。

よって $\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$

このとき $\beta = 1 \mp \sqrt{2}$ (複号同順)

$\alpha < \beta$ から $\alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$

C 17 - 7

xy 平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - x$ に 3 本の相異なる接線が引けるための条件を求め、その条件を満たす (a, b) のある範囲を図示せよ。

解答 [図] 境界線は含まない

接点の x 座標を t とすると、接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + t^3 - t \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

この直線が点 (a, b) を通るとき $b = (3t^2 - 1)a - 2t^3$

整理して $2t^3 - 3at^2 + a + b = 0$

この 3 次方程式が異なる 3 つの実数解をもつ条件を求める。

$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b$ とすると

$$f'(t) = 6t(t - a)$$

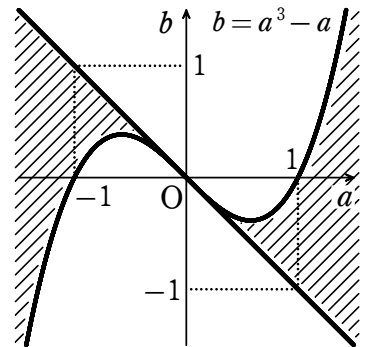
よって、求める条件は $f(0)f(a) < 0$

すなわち $(a + b)(b - a^3 + a) < 0$

よって $\begin{cases} a + b > 0 \\ b - a^3 + a < 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} a + b < 0 \\ b - a^3 + a > 0 \end{cases}$

すなわち $-a < b < a^3 - a$ または $a^3 - a < b < -a$

よって、求める範囲は図のようになる。ただし、境界線は含まない。



第 18 章 数学Ⅱの積分

A 18 - 1

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int (2-8x+9x^2)dx \quad (2) \int (x+2)^2dx \quad (3) \int (x-4)(2x+5)dx$$

解答 C は積分定数とする。

$$(4) 2x-4x^2+3x^3+C \quad (5) \frac{1}{3}x^3+2x^2+4x+C \quad (6) \frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-20x+C$$

C は積分定数とする。

$$(4) \text{ (与式)} = 2 \int dx - 8 \int x dx + 9 \int x^2 dx = 2x - 8 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C = 2x - 4x^2 + 3x^3 + C$$

$$(5) \text{ (与式)} = \int (x^2+4x+4)dx = \int x^2 dx + 4 \int x dx + 4 \int dx \\ = \frac{1}{3}x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 4x + C = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$$

$$(6) \text{ (与式)} = \int (2x^2-3x-20)dx = 2 \int x^2 dx - 3 \int x dx - 20 \int dx \\ = 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 20x + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 20x + C$$

A 18 - 2

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 (2x-3)dx \quad (2) \int_{-1}^2 (2x^2+x)dx \quad (3) \int_1^3 (3x^2-x+1)dx$$

解答 (4) -2 (5) $\frac{15}{2}$ (6) 24

$$(4) \text{ (与式)} = \left[x^2 - 3x \right]_0^1 = (1-3) - 0 = -2$$

$$(5) \text{ (与式)} = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \left(\frac{16}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{15}{2}$$

$$(6) \text{ (与式)} = \left[x^3 - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 = \left(27 - \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(1 - \frac{1}{2} + 1 \right) = 24$$

A 18 - 3

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 2x^2 - x + 3) dx$$

解答 $\frac{68}{3}$

$$\text{与式} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^2 = \left(4 + \frac{16}{3} - 2 + 6 \right) - \left(4 - \frac{16}{3} - 2 - 6 \right) = \frac{68}{3}$$

参考 n が 0 以上の整数のとき

$$\int_{-a}^a x^{2n+1} dx = 0, \quad \int_{-a}^a x^{2n} dx = 2 \int_0^a x^{2n} dx$$

これを用いると

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 2x^2 - x + 3) dx = 2 \int_0^2 (2x^2 + 3) dx = 2 \left[\frac{2}{3}x^3 + 3x \right]_0^2 = 2 \left\{ \left(\frac{16}{3} + 6 \right) - 0 \right\} = \frac{68}{3}$$

A 18 - 4

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-2}^3 (x-2)^2 dx$$

解答 $\frac{65}{3}$

$$\begin{aligned} (5) \quad (\text{与式}) &= \int_{-2}^3 (x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_{-2}^3 \\ &= (9 - 18 + 12) - \left(-\frac{8}{3} - 8 - 8 \right) = \frac{65}{3} \end{aligned}$$

別解 $(\text{与式}) = \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{-2}^3 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{64}{3} \right) = \frac{65}{3}$

A 18 - 5

関数 $y = x^2 - 4$ ($-3 \leq x \leq 1$) のグラフと 2 直線 $x = -3$, $x = 1$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 $\frac{34}{3}$

この関数のグラフと x 軸の交点の x 座標は、

$$x^2 - 4 = 0 \text{ を解いて } x = -2, 2$$

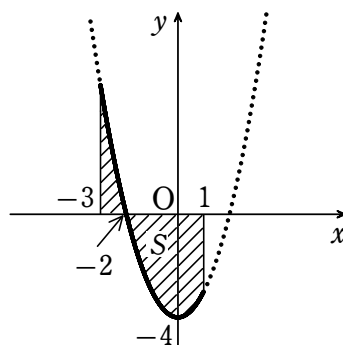
$$-3 \leq x \leq 1 \text{ であるから } x = -2$$

$$-3 \leq x \leq -2 \text{ で } y \geq 0$$

$$-2 \leq x \leq 1 \text{ で } y \leq 0$$

よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) dx + \int_{-2}^1 \{-(x^2 - 4)\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^1 = \frac{34}{3} \end{aligned}$$



A 18 - 6

2つの放物線 $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 4x - x^2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

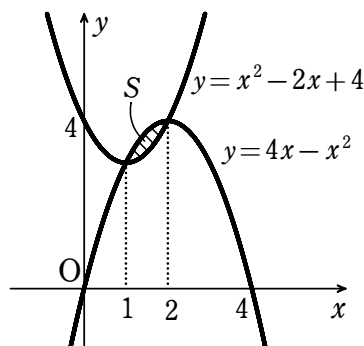
解答 $\frac{1}{3}$

方程式 $x^2 - 2x + 4 = 4x - x^2$ を解くと、

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ より } x = 1, 2$$

よって、求める面積 S は、図から

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(4x - x^2) - (x^2 - 2x + 4)\} dx \\ &= \int_1^2 (-2x^2 + 6x - 4) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x \right]_1^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



A 18 - 7

次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_1^x f(t) dt = 3x^2 - x + a$$

解答 $f(x) = 6x - 1$, $a = -2$

等式の両辺の関数を x で微分すると $f(x) = 6x - 1$

また、与えられた等式で $x = 1$ とおくと、左辺は 0 になるから

$$0 = 3 - 1 + a$$

$$\text{これを解いて } a = -2$$

A 18 - 8

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1) \quad f(x) = x + \int_0^2 f(t) dt$$

$$(2) \quad f(x) = 3x^2 - x \int_0^2 f(t) dt + 2$$

解答 (1) $f(x) = x - 2$ (2) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$

$\int_0^2 f(t) dt$ は定数であるから, $\int_0^2 f(t) dt = a$ (a は定数) とおく。

(1) $f(x) = x + a$ であるから

$$a = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 (t + a) dt = \left[\frac{t^2}{2} + at \right]_0^2 = 2 + 2a$$

よって $a = 2 + 2a$ これを解くと $a = -2$

したがって $f(x) = x - 2$

(2) $f(x) = 3x^2 - ax + 2$ であるから

$$a = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 (3t^2 - at + 2) dt = \left[t^3 - \frac{a}{2}t^2 + 2t \right]_0^2 = 8 - 2a + 4$$

よって $a = 8 - 2a + 4$ これを解くと $a = 4$

したがって $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$

A 18 - 9

次の定積分を求めよ。

$$(1) \quad \int_0^3 |x-1| dx$$

$$(2) \quad \int_0^5 |x^2 - 16| dx$$

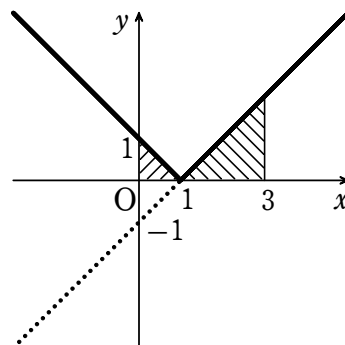
解答 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 47

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき $|x-1| = -(x-1) = -x+1$

$1 \leq x \leq 3$ のとき $|x-1| = x-1$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x-1| dx &= \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^3 (x-1) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - 0 \right\} + \left\{ \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

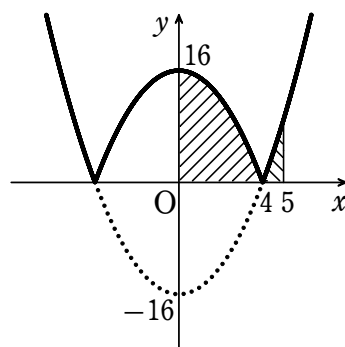


$$(2) \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ のとき } |x^2 - 16| = -(x^2 - 16) = -x^2 + 16$$

$$4 \leq x \leq 5 \text{ のとき } |x^2 - 16| = x^2 - 16$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^5 |x^2 - 16| dx &= \int_0^4 (-x^2 + 16) dx + \int_4^5 (x^2 - 16) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 16x \right]_0^4 + \left[\frac{x^3}{3} - 16x \right]_4^5 \\ &= \left\{ \left(-\frac{64}{3} + 64 \right) - 0 \right\} \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{125}{3} - 80 \right) - \left(\frac{64}{3} - 64 \right) \right\} \\ &= 47 \end{aligned}$$



B 18 - 1

関数 $y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

【解答】 $\frac{71}{48}$

曲線 $y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ と x 軸の交点の x 座標は、 $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ の解である。

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \text{ とすると } f(1) = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{よって } f(x) &= (x-1)(2x^2 + x - 1) \\ &= (x-1)(x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

$$f(x) = 0 \text{ を解いて } x = 1, -1, \frac{1}{2}$$

また、曲線は右の図のようになり

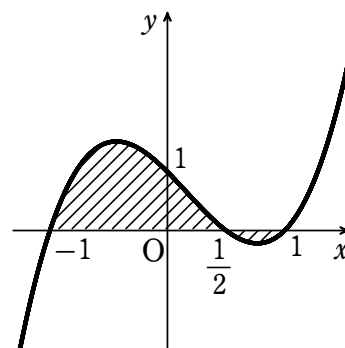
$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ において } y \geq 0,$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ において } y \leq 0$$

ゆえに、求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^3 - x^2 - 2x + 1) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^3 - x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{\frac{1}{2}}^1$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{71}{48}
 \end{aligned}$$

B 18 - 2

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $y = x^3 - 6x$, $y = x^2$

(2) $y = |x^2 - x - 2|$, $y = x + 1$

解答 (1) $\frac{253}{12}$ (2) $\frac{13}{3}$

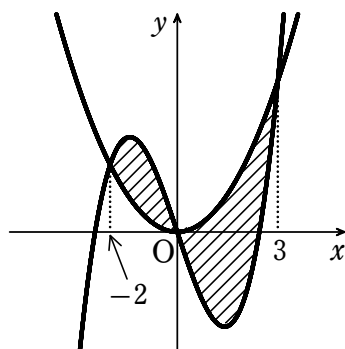
(1) 2 曲線の交点の x 座標は、方程式

$$x^3 - 6x = x^2 \quad \text{すなわち} \quad x(x+2)(x-3) = 0$$

を解いて $x = -2, 0, 3$

グラフから、求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^0 \{(x^3 - 6x) - x^2\} dx + \int_0^3 \{x^2 - (x^3 - 6x)\} dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 \\
 &= \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}
 \end{aligned}$$



(2) $|x^2 - x - 2| = |(x+1)(x-2)|$

$-1 \leq x \leq 2$ のとき $|x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2) = -x^2 + x + 2$

$x \leq -1$, $2 \leq x$ のとき $|x^2 - x - 2| = x^2 - x - 2$

$-1 \leq x \leq 2$ のとき、曲線と直線の交点の x 座標は、方程式

$$-x^2 + x + 2 = x + 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 1 = 0$$

を解いて $x = \pm 1$

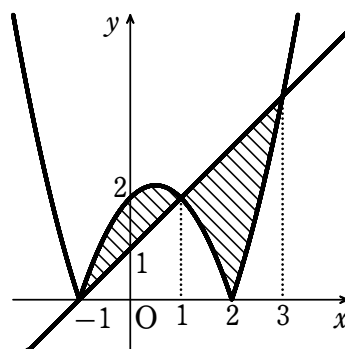
$x \leq -1$, $2 \leq x$ のとき、曲線と直線の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 - x - 2 = x + 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

を解いて $x = -1, 3$

グラフから、求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^1 \{(-x^2 + x + 2) - (x + 1)\} dx + \int_1^2 \{(x + 1) - (-x^2 + x + 2)\} dx$$

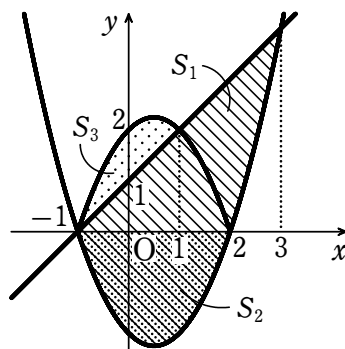


$$\begin{aligned}
& + \int_2^3 \{(x+1) - (x^2 - x - 2)\} dx \\
& = - \int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx + \int_2^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \\
& = \frac{1}{6} \{1 - (-1)\}^3 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_2^3 = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

別解 [面積の求め方]

右の図のように、曲線 $y = x^2 - x - 2$ と直線 $y = x + 1$ で囲まれた部分の面積を S_1 、曲線 $y = x^2 - x - 2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2 、曲線 $y = -x^2 + x + 2$ と直線 $y = x + 1$ で囲まれた部分の面積を S_3 とすると

$$\begin{aligned}
S &= S_1 - (2S_2 - S_3) + S_3 = S_1 - 2S_2 + 2S_3 \\
&= \int_{-1}^3 \{(x+1) - (x^2 - x - 2)\} dx \\
&\quad - 2 \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx + 2 \int_{-1}^1 \{(-x^2 + x + 2) - (x+1)\} dx \\
&= - \int_{-1}^3 (x+1)(x-3) dx + 2 \int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx - 2 \int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx \\
&= \frac{\{3 - (-1)\}^3}{6} - 2 \cdot \frac{\{2 - (-1)\}^3}{6} + 2 \cdot \frac{\{1 - (-1)\}^3}{6} \\
&= \frac{32}{3} - 9 + \frac{8}{3} = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$



B 18 - 3

曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ と、この曲線上の点 $(0, -1)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 $\frac{27}{4}$

$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ について

$$y' = 3x^2 - 6x + 3$$

$x = 0$ のとき $y' = 3$

よって、点 $(0, -1)$ における接線の方程式は

$$y - (-1) = 3(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 1$$

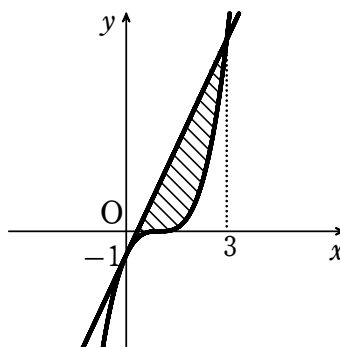
この接線と曲線の共有点の x 座標は、方程式

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3x - 1$$

すなわち $x^3 - 3x^2 = 0$ の解である。

因数分解して $x^2(x - 3) = 0$ より $x = 0, 3$

グラフから



$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{(3x - 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\} dx \\ &= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

B 18 - 4

放物線 $y = x^2 - x + 4$ に点 $(1, 0)$ から 2 本の接線を引くとき、放物線と接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 $\frac{16}{3}$

接点を P とし、その x 座標を t とする。

$y = x^2 - x + 4$ より、 $y' = 2x - 1$ であるから、点 P における接線の方程式は

$$y - (t^2 - t + 4) = (2t - 1)(x - t)$$

すなわち $y = (2t - 1)x - t^2 + 4$

これが点 $(1, 0)$ を通るから $0 = (2t - 1) \cdot 1 - t^2 + 4$

整理すると $t^2 - 2t - 3 = 0$

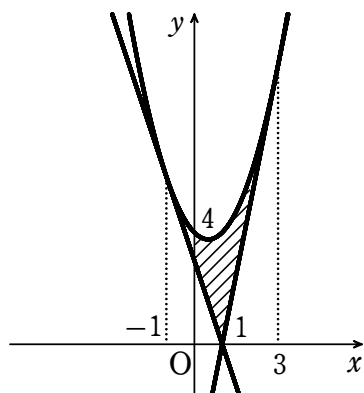
これを解くと $t = -1, 3$

よって、接線の方程式は $t = -1$ のとき $y = -3x + 3$

$$t=3 \quad \text{のとき} \quad y=5x-5$$

求める面積を S とすると、図から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(x^2 - x + 4) - (-3x + 3)\} dx \\ &\quad + \int_1^3 \{(x^2 - x + 4) - (5x - 5)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} + 1 + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) + (9 - 27 + 27) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 9 \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$



参考 [積分の計算]

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 6x + 9) dx = \int_{-1}^1 (x + 1)^2 dx + \int_1^3 (x - 3)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x + 1)^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{(x - 3)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{8}{3} - 0 + \left\{ 0 - \left(-\frac{8}{3} \right) \right\} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

B 18 - 5

座標平面上にある2つの放物線 $y = x^2$, $y = -2(x - 1)^2 + k$ が、ある点Aで共通接線をもつとき、定数 k の値を求めよ。また、これら2つの放物線と直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$$\boxed{\text{解}} \quad y = x^2 \cdots \cdots \textcircled{1} \quad y = -2(x-1)^2 + k \cdots \cdots \textcircled{2}$$

2つの放物線①, ②が接すればよい. よって

$$x^2 = -2(x-1)^2 + k$$

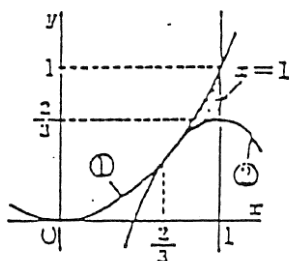
$$\Rightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} - k = 0$$

が重複解をもつ条件から

$$k = \frac{2}{3} \cdots \cdots (\text{答})$$

また, 求める面積を S とすると

接点の x 座標は $\frac{2}{3}$ だから



$$S = \int_{\frac{2}{3}}^1 \left\{ x^2 + 2(x-1)^2 - \frac{2}{3} \right\} dx$$

$$= \int_{\frac{2}{3}}^1 \left\{ 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \right\} dx$$

$$= \left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 \right]_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{1}{27} \cdots \cdots (\text{答})$$

B 18 - 6

(1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) 放物線 $y = x^2$ と, 点 $(2, 5)$ を通る直線で囲まれた部分の面積 S を最小にするような直線の方程式を求めよ。

解答 $y = 4x - 3$

x 軸に垂直な直線は適さないから, 求める直線の方程式は $y = m(x-2) + 5$ とおける。

放物線とこの直線の交点の x 座標は, 方程式

$$x^2 = m(x-2) + 5 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - mx + 2m - 5 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の実数解である。方程式①の判別式を D とすると

$$D = (-m)^2 - 4(2m - 5) = m^2 - 8m + 20 = (m-4)^2 + 4 > 0$$

よって, 方程式①は異なる2つの実数解をもつ。

その実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{m(x-2) + 5 - x^2\} dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

また、 $\beta - \alpha = \frac{m + \sqrt{D}}{2} - \frac{m - \sqrt{D}}{2} = \sqrt{D}$ であるから

$$S = \frac{1}{6}(\sqrt{D})^3 = \frac{1}{6}\{\sqrt{(m-4)^2 + 4}\}^3$$

したがって、 S は $m=4$ のとき最小となる。

このとき、直線の方程式は $y=4(x-2)+5$ すなわち $y=4x-3$

参考 $S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ において、 $(\beta - \alpha)^3$ の計算は、解と係数の関係を使ってもよい。

① について、解と係数の関係により $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = 2m - 5$

$$\begin{aligned} \text{よって } (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = m^2 - 4(2m - 5) = m^2 - 8m + 20 \\ &= (m - 4)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } (\beta - \alpha)^3 = \{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}} = \{(m - 4)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}}$$

B 18 - 7

直線 $y=kx$ が、放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するように、定数 k の値を定めよ。

解答 $k=2-\sqrt[3]{4}$

放物線 $y=2x-x^2$ と直線 $y=kx$ で囲まれた部分の面積を $S(k)$ とする。

放物線と直線の交点の x 座標は、方程式 $2x-x^2=kx$ を解いて $x=0, 2-k$

面積を 2 等分できるためには $0 < 2-k < 2$ すなわち $0 < k < 2$ …… ①

$$\begin{aligned} \text{ここで } S(k) &= \int_0^{2-k} \{(2x-x^2)-kx\} dx \\ &= -\int_0^{2-k} x\{x-(2-k)\} dx = \frac{(2-k)^3}{6} \end{aligned}$$

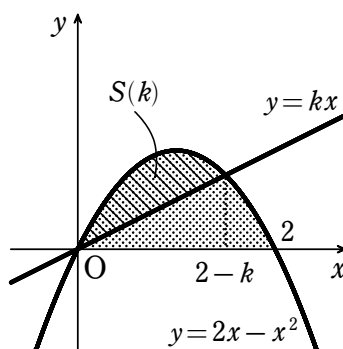
放物線と x 軸 ($y=0 \cdot x$) で囲まれた図形の面積は

$S(0)$ であるから、面積を 2 等分するとき

$$2S(k) = S(0) \quad \text{すなわち} \quad 2 \cdot \frac{(2-k)^3}{6} = \frac{2^3}{6}$$

$$\text{よって } (2-k)^3 = 4 \quad \text{すなわち} \quad 2-k = \sqrt[3]{4}$$

したがって $k=2-\sqrt[3]{4}$ (① を満たす)



C 18 - 1

任意の 1 次関数 $g(x)$ に対して、 $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ かつ $f(0)=1$ を同時に満たす 2 次関

数 $f(x)$ を求めよ。

解答 $f(x) = 6x^2 - 6x + 1$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $g(x) = px + q$ ($p \neq 0$) とおく。

$f(0) = 1$ から $c = 1$

$$\begin{aligned} \text{したがって } \int_0^1 f(x)g(x)dx &= p \int_0^1 x(ax^2 + bx + 1)dx + q \int_0^1 (ax^2 + bx + 1)dx \\ &= p \left[\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + q \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_0^1 \\ &= p \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2} \right) + q \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

よって $p \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2} \right) + q \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 \right) = 0$

この等式が任意の p ($p \neq 0$), q に対して成り立つから

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{1}{2} = 0, \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 = 0$$

すなわち $3a + 4b + 6 = 0, \quad 2a + 3b + 6 = 0$

これを解いて $a = 6, \quad b = -6$

したがって $f(x) = 6x^2 - 6x + 1$

C 18 - 2

曲線 $y = 12x^3 - 12(a+2)x^2 + 24ax$ ($0 \leq a \leq 2$)

と x 軸で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(2) $S(a)$ の最大値と最小値を求めよ。

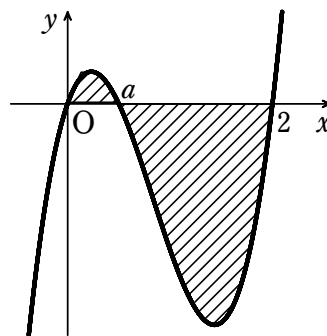
解答 (1) $S(a) = -2a^4 + 8a^3 - 16a + 16$

(2) $a = 0, 2$ で最大値 16, $a = 1$ で最小値 6

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= 12x^3 - 12(a+2)x^2 + 24ax \\
 &= 12x\{x^2 - (a+2)x + 2a\} \\
 &= 12x(x-a)(x-2)
 \end{aligned}$$

$0 \leq a \leq 2$ であるから、曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 $S(a)$ は

$$\begin{aligned}
 S(a) &= \int_0^a \{12x^3 - 12(a+2)x^2 + 24ax\} dx \\
 &\quad - \int_a^2 \{12x^3 - 12(a+2)x^2 + 24ax\} dx \\
 &= \left[3x^4 - 4(a+2)x^3 + 12ax^2 \right]_0^a - \left[3x^4 - 4(a+2)x^3 + 12ax^2 \right]_a^2 \\
 &= 2\{3a^4 - 4(a+2)a^3 + 12a \cdot a^2\} - \{3 \cdot 2^4 - 4(a+2) \cdot 2^3 + 12a \cdot 2^2\} \\
 &= -2a^4 + 8a^3 - 16a + 16
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (2) \quad S'(a) &= -8a^3 + 24a^2 - 16 \\
 &= -8(a^3 - 3a^2 + 2) \\
 &= -8(a-1)(a^2 - 2a - 2)
 \end{aligned}$$

$$S'(a)=0 \text{ とすると } a=1, 1 \pm \sqrt{3}$$

$0 \leq a \leq 2$ における $S(a)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $S(a)$ は

$a=0, 2$ で最大値 16, $a=1$ で最小値 6

をとる。

a	0	...	1	...	2
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$	16	↘	6	↗	16

C 18 - 3

放物線 $y = -x^2 + 4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

また、この囲まれた部分が直線 $y = mx$ によって上側と下側に 1 : 7 の面積比で分けられるとき、定数 m の値を求めよ。

解答 $S = \frac{32}{3}, m = 2$

放物線 $y = -x^2 + 4x$ と x 軸の交点の x 座標は、
 方程式 $-x^2 + 4x = 0$ すなわち $x^2 - 4x = 0$
 を解いて $x = 0, 4$

$0 \leq x \leq 4$ では、 $y \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = -\int_0^4 x(x-4) dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot 4^3 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

放物線と直線 $y = mx$ で囲まれた部分の面積を S_1 と

する。放物線と直線の共有点の x 座標は、

方程式 $-x^2 + 4x = mx$ すなわち $x\{x - (4-m)\} = 0$

を解いて $x = 0, 4-m$

題意を満たすとき $0 < 4-m < 4$

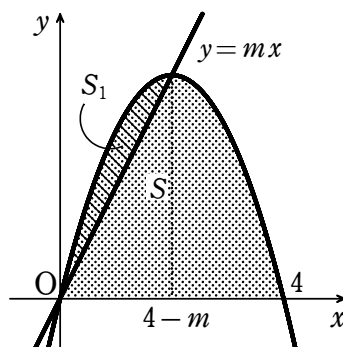
すなわち $0 < m < 4$

$$\text{ここで } S_1 = \int_0^{4-m} \{(-x^2 + 4x) - mx\} dx = -\int_0^{4-m} x\{x - (4-m)\} dx = \frac{(4-m)^3}{6}$$

$$S_1 : S = 1 : 8 \text{ であるから } 8S_1 = S \text{ すなわち } 8 \cdot \frac{(4-m)^3}{6} = \frac{32}{3}$$

$$\text{ゆえに } (4-m)^3 = 8 \quad \text{よって } 4-m = 2$$

$$\text{したがって } m = 2 \quad \text{これは、} 0 < m < 4 \text{ を満たす。}$$



C 18 - 4

放物線 $y = x^2 + 2x + k$ に原点から引いた 2 本の接線は垂直である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) k の値を求めよ。

(2) 放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 (1) $k = \frac{5}{4}$ (2) $\frac{5\sqrt{5}}{12}$

(1) $y' = 2x + 2$

接点の座標を $(t, t^2 + 2t + k)$ とすると、接線の方程式は

$$y - (t^2 + 2t + k) = (2t + 2)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (2t + 2)x - t^2 + k$$

$$\text{これが原点を通るから } 0 = (2t + 2) \cdot 0 - t^2 + k$$

$$\text{よって } t^2 = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

条件より、 t の方程式 $\textcircled{1}$ が異なる 2 つの実数解をもつから $k > 0$

このとき、① から $t = \pm\sqrt{k}$

したがって、2本の接線の傾きは、それぞれ $2\sqrt{k} + 2, -2\sqrt{k} + 2$

これらの接線が垂直であるから $(2\sqrt{k} + 2)(-2\sqrt{k} + 2) = -1$

よって $-4k + 4 = -1$ したがって $k = \frac{5}{4}$ (これは $k > 0$ を満たす)

(2) 2つの接点の x 座標は $\pm\sqrt{k} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

また、2本の接線の方程式は

$$y = (\sqrt{5} + 2)x, \quad y = (-\sqrt{5} + 2)x$$

求める面積を S とすると、図から

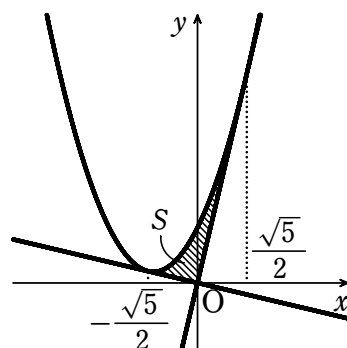
$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^0 \left\{ \left(x^2 + 2x + \frac{5}{4} \right) - (-\sqrt{5} + 2)x \right\} dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left\{ \left(x^2 + 2x + \frac{5}{4} \right) - (\sqrt{5} + 2)x \right\} dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^0 \left(x^2 + \sqrt{5}x + \frac{5}{4} \right) dx + \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(x^2 - \sqrt{5}x + \frac{5}{4} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{5}{4}x \right]_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{5}{4}x \right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \left\{ 0 - \left(-\frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{5\sqrt{5}}{8} - \frac{5\sqrt{5}}{8} \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{5\sqrt{5}}{24} - \frac{5\sqrt{5}}{8} + \frac{5\sqrt{5}}{8} \right) - 0 \right\}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{5\sqrt{5}}{24} = \frac{5\sqrt{5}}{12}$$



C 18 - 5

曲線 $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ と直線 $y = mx$ とで囲まれてできる 2 つの図形の面積を等しくするように、定数 m ($0 < m < 4$) の値を定めよ。

解答 $m = \frac{4}{9}$

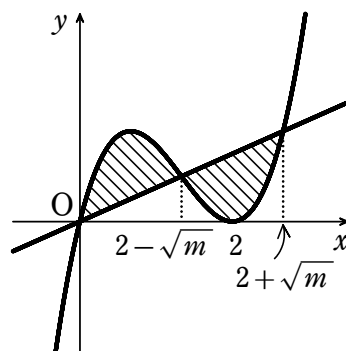
まず、曲線 $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ と直線 $y = mx$ の共有点の x 座標を求める。

$$x^3 - 4x^2 + 4x = mx \text{ とすると } x(x^2 - 4x + 4 - m) = 0$$

$0 < m < 4$ であるから

$$x = 0, 2 \pm \sqrt{m}$$

$0 < m < 4$ のとき、囲まれてできる 2 つの図形は右の図のようになるから、 $\alpha = 2 - \sqrt{m}$ 、 $\beta = 2 + \sqrt{m}$ とおくと、条件より



$$\begin{aligned} & \int_0^{\alpha} \{(x^3 - 4x^2 + 4x) - mx\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{mx - (x^3 - 4x^2 + 4x)\} dx \end{aligned}$$

$$\text{よって } \int_0^{\alpha} \{(x^3 - 4x^2 + 4x) - mx\} dx + \int_{\alpha}^{\beta} \{(x^3 - 4x^2 + 4x) - mx\} dx = 0$$

$$\text{ゆえに } \int_0^{\beta} \{(x^3 - 4x^2 + 4x) - mx\} dx = 0$$

$$\text{すなわち } \int_0^{\beta} \{x^3 - 4x^2 + (4 - m)x\} dx = 0$$

$$\text{よって } \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4-m}{2}x^2 \right]_0^{\beta} = 0$$

$$\text{したがって } \frac{\beta^4}{4} - \frac{4}{3}\beta^3 + \frac{4-m}{2}\beta^2 = 0 \quad \text{すなわち } \frac{\beta^2}{12} \{3\beta^2 - 16\beta + 6(4-m)\} = 0$$

$$\beta \neq 0 \text{ であるから } 3\beta^2 - 16\beta + 6(4-m) = 0$$

$$\beta = 2 + \sqrt{m} \text{ を代入して } 3(2 + \sqrt{m})^2 - 16(2 + \sqrt{m}) + 6(4 - m) = 0$$

$$\text{整理すると } 3(\sqrt{m})^2 + 4\sqrt{m} - 4 = 0 \quad \text{よって } (3\sqrt{m} - 2)(\sqrt{m} + 2) = 0$$

$$\sqrt{m} + 2 > 0 \text{ であるから } \sqrt{m} = \frac{2}{3} \quad \text{ゆえに } m = \frac{4}{9} \quad \text{これは } 0 < m < 4 \text{ を満たす。}$$

C 18 - 6

放物線 $y = x^2$ …… ① と半径 r の円 $x^2 + (y-1)^2 = r^2$ …… ② がある。

(1) 放物線 ① 上の点 (a, a^2) における接線 l の方程式を求めよ。

(2) 円 ② が点 (a, a^2) において、(1) で求めた l と接するとき、 a の値と半径 r を求めよ。ただし $a > 0$ とする。

(3) 連立不等式 $y \geq x^2$, $y \leq 1$, $x^2 + (y-1)^2 \geq r^2$ が表す領域を図示し、その面積 S を求めよ。ただし、 r は (2) で求めた値とする。

解答 (1) $y = 2ax - a^2$

$$(2) \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) [図] 斜線部分. ただし, 境界線を含む,

$$S = \frac{1}{24}(32 - 9\pi)$$

$$(1) \quad y' = 2x$$

よって, 接線 l の方程式は $y - a^2 = 2a(x - a)$ すなわち $y = 2ax - a^2$

(2) 接点を $A(a, a^2)$, 円 ② の中心を $C(0, 1)$ とする.

$$\text{直線 AC の傾きは } \frac{a^2 - 1}{a - 0} = \frac{a^2 - 1}{a}$$

$$\text{直線 AC と接線 } l \text{ は垂直であるから } 2a \cdot \frac{a^2 - 1}{a} = -1$$

$$\text{ゆえに } a^2 = \frac{1}{2} \quad a > 0 \text{ であるから } a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{また, A は円 ② 上の点であるから } a^2 + (a^2 - 1)^2 = r^2$$

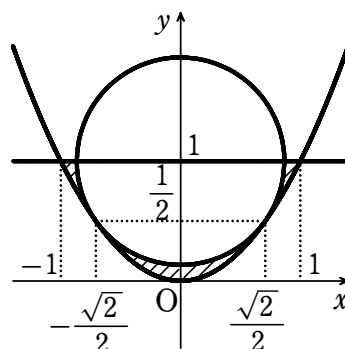
$$\text{ゆえに } r^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$r > 0 \text{ であるから } r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) $y \geq x^2$, $y \leq 1$, $x^2 + (y - 1)^2 \geq \frac{3}{4}$ を図示すると

右図の斜線部分となる. ただし, 境界線を含む.

$$\begin{aligned} \text{また } S &= 2 \left\{ 1 \times 1 - \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \times \frac{1}{4} - \int_0^1 x^2 dx \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{3}{16}\pi - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{24}(32 - 9\pi) \end{aligned}$$



第 19 章 平面ベクトル

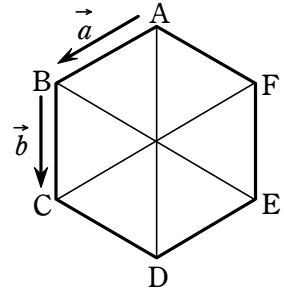
A 19 - 1

正六角形 ABCDEF において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AF}$

(2) $\overrightarrow{BE}$

(3) $\overrightarrow{DF}$



解答 (1) $\overrightarrow{AF} = -\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\overrightarrow{BE} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$ (3) $\overrightarrow{DF} = -\vec{a} - \vec{b}$

正六角形 ABCDEF の中心を O とする。

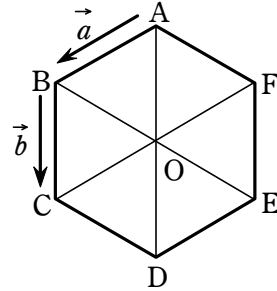
(1) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}$

$$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$$

(2) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC}$

$$= -\vec{a} + (-\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

(3) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$



A 19 - 2

$\triangle ABC$ で、辺 BC を 2 : 1 に外分する点を P、辺 CA の中点を Q、辺 AB を 1 : 2 に内分する点を R とする。

(1) 3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。

(2) PQ : QR を求めよ。

解答 (1) 略 (2) 3 : 1

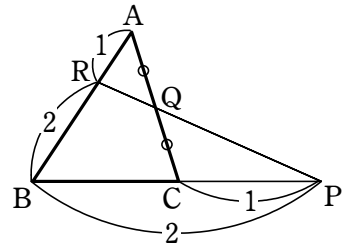
(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{AP} = \frac{-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{2-1} = -\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

よって $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{c} - (-\vec{b} + 2\vec{c}) = \frac{2\vec{b} - 3\vec{c}}{2}$



$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b} - (-\vec{b} + 2\vec{c}) = \frac{2(2\vec{b} - 3\vec{c})}{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{PR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PQ} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

したがって、3 点 P, Q, R は一直線上にある。

(2) ① から $PQ : QR = 3 : 1$

A 19 - 3

△ABC において、辺 AB を 3 : 1 に内分する点を D、辺 AC を 2 : 3 に内分する点を E とし、線分 BE と線分 CD の交点を P とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\text{解答} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{9}{14}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$$

BP : PE = s : (1 - s) とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AE} \\ &= (1-s)\vec{b} + \frac{2}{5}s\vec{c} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

CP : PD = t : (1 - t) とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{4}t\vec{b} + (1-t)\vec{c} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (1-s)\vec{b} + \frac{2}{5}s\vec{c} = \frac{3}{4}t\vec{b} + (1-t)\vec{c}$$

$$\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0} \text{ で、} \vec{b} \text{ と } \vec{c} \text{ は平行でないから} \quad 1-s = \frac{3}{4}t, \quad \frac{2}{5}s = 1-t$$

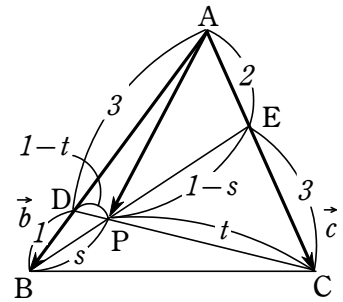
$$\text{これを解いて} \quad s = \frac{5}{14}, \quad t = \frac{6}{7}$$

$$s = \frac{5}{14} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{9}{14}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$$

別解 [メネラウスの定理(数学 A で学習)を利用]

△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PE} \cdot \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$$

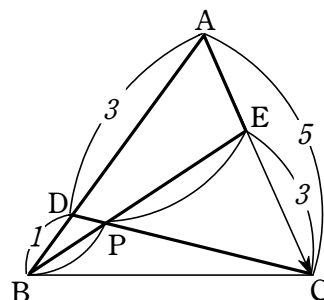


すなわち $\frac{BP}{PE} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{1} = 1$

よって $BP : PE = 5 : 9$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{9\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AE}}{5+9} = \frac{9}{14}\vec{b} + \frac{5}{14} \times \frac{2}{5}\vec{c} \\ &= \frac{9}{14}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}\end{aligned}$$



A 19 - 4

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ の大きさを求めよ。

解答 $\sqrt{37}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned}\text{よって } |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ &= 4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 1 + 9 \cdot 1^2 = 37\end{aligned}$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{37}$$

A 19 - 5

$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$ のとき, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。また, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

解答 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, $\theta = 45^\circ$

$$|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10} \text{ から } |2\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\sqrt{10})^2$$

$$\text{よって } (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 10$$

$$\text{ゆえに } 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 10$$

$$\text{したがって } 4 \cdot 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + (\sqrt{2})^2 = 10 \quad \text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\text{また } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 45^\circ$$

A 19 - 6

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ のとき, $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ が垂直になるように, 実数 t の値を定めよ。

解答 $t = -1$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 2 \text{ から } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4 \quad \text{よって} \quad |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2 \text{ を代入して } 2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 4$$

$$\text{ゆえに } \vec{a} \cdot \vec{b} = -2$$

$$\vec{a} + \vec{b} \text{ と } \vec{a} + t\vec{b} \text{ が垂直になるための条件は } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$$

$$\text{よって } |\vec{a}|^2 + (t+1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 0$$

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \text{ を代入して } 2^2 + (t+1) \cdot (-2) + t \cdot 2^2 = 0$$

$$\text{ゆえに } 2t + 2 = 0 \quad \text{したがって } t = -1$$

A 19 - 7

2つのベクトル $\vec{a} = (-1, 2)$, $\vec{b} = (1, x)$ について, $2\vec{a} + 3\vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が平行になるような x の値を求めよ。

解答 $x = -2$

$2\vec{a} + 3\vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が平行であるための条件は

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = k(\vec{a} - 2\vec{b}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる実数 k が存在することである。

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(-1, 2) + 3(1, x) = (1, 4 + 3x), \quad 2\vec{a} + 3\vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\vec{a} - 2\vec{b} = (-1, 2) - 2(1, x) = (-3, 2 - 2x), \quad \vec{a} - 2\vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して } (1, 4 + 3x) = k(-3, 2 - 2x)$$

$$\text{よって } 1 = -3k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad 4 + 3x = k(2 - 2x) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } k = -\frac{1}{3} \quad \text{このとき, } \textcircled{3} \text{ から } x = -2$$

別解 $2\vec{a} + 3\vec{b} = (1, 4 + 3x) (\neq \vec{0})$, $\vec{a} - 2\vec{b} = (-3, 2 - 2x) (\neq \vec{0})$ であるから

$$(2\vec{a} + 3\vec{b}) // (\vec{a} - 2\vec{b}) \iff 1 \cdot (2 - 2x) - (4 + 3x) \cdot (-3) = 0$$

$$\text{よって } 2 - 2x + 12 + 9x = 0 \quad \text{ゆえに } x = -2$$

A 19 - 8

ベクトル $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (3, -1)$ に対して, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ は $t = \boxed{}$ のとき最小値
 $\boxed{}$ をとる。

解答 (ア) $-\frac{1}{2}$ (イ) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\vec{a} + t\vec{b} = (2, 1) + t(3, -1) = (2 + 3t, 1 - t)$$

$$\text{よって } |\vec{a} + t\vec{b}|^2 = (2+3t)^2 + (1-t)^2 = 10t^2 + 10t + 5$$

$$= 10\left\{t^2 + t + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} - 10\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 10\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$|\vec{a} + t\vec{b}| \geq 0$ であるから, $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ が最小のとき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって, $|\vec{a} + t\vec{b}|$ は $t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ をとる。

A 19 - 9

- (1) $\vec{a} = (1, -\sqrt{3})$ とのなす角が 120° , 大きさが $2\sqrt{10}$ であるベクトル $\vec{b}$ を求めよ。
 (2) $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (-2, 1)$ に対して, $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が垂直であるとき, t の値を求めよ。

解答 (1) $\vec{b} = (-2\sqrt{10}, 0), (\sqrt{10}, \sqrt{30})$ (2) $t = 3$

(1) $\vec{b} = (x, y)$ とする。

$$|\vec{b}| = 2\sqrt{10} \text{ であるから } x^2 + y^2 = 40 \quad \dots\dots ①$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120° であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ \quad \dots\dots ②$$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ であるから, ②より

$$1 \cdot x + (-\sqrt{3}) \cdot y = 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{よって } x = \sqrt{3}y - 2\sqrt{10} \quad \dots\dots ③$$

$$③ \text{ を } ① \text{ に代入して } (\sqrt{3}y - 2\sqrt{10})^2 + y^2 = 40$$

$$\text{整理すると } 4(y^2 - \sqrt{30}y) = 0$$

$$\text{これを解いて } y = 0, \sqrt{30}$$

$$③ \text{ から } y = 0 \text{ のとき } x = -2\sqrt{10}, \quad y = \sqrt{30} \text{ のとき } x = \sqrt{10}$$

$$\text{したがって } \vec{b} = (-2\sqrt{10}, 0), (\sqrt{10}, \sqrt{30})$$

$$(2) \quad \vec{a} + t\vec{b} = (2, 5) + t(-2, 1) = (2-2t, 5+t)$$

$$\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 5) - 2(-2, 1) = (6, 3)$$

$2-2t$ と $5+t$ が同時に 0 になることはないから

$$\vec{a} + t\vec{b} \neq \vec{0} \quad \text{また} \quad \vec{a} - 2\vec{b} \neq \vec{0}$$

$\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - 2\vec{b}$ が垂直であるための条件は

$$(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 0 \quad \text{よって} \quad (2-2t) \cdot 6 + (5+t) \cdot 3 = 0$$

$$\text{これを解いて } t = 3$$

B 19 - 1

$\triangle ABC$ と点 P に対して, 等式 $6\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ が成り立つとき,

- (1) 点 P の位置をいえ。
 (2) 面積比 $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$ を求めよ。

解答 (1) 辺 BC を 2 : 3 に内分する点を Q とすると、線分 AQ を 5 : 6 に内分する点
 (2) 6 : 3 : 2

(1) 与えられた等式から $6\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

よって $11\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

ゆえに $\overrightarrow{AP} = \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{11} = \frac{5}{11} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5}$

$\frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5} = \overrightarrow{AQ}$ とおくと $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{11}\overrightarrow{AQ}$

よって $BQ : QC = 2 : 3, AP : PQ = 5 : 6$

したがって、辺 BC を 2 : 3 に内分する点を Q とすると、点 P は線分 AQ を 5 : 6 に内分する点である。

(2) $\triangle PBQ : \triangle PCQ = BQ : QC = 2 : 3$

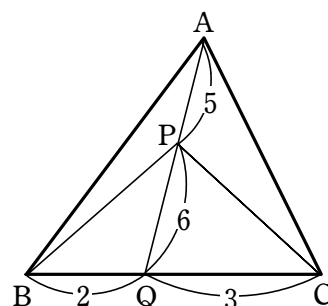
よって、 $\triangle PBQ = 2S$ とすると $\triangle PCQ = 3S$

ゆえに $\triangle PBC = 2S + 3S = 5S$

$\triangle PCQ : \triangle PCA = 6 : 5$ であるから $\triangle PCA = \frac{5}{6} \cdot 3S = \frac{5}{2}S$

$\triangle PBQ : \triangle PAB = 6 : 5$ であるから $\triangle PAB = \frac{5}{6} \cdot 2S = \frac{5}{3}S$

したがって $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = 5S : \frac{5}{2}S : \frac{5}{3}S = 6 : 3 : 2$



B 19 - 2

$AB=5, BC=6, CA=7$ である $\triangle ABC$ の内心を I とする。 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

解答 $\overrightarrow{AI} = \frac{7}{18}\vec{b} + \frac{5}{18}\vec{c}$

直線 AI と辺 BC の交点を D とすると

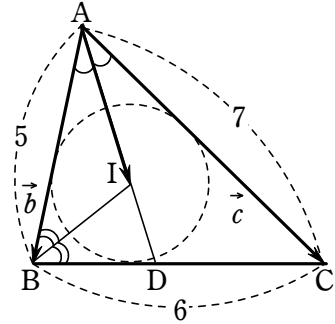
$$BD : DC = AB : AC = 5 : 7$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AD} = \frac{7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{5+7} = \frac{7}{12}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}$$

$$\text{また } BD = \frac{5}{5+7}BC = \frac{5}{12} \times 6 = \frac{5}{2}$$

$$\text{ゆえに } AI : ID = BA : BD = 5 : \frac{5}{2} = 2 : 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \overrightarrow{AI} &= \frac{2}{2+1}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{12}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}\right) \\ &= \frac{7}{18}\vec{b} + \frac{5}{18}\vec{c} \end{aligned}$$



B 19 - 3

$AB=5$, $AC=4$, $\angle A=60^\circ$ の $\triangle ABC$ の頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とするとき, $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ で表せ。

解答 $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると

$$|\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 4,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos 60^\circ = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

$$BH : HC = s : (1-s) \text{ とすると } \overrightarrow{AH} = (1-s)\vec{b} + s\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \text{ であるから } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

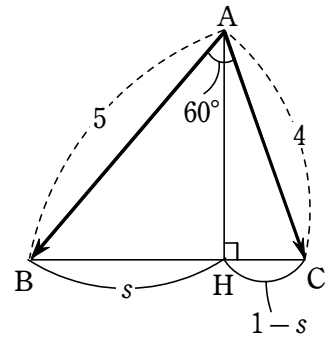
$$\text{すなわち } \{(1-s)\vec{b} + s\vec{c}\} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

$$\text{よって } (s-1)|\vec{b}|^2 + (1-2s)\vec{b} \cdot \vec{c} + s|\vec{c}|^2 = 0$$

$$|\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 4, \vec{b} \cdot \vec{c} = 10 \text{ を代入して}$$

$$25(s-1) + 10(1-2s) + 16s = 0 \quad \text{これを解いて } s = \frac{5}{7}$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{AH} = \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{5}{7}\vec{c} \quad \text{すなわち } \overrightarrow{AH} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$$



B 19 - 4

$OA=2\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$ である $\triangle OAB$ の垂心を H とするとき, $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ で表せ。

解答 $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とし, $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ (s, t は実数) とおく。

条件から $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ …… ①

AH ⊥ OB であるから $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

よって $(s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$

ゆえに $s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

①を代入して $2s + 3t - 2 = 0$ …… ②

BH ⊥ OA であるから $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

よって $(s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$

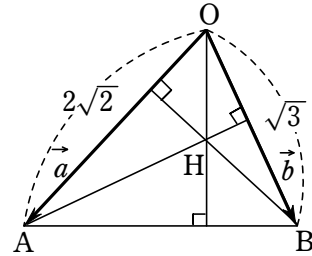
ゆえに $s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

①を代入して $8s + 2t - 2 = 0$ よって $4s + t - 1 = 0$ …… ③

②, ③を解くと $s = \frac{1}{10}$, $t = \frac{3}{5}$

したがって $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{10}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ すなわち $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

【参考】上の解答では、AH ⊥ OB と BH ⊥ OA を用いたが、OH ⊥ AB を用いて求めてもよい。



B 19 - 5

△ABC において、AB=3, AC=2, ∠A=60°, 外心を O とし、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

【解答】 $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

$\overrightarrow{AO} = s\vec{b} + t\vec{c}$ (s, t は実数) とおく。

条件から

$$|\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 2 \cos 60^\circ = 3$$

辺 AB の中点を M とすると、O が外心であるから

$$OM \perp AB$$

したがって $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{b} - (s\vec{b} + t\vec{c}) = \left(\frac{1}{2} - s\right)\vec{b} - t\vec{c}$$

であるから

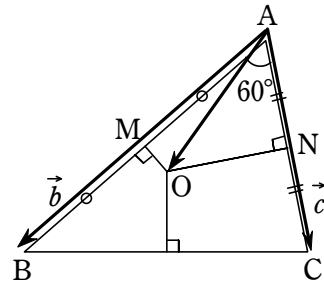
$$\left\{\left(\frac{1}{2} - s\right)\vec{b} - t\vec{c}\right\} \cdot \vec{b} = 0$$

よって $\left(\frac{1}{2} - s\right)|\vec{b}|^2 - t\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$|\vec{b}| = 3$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$ を代入して整理すると

$$6s + 2t = 3 \quad \text{…… ①}$$

辺 AC の中点を N とすると、O が外心であるから



$$ON \perp AC$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{c} - (s\vec{b} + t\vec{c}) = -s\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{c}$$

であるから

$$\left\{-s\vec{b} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{c}\right\} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\text{よって } -s\vec{b} \cdot \vec{c} + \left(\frac{1}{2} - t\right)|\vec{c}|^2 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 3, |\vec{c}| = 2 \text{ を代入して整理すると}$$

$$3s + 4t = 2 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ②を解いて } s = \frac{4}{9}, t = \frac{1}{6}$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{AO} = \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$

B 19 - 6

$\triangle ABC$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接していて

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

を満たしているとする。

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めよ。
 (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

$$\text{【解答】 (1) } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{4}{5}, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{5} \quad (2) \quad \frac{6}{5}$$

$$(1) |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$$

$$\text{条件式から } 5\overrightarrow{OC} = -(3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}) \quad \text{よって} \quad |5\overrightarrow{OC}|^2 = |3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\text{すなわち } 25|\overrightarrow{OC}|^2 = 9|\overrightarrow{OA}|^2 + 24\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 16|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\text{ゆえに } 25 = 9 + 24\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 16 \quad \text{したがって} \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\text{同様に } 3\overrightarrow{OA} = -(4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}), 4\overrightarrow{OB} = -(3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OC}) \text{ から}$$

$$|3\overrightarrow{OA}|^2 = |4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}|^2, |4\overrightarrow{OB}|^2 = |3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OC}|^2$$

$$\text{よって } 9 = 16 + 40\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 25, 16 = 9 + 30\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + 25$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{4}{5}, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{【別解】 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \alpha, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \beta, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \gamma \text{ とおく。}$$

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ から } (3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\text{よって } 3 + 4\alpha + 5\gamma = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{同様に, } (3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0, (3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \text{ から}$$

$$3\alpha + 4 + 5\beta = 0 \dots\dots ②, \quad 3r + 4\beta + 5 = 0 \dots\dots ③$$

$$① \text{ から } r = -\frac{4\alpha + 3}{5} \dots\dots ④ \quad ② \text{ から } \beta = -\frac{3\alpha + 4}{5} \dots\dots ⑤$$

$$④, ⑤ \text{ を } ③ \text{ に代入して } -\frac{3(4\alpha + 3)}{5} - \frac{4(3\alpha + 4)}{5} + 5 = 0$$

$$\text{これを解いて } \alpha = 0 \quad ⑤, ④ \text{ に代入して } \beta = -\frac{4}{5}, r = -\frac{3}{5}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{4}{5}, \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -\frac{3}{5}$$

$$(2) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \text{ から } \angle AOB = 90^\circ$$

$$\text{また } \cos \angle BOC = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}|} = -\frac{4}{5}, \cos \angle COA = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OA}|} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{よって } \sin \angle BOC = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$\sin \angle COA = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$\angle AOB = 90^\circ$ であり, $\angle BOC, \angle COA$ は鈍角である

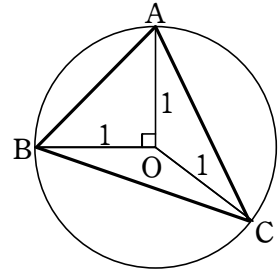
から, O は $\triangle ABC$ の内部にある。

したがって, $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| + \frac{1}{2} |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| \sin \angle BOC + \frac{1}{2} |\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OA}| \sin \angle COA$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{6}{5}$$



B 19 - 7

$\triangle OAB$ の面積を S とする。実数 s, t が, $2s + 3t \leq 6, s \geq 0, t \geq 0$ を満たすとき,
 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ で表される点 P の存在範囲を求め, その面積を S で表せ。

解答 $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$ とおくと, $\triangle OA'B'$ の周および内部

$$2s + 3t \leq 6 \text{ から } \frac{s}{3} + \frac{t}{2} \leq 1$$

$$s' = \frac{s}{3}, t' = \frac{t}{2} \text{ とおくと}$$

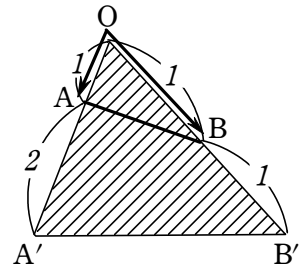
$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{3}(3\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$$

$$= s'(\overrightarrow{OA'}) + t'(\overrightarrow{OB'}),$$

$$s' + t' \leq 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

ここで, $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$ とおくと,

点 P の存在範囲は $\triangle OA'B'$ の周および内部である。



B 19 - 8

4 点 A (1, 2), B (3, -2), C (4, 1), D (x, y) を頂点とする平行四辺形 ABCD について、点 D の座標を求めよ。

解答 (2, 5), (6, -3), (0, -1)

頂点 D の座標を (x, y) とする。

[1] AC が対角線の場合

平行四辺形となるための条件は $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB} = (2, -4)$, $\overrightarrow{DC} = (4-x, 1-y)$ であるから

$$4-x=2, 1-y=-4$$

よって $x=2, y=5$

したがって D (2, 5)

[2] AD が対角線の場合

平行四辺形となるための条件は $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} = (2, -4)$, $\overrightarrow{CD} = (x-4, y-1)$ であるから

$$x-4=2, y-1=-4 \quad \text{よって} \quad x=6, y=-3$$

したがって D (6, -3)

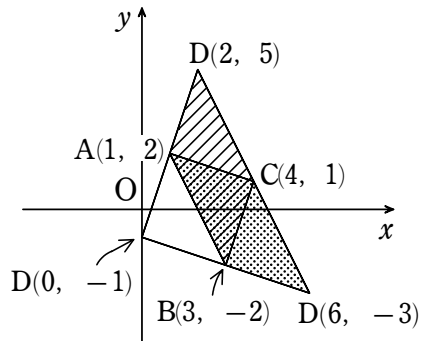
[3] AB が対角線の場合

平行四辺形となるための条件は $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AD} = (x-1, y-2)$, $\overrightarrow{CB} = (-1, -3)$ であるから

$$x-1=-1, y-2=-3 \quad \text{よって} \quad x=0, y=-1$$

したがって D (0, -1)



B 19 - 9

次の直線の方程式を、媒介変数 t を用いて表せ。また、 t を消去した式で表せ。

(1) 点 A (-5, 3) を通り、ベクトル $\vec{d} = (-1, 3)$ に平行な直線

(2) 2 点 A (-5, -5), B (-2, 3) を通る直線

解答 (1) $\begin{cases} x = -5 - t \\ y = 3 + 3t \end{cases}, 3x + y + 12 = 0$ (2) $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -5 + 8t \end{cases}, 8x - 3y + 25 = 0$

原点を O とし、求める直線上の任意の点を P (x, y) とする。

(1) 点 A を通り、 $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$

$\overrightarrow{OP} = (x, y)$, $\overrightarrow{OA} = (-5, 3)$, $\vec{d} = (-1, 3)$ であるから

$$(x, y) = (-5, 3) + t(-1, 3)$$

よって $(x, y) = (-5 - t, 3 + 3t)$

したがって $\begin{cases} x = -5 - t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$

t を消去すると $3(x+5) + (y-3) = 0$ よって $3x + y + 12 = 0$

(2) 2点 A, B を通る直線のベクトル方程式は $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP} = (x, y)$, $\overrightarrow{OA} = (-5, -5)$, $\overrightarrow{AB} = (3, 8)$ であるから

$$(x, y) = (-5, -5) + t(3, 8)$$

よって $(x, y) = (-5 + 3t, -5 + 8t)$

したがって
$$\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -5 + 8t \end{cases}$$

t を消去すると $8(x+5) - 3(y+5) = 0$ よって $8x - 3y + 25 = 0$

B 19 - 10

次の直線, 円の方程式を, ベクトルを利用して求めよ。

(1) 点 A $(-1, 2)$ を通り, $\vec{n} = (4, 3)$ が法線ベクトルである直線

(2) 中心が C $(3, -5)$, 半径 6 の円

(3) 2点 A $(7, -3)$, B $(-3, 5)$ を直径の両端とする円

解答 (1) $4x + 3y - 2 = 0$ (2) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 36$

(3) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 41$

(1) 求める直線上の点を P (x, y) とすると

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$\overrightarrow{AP} = (x+1, y-2)$ であるから

$$4(x+1) + 3(y-2) = 0$$

ゆえに $4x + 3y - 2 = 0$

(2) 求める円周上の点を P (x, y) とすると

$$|\overrightarrow{CP}| = 6$$

$\overrightarrow{CP} = (x-3, y+5)$ であるから, $|\overrightarrow{CP}|^2 = 6^2$ より

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 36$$

(3) 求める円周上の点を P (x, y) とすると

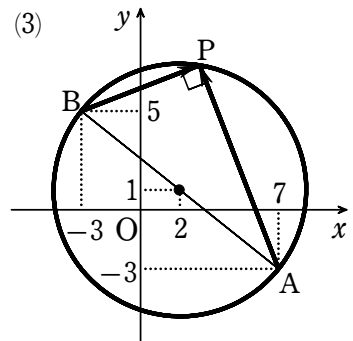
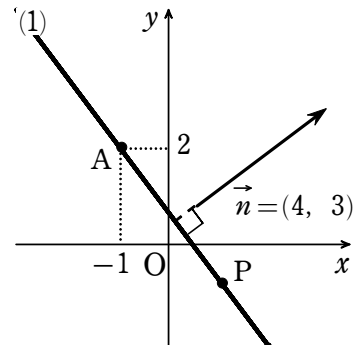
$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$\overrightarrow{AP} = (x-7, y+3)$, $\overrightarrow{BP} = (x+3, y-5)$ であるから

$$(x-7)(x+3) + (y+3)(y-5) = 0$$

これを展開して整理すると

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 41$$



C 19 - 1

$\triangle ABC$ の重心を G, 外接円の中心を E とするとき, 次のことを示せ。

- (1) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$
 (2) $\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} = \vec{EH}$ である点 H をとると、 H は $\triangle ABC$ の垂心。
 (3) 3 点 E, G, H は一直線上にあり $EG : GH = 1 : 2$

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略

重心 G について $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$ 外心 E について $|\vec{EA}| = |\vec{EB}| = |\vec{EC}|$

$$(1) \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = -\vec{AG} + (\vec{AB} - \vec{AG}) + (\vec{AC} - \vec{AG}) \\ = -3\vec{AG} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$$

$$(2) \text{条件の等式を用いて } \vec{AH} = \vec{EH} - \vec{EA} = \vec{EB} + \vec{EC}$$

$$\text{ゆえに } \vec{AH} \cdot \vec{BC} = (\vec{EB} + \vec{EC}) \cdot (\vec{EC} - \vec{EB}) \\ = |\vec{EC}|^2 - |\vec{EB}|^2 = 0$$

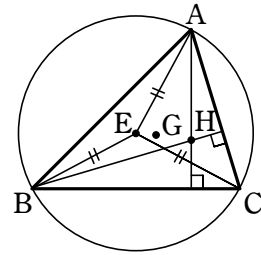
$$\text{同様に } \vec{BH} \cdot \vec{CA} = (\vec{EA} + \vec{EC}) \cdot (\vec{EA} - \vec{EC}) = 0$$

よって $AH \perp BC, BH \perp CA$

したがって、点 H は $\triangle ABC$ の垂心である。

$$(3) \vec{GH} = \vec{AH} - \vec{AG} = \vec{EB} + \vec{EC} - (\vec{EG} - \vec{EA}) \\ = 3\vec{EG} - \vec{EG} = 2\vec{EG}$$

よって、3 点 E, G, H は一直線上にあり $EG : GH = 1 : 2$



C 19 - 2

平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $|\vec{5a} - 2\vec{b}| = 1, |\vec{2a} - 3\vec{b}| = 1$ を満たすように動くとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

$$\text{【解答】 } -\frac{3}{121} \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \frac{35}{121}$$

$$\vec{5a} - 2\vec{b} = \vec{p} \cdots \cdots ①, \vec{2a} - 3\vec{b} = \vec{q} \cdots \cdots ② \text{ とおく。}$$

$$(① \times 3 - ② \times 2) \div 11, (① \times 2 - ② \times 5) \div 11 \text{ から } \vec{a} = \frac{3}{11}\vec{p} - \frac{2}{11}\vec{q}, \vec{b} = \frac{2}{11}\vec{p} - \frac{5}{11}\vec{q}$$

$|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{11^2} (3\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (2\vec{p} - 5\vec{q}) = \frac{1}{121} (6|\vec{p}|^2 - 19\vec{p} \cdot \vec{q} + 10|\vec{q}|^2) \\ = \frac{1}{121} (16 - 19\vec{p} \cdot \vec{q}) \cdots \cdots ③$$

$$-|\vec{p}| |\vec{q}| \leq \vec{p} \cdot \vec{q} \leq |\vec{p}| |\vec{q}|, |\vec{p}| = |\vec{q}| = 1 \text{ から } -1 \leq \vec{p} \cdot \vec{q} \leq 1$$

$$\text{よって、③ から } \frac{1}{121} (16 - 19) \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \frac{1}{121} (16 + 19) \text{ ゆえに } -\frac{3}{121} \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq \frac{35}{121}$$

C 19 - 3

1 辺の長さが 1 である正五角形 $ABCDE$ において, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{e}$ とおくとき

- (1) 線分 BE の長さを求めよ。
 (2) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ を $\vec{b}$, $\vec{e}$ で表せ。

解答 (1) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (2) $\overrightarrow{CD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{e} - \vec{b})$, $\overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b} + \vec{e}$

- (1) 頂点 A から線分 BE に垂線 AH を下ろす。

$$\angle BAE = 108^\circ \text{ であるから } \angle ABH = 36^\circ$$

$$\text{ゆえに } BH = \cos 36^\circ$$

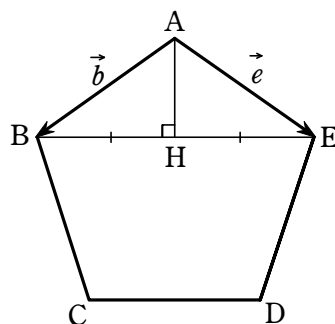
$$\text{よって } BE = 2BH = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

- (2) $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{BE}$, $CD = 1$ であるから

$$\overrightarrow{CD} = \frac{|\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BE}|} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}(\vec{e} - \vec{b}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{e} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{BD} \parallel \vec{e}, |\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{BE}| \text{ であるから } \overrightarrow{BD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{e}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{e} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{e} - \vec{b}) \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b} + \vec{e} \end{aligned}$$



第 20 章 空間座標・空間ベクトル

A 20 - 1

3 点 $A(-4, 0, 1)$, $B(-3, 2, 0)$, $C(-2, 1, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ において, 次のものを求めよ。

- (1) $\angle BAC$ の大きさ
(2) $\triangle ABC$ の面積 S

解答 (1) 60° (2) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(1) $\overrightarrow{AB} = (-3 - (-4), 2 - 0, 0 - 1) = (1, 2, -1)$

$\overrightarrow{AC} = (-2 - (-4), 1 - 0, 2 - 1) = (2, 1, 1)$

よって $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 3$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

したがって $\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$ であるから $\angle BAC = 60^\circ$

(2) $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

A 20 - 2

2 点 $A(2, 1, 4)$, $B(3, -1, 8)$ を通る直線と, 次の平面との交点の座標を求めよ。

- (1) xy 平面 (2) yz 平面 (3) zx 平面

解答 (1) $(1, 3, 0)$ (2) $(0, 5, -4)$ (3) $\left(\frac{5}{2}, 0, 6\right)$

原点を O , 直線 AB 上の点を $P(x, y, z)$, t を実数とする。

直線 AB は, 点 A を通りベクトル $\overrightarrow{AB}$ に平行であるから, そのベクトル方程式は

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AB} = (3 - 2, -1 - 1, 8 - 4) = (1, -2, 4)$ であるから

$(x, y, z) = (2, 1, 4) + t(1, -2, 4)$

よって $(x, y, z) = (2 + t, 1 - 2t, 4 + 4t)$

したがって $x=2+t$, $y=1-2t$, $z=4+4t$

(1) P が xy 平面上にあるとき, P の z 座標は 0 であるから $4+4t=0$

よって $t=-1$

したがって, 求める交点の座標は $(1, 3, 0)$

(2) P が yz 平面上にあるとき, P の x 座標は 0 であるから $2+t=0$

よって $t=-2$

したがって, 求める交点の座標は $(0, 5, -4)$

(3) P が zx 平面上にあるとき, P の y 座標は 0 であるから $1-2t=0$

よって $t=\frac{1}{2}$

したがって, 求める交点の座標は $\left(\frac{5}{2}, 0, 6\right)$

A 20 - 3

次のような直線の方程式を求めよ。

(1) 点 A (1, 2, 3) を通り, $\vec{d}=(2, 3, -4)$ に平行。

(2) 2 点 A (2, -1, 1), B (-1, 3, 1) を通る。

(3) 点 A (-3, 5, 2) を通り, $\vec{d}=(0, 0, 1)$ に平行。

解答 t を実数とする。

$$(1) \quad x=1+2t, \quad y=2+3t, \quad z=3-4t; \text{ または } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$$

$$(2) \quad x=2-3t, \quad y=-1+4t, \quad z=1; \text{ または } \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4}, \quad z=1$$

$$(3) \quad x=-3, \quad y=5$$

O を原点, P(x, y, z) を直線上の点, t を実数とする。

(1) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$ であるから $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 3, -4)$

よって $x=1+2t$, $y=2+3t$, $z=3-4t$ または

$$t \text{ を消去して } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$$

(2) $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 0)$ であるから, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ より

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(-3, 4, 0)$$

よって $x=2-3t$, $y=-1+4t$, $z=1$ または

$$t \text{ を消去して } \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4}, \quad z=1$$

(3) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$ から $(x, y, z) = (-3, 5, 2) + t(0, 0, 1)$

よって, $x=-3$, $y=5$, $z=2+t$ から $x=-3$, $y=5$

A 20 - 4

点 $A(-2, 1, 0)$ を通り, $\vec{n}=(1, 1, 2)$ に垂直な平面上の点 (x, y, z) の満たす方程式を求めよ。

解答 $x + y + 2z = -1$

求める方程式は $1 \times (x + 2) + 1 \times (y - 1) + 2 \times (z - 0) = 0$

よって $x + y + 2z = -1$

A 20 - 5

次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 2 点 $A(3, 2, -4)$, $B(5, -6, 2)$ を直径の両端とする球面

(2) 点 $(2, -1, 0)$ で xy 平面に接する半径 3 の球面

解答 (1) $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 26$

(2) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$ または $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9$

(1) 線分 AB の中点を C とすると, この球面の中心は点 C で, 半径は線分 CA の長さに等しい。

点 C の座標は $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{2-6}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)$ すなわち $(4, -2, -1)$

よって $CA = \sqrt{(3-4)^2 + \{2-(-2)\}^2 + \{-4-(-1)\}^2} = \sqrt{26}$

したがって, 求める球面の方程式は $(x-4)^2 + \{y-(-2)\}^2 + \{z-(-1)\}^2 = (\sqrt{26})^2$

すなわち $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 26$

(2) 球面の中心の座標は

$(2, -1, 3)$ または $(2, -1, -3)$

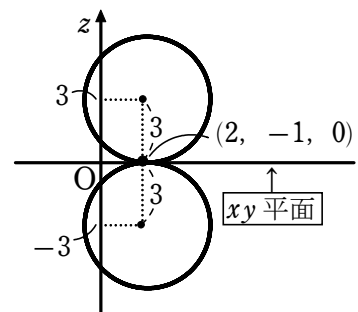
よって, 求める球面の方程式は

$(x-2)^2 + \{y-(-1)\}^2 + (z-3)^2 = 3^2$ または

$(x-2)^2 + \{y-(-1)\}^2 + \{z-(-3)\}^2 = 3^2$

すなわち $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$ または

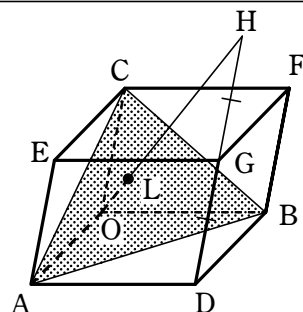
$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 9$



A 20 - 6

平行六面体 $OADB-CEGF$ において、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 DG の延長上に $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{GH}$ となる点 H をとる。

直線 OH と平面 ABC の交点を L とするとき、 $\overrightarrow{OL}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



解答 $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

L は平面 ABC 上にあるから、 $\overrightarrow{CL}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$ (s, t は実数) とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CL} = \vec{c} + s(\vec{a} - \vec{c}) + t(\vec{b} - \vec{c}) \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

また、 L は線分 OH 上にあるから、 $OL:OH=k:1$ (k は実数) とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL} &= k\overrightarrow{OH} \\ \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} \quad \text{であるから} \\ \overrightarrow{OL} &= k\overrightarrow{OH} = k(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) \\ &= k\vec{a} + k\vec{b} + 2k\vec{c} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

4 点 O, A, B, C は同じ平面上にないから、 $\overrightarrow{OL}$ の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いた表し方はただ 1 通りである。

①, ② から $s=k, t=k, 1-s-t=2k$

これを解くと $k=\frac{1}{4}$

したがって $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

別解 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$

L は直線 OH 上にあるから、 $\overrightarrow{OL}=k\overrightarrow{OH}$ (k は実数) とおける。

よって $\overrightarrow{OL} = k(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + 2k\vec{c}$

また、 L は平面 ABC 上にあるから $k+k+2k=1$

すなわち $k = \frac{1}{4}$

したがって $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

A 20 - 7

四面体 OABC において、辺 OA を 2 : 1 に内分する点を P、辺 BC を 3 : 2 に内分する点を Q、線分 PQ を 4 : 3 に内分する点を R、直線 BR と平面 OAC との交点を S とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として、 $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。また、BR : RS を求めよ。

解答 $\overrightarrow{OR} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{8}{35}\vec{b} + \frac{12}{35}\vec{c}$, $\overrightarrow{OS} = \frac{10}{27}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{c}$, BR : RS = 27 : 8

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{c}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \overrightarrow{OR} &= \frac{3\overrightarrow{OP} + 4\overrightarrow{OQ}}{4+3} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OP} + \frac{4}{7}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{7}\left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right) \\ &= \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{8}{35}\vec{b} + \frac{12}{35}\vec{c} \end{aligned}$$

S は直線 BR 上にあるから、 $\overrightarrow{BS} = k\overrightarrow{BR}$ (k は実数) と表される。

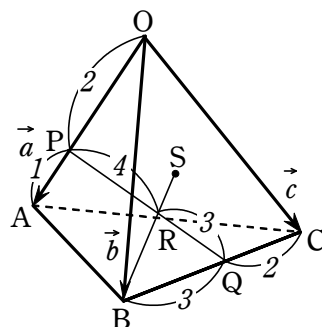
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{BR} = \vec{b} + k\left(\frac{2}{7}\vec{a} + \frac{8}{35}\vec{b} + \frac{12}{35}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{7}k\vec{a} + \left(1 - \frac{27}{35}k\right)\vec{b} + \frac{12}{35}k\vec{c} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

S は平面 OAC 上の点であるから、 $\overrightarrow{OS}$ は $\vec{a}$, $\vec{c}$ で表される。

よって $1 - \frac{27}{35}k = 0$ ゆえに $k = \frac{35}{27}$

これを ① に代入して $\overrightarrow{OS} = \frac{10}{27}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{c}$

また、 $\overrightarrow{BS} = \frac{35}{27}\overrightarrow{BR}$ から $BR : RS = 1 : \left(\frac{35}{27} - 1\right) = 1 : \frac{8}{27} = 27 : 8$



B 20 - 1

点 $(-1, 0, 1)$ を通り、方向ベクトル $\vec{d} = (2, 3, 4)$ の直線を g とする。

(1) 点 A $(4, 8, 7)$ から g へ引いた垂線と g との交点 H の座標を求めよ。

(2) g に関して A と対称な点 B の座標を求めよ。

解答 (1) H $(3, 6, 9)$ (2) B $(2, 4, 11)$

(1) Hは直線 g 上の点であるから, Hの座標を (x, y, z) と

$$\begin{aligned} \text{すると } (x, y, z) &= (-1, 0, 1) + t(2, 3, 4) \\ &= (-1+2t, 3t, 1+4t) \quad (t \text{ は実数}) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AH} = (2t-5, 3t-8, 4t-6)$$

$$AH \perp g \text{ であるから } \overrightarrow{AH} \cdot \vec{d} = 0$$

$$\text{よって } 2(2t-5) + 3(3t-8) + 4(4t-6) = 0$$

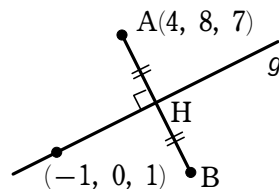
$$\text{これを解いて } t=2 \quad \text{ゆえに } H(3, 6, 9)$$

(2) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AH}$ であるから, $B(a, b, c)$ とすると

$$(a-4, b-8, c-7) = 2(-1, -2, 2)$$

$$\text{よって } a-4 = -2, b-8 = -4, c-7 = 4$$

$$\text{ゆえに } a=2, b=4, c=11 \quad \text{答 } B(2, 4, 11)$$



B 20 - 2

2つのベクトル $\vec{a} = (-1, 2, -2)$, $\vec{b} = (2, -2, 3)$ のいずれにも垂直な単位ベクトルを求めよ。

$$\text{解答} \quad \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (x, y, z)$ とおく。

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\text{よって } -x + 2y - 2z = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\vec{b} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{b} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\text{よって } 2x - 2y + 3z = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$|\vec{e}| = 1 \text{ であるから } |\vec{e}|^2 = 1^2$$

$$\text{よって } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots \cdots \text{③}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ から } x + z = 0 \quad \text{ゆえに } z = -x \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{④を①に代入すると } -x + 2y + 2x = 0$$

$$\text{よって } y = -\frac{x}{2} \quad \cdots \cdots \text{⑤}$$

$$\text{④, ⑤を③に代入すると } x^2 + \frac{x^2}{4} + x^2 = 1$$

$$\text{ゆえに } x^2 = \frac{4}{9} \quad \text{よって } x = \pm \frac{2}{3}$$

このとき, ④, ⑤から

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき } y = -\frac{1}{3}, z = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ のとき } y = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{3}$$

$$\text{したがって } \vec{e} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

B 20 - 3

次の平面の方程式を求めよ。

- (1) 点 A (2, 1, -5) を通り, $\vec{n} = (1, -2, 3)$ に垂直な平面
 (2) 3 点 A (1, -1, 0), B (3, 1, 2), C (3, 3, 0) を通る平面

解答 (1) $x - 2y + 3z + 15 = 0$ (2) $2x - y - z - 3 = 0$

- (1) 求める平面上の点を P (x, y, z) とすると $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$\overrightarrow{AP} = (x-2, y-1, z+5)$ であるから

$$1 \times (x-2) + (-2)(y-1) + 3(z+5) = 0$$

ゆえに, 求める平面の方程式は $x - 2y + 3z + 15 = 0$

- (2) 求める平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ とする。

この平面が 3 点 A, B, C を通ることから

$$a \times 1 + b \times (-1) + c \times 0 + d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a \times 3 + b \times 1 + c \times 2 + d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$a \times 3 + b \times 3 + c \times 0 + d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} \text{ から } 2a + 4b = 0 \quad \text{ゆえに } a = -2b$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ から } 2b - 2c = 0 \quad \text{ゆえに } c = b$$

$$a = -2b \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して } -3b + d = 0 \quad \text{ゆえに } d = 3b$$

よって, 平面の方程式は

$$-2bx + by + bz + 3b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで $a = b = c = 0$ ではないから $b \neq 0$

ゆえに, $\textcircled{4}$ の両辺を $-b$ ($\neq 0$) で割って, 求める方程式は

$$2x - y - z - 3 = 0$$

B 20 - 4

座標空間に, 3 点 A (2, -2, -1), B (-1, 2, 2), C (-1, -2, 0) をとる。

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
 (2) 原点 O と平面 ABC の距離を求めよ。
 (3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

解答 (1) 7 (2) $\frac{4}{7}$ (3) $\frac{4}{3}$

- (1) $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 1)$ であるから

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (-3)^2 + 4^2 + 3^2 = 34, \quad |\overrightarrow{AC}|^2 = (-3)^2 + 1^2 = 10,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3)^2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 12$$

よって, $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2-(\vec{AB}\cdot\vec{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{34\cdot 10-12^2}=\frac{1}{2}\cdot 14=7$$

(2) 平面 ABC の法線ベクトルを $\vec{n}=(a, b, c)$ とすると, $\vec{n}\perp\vec{AB}$, $\vec{n}\perp\vec{AC}$ であるから

$$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0, \vec{n}\cdot\vec{AC}=0$$

$$\text{よって } -3a+4b+3c=0, -3a+c=0 \quad \text{ゆえに } b=-\frac{3}{2}a, c=3a$$

よって, $\vec{n}=(2, -3, 6)$ とすると, 平面 ABC の方程式は

$$2(x-2)-3(y+2)+6(z+1)=0 \quad \text{すなわち } 2x-3y+6z-4=0$$

したがって, 原点 O と平面 ABC の距離を h とすると

$$h=\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{4}{7}$$

$$(3) \text{ 求める体積は } \frac{1}{3}\triangle ABC\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 7\cdot \frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

B 20 - 5

(1) 次の方程式で表される球面の中心の座標と半径を求めよ。

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z=2$$

(2) 次の条件を満たす球面の方程式を求めよ。

(ア) 直径の両端が A (1, 2, 4), B (-5, 8, -2) である。

(イ) 4 点 (0, 0, 0), (6, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -8) を通る。

解答 (1) 中心 (1, -2, -3), 半径 4

$$(2) \text{ (ア) } (x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$$

$$\text{ (イ) } x^2+y^2+z^2-6x-4y+8z=0$$

(1) $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z=2$ から

$$(x^2-2x+1)-1+(y^2+4y+4)-4+(z^2+6z+9)-9=2$$

$$\text{ゆえに } (x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4^2$$

よって 中心 (1, -2, -3), 半径 4

(2) (ア) この球面の中心 C は直径 AB の中点であるから

$$C\left(\frac{1-5}{2}, \frac{2+8}{2}, \frac{4-2}{2}\right) \quad \text{すなわち } C(-2, 5, 1)$$

$$\text{また, 球面の半径を } r \text{ とすると } r^2=AC^2=(-2-1)^2+(5-2)^2+(1-4)^2=27$$

$$\text{よって, 求める方程式は } (x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$$

(イ) 求める方程式を $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ とすると, 4 点

(0, 0, 0), (6, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -8) を通るから

$$D=0, 36+6A+D=0, 16+4B+D=0, 64-8C+D=0$$

$$\text{ゆえに } A=-6, B=-4, C=8, D=0$$

$$\text{よって, 求める方程式は } x^2+y^2+z^2-6x-4y+8z=0$$

C 20 - 1

2 点 A (6, -2, 4), B (7, -4, 3) を通る直線に, 原点 O から垂線 OH を下ろす。
このとき, 点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

解答 H (5, 0, 5), OH = $5\sqrt{2}$

点 H は 2 点 A, B を通る直線上にあるから, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ (t は実数) と表される。

$\overrightarrow{AB} = (7-6, -4-(-2), 3-4) = (1, -2, -1)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= (6, -2, 4) + t(1, -2, -1) \\ &= (6+t, -2-2t, 4-t)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

よって $(6+t) \times 1 + (-2-2t) \times (-2) + (4-t) \times (-1) = 0$

これを解くと $t = -1$

したがって, 点 H の座標は (5, 0, 5)

また, 線分 OH の長さは $OH = \sqrt{5^2 + 0^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

C 20 - 2

A (2, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, -2) とする。平面 ABC に原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

解答 $H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, OH = $\frac{\sqrt{6}}{3}$

点 H は平面 ABC 上にあるから, $\overrightarrow{CH} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ (s, t は実数) とおくと

$$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = s(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

よって $\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} + (1-s-t)\overrightarrow{OC} = (2s, t, -2+2s+2t)$

また $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, -2)$

OH は平面 ABC に垂直であるから, $\overrightarrow{OH}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直である。

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ から $2s \times (-2) + t \times 1 + (-2+2s+2t) \times 0 = 0$

式を整理すると $4s - t = 0$ …… ①

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ から $2s \times (-2) + t \times 0 + (-2+2s+2t) \times (-2) = 0$

式を整理すると $2s + t - 1 = 0$ …… ②

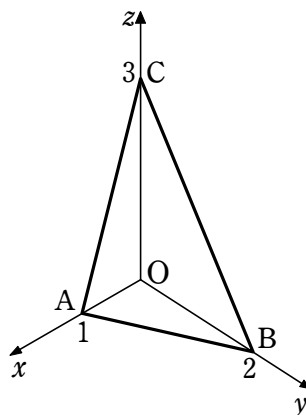
①, ② を解くと $s = \frac{1}{6}$, $t = \frac{2}{3}$

よって $H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, OH = $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

C 20 - 3

右の図のような 4 点 O , A , B , C について, 次のものを求めよ。

- (1) 四面体 $OABC$ の体積 V
- (2) $\triangle ABC$ の面積 S
- (3) 原点 O から平面 ABC へ垂線 OH を下ろすとき, 線分 OH の長さ h



解答 (1) $V=1$ (2) $S=\frac{7}{2}$ (3) $h=\frac{6}{7}$

- (1) 四面体 $OABC$ を $\triangle OAB$ を底面とする高さ OC の三角錐とみる。

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle OAB \times OC = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \right) \times 3 = 1$$

- (2) $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ であるから

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 2-0, 0-0) = (-1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 0-0, 3-0) = (-1, 0, 3)$$

よって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \times (-1) + 2 \times 0 + 0 \times 3 = 1$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

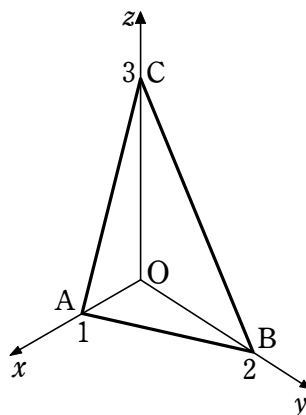
$$\text{ゆえに } \cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10} \right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\text{したがって } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{2}$$

- (3) $V = \frac{1}{3} Sh$

$$(1), (2) \text{ より } V=1, S=\frac{7}{2}$$



$$\text{よって, } 1 = \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times h \text{ より } h = \frac{6}{7}$$

C 20 - 4

空間内に 4 点 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 2, -1)$, $D(0, 2, 1)$ がある。

- (1) 点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき, 点 H の座標を求めよ。
 (2) 点 P が xy 平面上を動き, 点 Q が直線 AB 上を動くとき, 距離 DP , PQ の和 $DP+PQ$ が最小となる P , Q の座標を求めよ。

解答 (1) $H\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (2) $P(1, 1, 0)$, $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(1) $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$

H は直線 AB 上の点であるから, H の座標を (x, y, z) とすると

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (0, 0, 1) + t(2, 1, -1) \\ &= (2t, t, 1-t) \quad (t \text{ は実数}) \end{aligned}$$

$CH \perp AB$ であるから $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{CH} = (2t, t-2, -t+2)$ であるから

$$2 \cdot 2t + 1 \cdot (t-2) + (-1)(-t+2) = 0$$

これを解いて $t = \frac{2}{3}$

よって, H の座標は $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

- (2) 点 D は xy 平面に関して点 C と対称であるから

$$DP = CP$$

よって $DP + PQ = CP + PQ \geq CQ$

また, 線分 CQ の長さが最小になるのは, 点 Q が点 H に一致するときである。

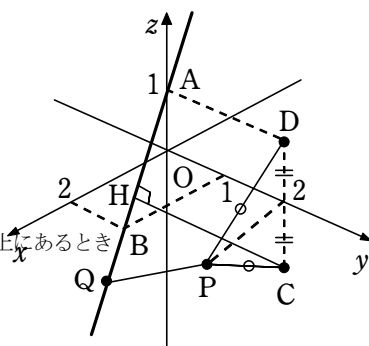
ゆえに, $DP + PQ$ が最小になるのは, 点 Q が点 H と一致し, 点 P が直線 CH 上にあるときである。

$P(x, y, 0)$ とする。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}(1, -1, 1) \text{ であるから, 点 } P \text{ が直線 } CH \text{ 上にあるとき} \\ (x, y, 0) &= (0, 2, -1) + s(1, -1, 1) \\ &= (s, 2-s, -1+s) \quad (s \text{ は実数}) \end{aligned}$$

よって $x = s, y = 2-s, 0 = -1+s$

ゆえに $s = 1, x = 1, y = 1$ 答 $P(1, 1, 0)$, $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$



C 20 - 5

$\angle AOB = \angle AOC = 60^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, $OB = OC = 1$, $OA = 2$ である四面体 $OABC$

において、頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線 OH の長さを求めよ。

解答 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

H は平面 ABC 上にあり、4 点 O, A, B, C は同じ平面上にないから、次のように表される。

$$\overrightarrow{OH}=\vec{r}\vec{a}+\vec{s}\vec{b}+\vec{t}\vec{c}, \quad r+s+t=1 \quad \cdots \cdots ①$$

また、 $OH \perp$ 平面 ABC であるから

$$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$$

よって $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB}=0$, $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC}=0$ であるから

$$(\vec{r}\vec{a}+\vec{s}\vec{b}+\vec{t}\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})=0 \quad \cdots \cdots ②$$

$$(\vec{r}\vec{a}+\vec{s}\vec{b}+\vec{t}\vec{c}) \cdot (\vec{c}-\vec{a})=0 \quad \cdots \cdots ③$$

ここで $|\vec{a}|^2=4$, $|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=1$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ=1, \quad \vec{b} \cdot \vec{c}=0, \quad \vec{c} \cdot \vec{a}=1$$

② から $-r|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2+(r-s)\vec{a} \cdot \vec{b}+t\vec{b} \cdot \vec{c}-t\vec{c} \cdot \vec{a}=0$

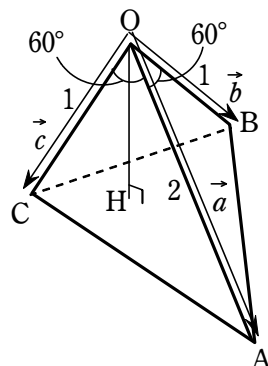
ゆえに $3r+t=0 \quad \cdots \cdots ④$ 同様に、③ から $3r+s=0 \quad \cdots \cdots ⑤$

①, ④, ⑤ を解いて

$$r=-\frac{1}{5}, \quad s=t=\frac{3}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OH}=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 5^2|\overrightarrow{OH}|^2 &= |-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2-6\vec{a} \cdot \vec{b}+18\vec{b} \cdot \vec{c}-6\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 4+9 \cdot 1+9 \cdot 1-6 \cdot 1+18 \cdot 0-6 \cdot 1=10 \end{aligned}$$

したがって $|\overrightarrow{OH}|=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 答 $\frac{\sqrt{10}}{5}$



C 20 - 6

4 点 A (2, 1, 0), B (2, 3, 2), C (4, 1, 2), D を頂点とする正四面体 ABCD において、頂点 D の座標を求めよ。

解答 (4, 3, 0) または $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

頂点 D の座標を (x, y, z) とおく。

四面体 ABCD の 1 辺の長さは $AB=\sqrt{(2-2)^2+(3-1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$

ゆえに、 $AD=BD=CD=2\sqrt{2}$ であるから $AD^2=BD^2=CD^2=8$

$AD^2=BD^2$ から $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(z-2)^2$

よって $y+z=3$ …… ①

$$AD^2=CD^2 \text{ から } (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$$

よって $x+z=4$ …… ②

$$AD^2=8 \text{ から } (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=8 \text{ …… ③}$$

①, ② から $y=3-z, x=4-z$ …… ④

$$\text{これを ③ に代入して } \{(4-z)-2\}^2+\{(3-z)-1\}^2+z^2=8$$

$$\text{よって } 3z^2-8z=0 \quad \text{これを解いて } z=0, \frac{8}{3}$$

④ から, $z=0$ のとき $y=3, x=4$

$$z=\frac{8}{3} \text{ のとき } y=\frac{1}{3}, x=\frac{4}{3}$$

したがって, 頂点 D の座標は $(4, 3, 0)$ または $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3})$

C 20 - 7

中心が点 $(-2, 1, a)$, 半径が 6 の球面が, xy 平面と交わってできる円の半径が $4\sqrt{2}$ であるとき, a の値を求めよ。

解答 $a=\pm 2$

中心が $(-2, 1, a)$, 半径が 6 の球面の方程式は $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=6^2$

この球面が xy 平面と交わるのは $z=0$ のときである。

$$\text{方程式で, } z=0 \text{ とすると } (x+2)^2+(y-1)^2+(0-a)^2=6^2$$

$$\text{すなわち } (x+2)^2+(y-1)^2=6^2-a^2$$

$$\text{この円の半径が } 4\sqrt{2} \text{ であるから } 6^2-a^2=(4\sqrt{2})^2$$

$$\text{式を整理して } a^2=4 \quad \text{よって } a=\pm 2$$

別解 点 $(-2, 1, a)$ と xy 平面の距離は $|a|$

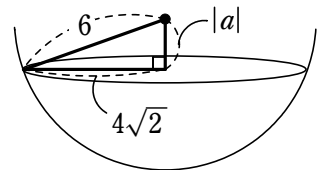
ここで, 球面と xy 平面が交わる部分が円となるから

$$|a|<6$$

$$\text{三平方の定理より } |a|^2+(4\sqrt{2})^2=6^2$$

$$\text{よって } a^2=4 \quad \text{したがって } a=\pm 2$$

これは $|a|<6$ を満たす。



C 20 - 8

次の 4 点 が同じ平面上にあるように, x の値を定めよ。

$$A(1, 1, 0), B(3, 4, 5), C(1, 3, 6), P(4, 5, x)$$

解答 $x=6$

$$\overrightarrow{AP}=(3, 4, x), \overrightarrow{AB}=(2, 3, 5), \overrightarrow{AC}=(0, 2, 6)$$

3 点 A, B, C は一直線上にないから, 点 P が平面 ABC 上にあるための条件は,

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC} \text{ となる実数 } s, t \text{ があることである。}$$

$$\text{よって } (3, 4, x)=s(2, 3, 5)+t(0, 2, 6)$$

$$\text{すなわち } (3, 4, x)=(2s, 3s+2t, 5s+6t)$$

$$\text{ゆえに } 2s=3, 3s+2t=4, 5s+6t=x \quad \text{よって } s=\frac{3}{2}, t=-\frac{1}{4}$$

$$\text{したがって } x=6$$

別解1. 3 点 A, B, C は一直線上にないから, 原点を O とすると, 点 P が平面 ABC

上にあるための条件は, $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$, $s+t+u=1$ となる実数 s, t, u があることである。

$$\text{よって } (4, 5, x)=s(1, 1, 0)+t(3, 4, 5)+u(1, 3, 6)$$

$$\text{すなわち } (4, 5, x)=(s+3t+u, s+4t+3u, 5t+6u)$$

$$\text{ゆえに } s+3t+u=4, s+4t+3u=5, 5t+6u=x$$

$$\text{また } s+t+u=1$$

$$\text{これらを解くと } s=-\frac{1}{4}, t=\frac{3}{2}, u=-\frac{1}{4} \quad \text{よって } x=5\cdot\frac{3}{2}+6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=6$$

別解2. 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めると $2x-3y+z+1=0$

$$\text{この平面上に点 P があるための条件は } 2\cdot 4-3\cdot 5+x+1=0 \quad \text{よって } x=6$$

C 20 - 9

4 点 $(0, 0, 0)$, $(6, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(-2, 1, -1)$ を通る球面の方程式を求めよ。

解答 $x^2+y^2+z^2-6x-8y+10z=0$

求める球面の方程式を $x^2+y^2+z^2+kx+ly+mz+n=0$ とする。

4 点 $(0, 0, 0)$, $(6, 0, 0)$, $(0, 8, 0)$, $(-2, 1, -1)$ がこの球面上にあるから

$$n=0, 36+6k+n=0, 64+8l+n=0, 4+1+1-2k+l-m+n=0$$

$$\text{これらを解くと } k=-6, l=-8, m=10, n=0$$

$$\text{よって, 求める球面の方程式は } x^2+y^2+z^2-6x-8y+10z=0$$

第 21 章 数列

A 21 - 1

次のような等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。

- (1) 第 5 項が 11, 初項から第 6 項までの和が 39
 (2) 初項から第 5 項までの和が 40, 初項から第 10 項までの和が 155

解答 (1) 初項 -1 , 公差 3 (2) 初項 2 , 公差 3

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a , 公差を d とすると $a_n = a + (n-1)d$

また, 初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$

(1) $a_5 = 11$ であるから $a + 4d = 11$ …… ①

$S_6 = 39$ であるから $\frac{1}{2} \cdot 6(2a + 5d) = 39$

よって $2a + 5d = 13$ …… ②

①, ② を解くと $a = -1, d = 3$

したがって 初項 -1 , 公差 3

(2) $S_5 = 40$ であるから $\frac{1}{2} \cdot 5(2a + 4d) = 40$

よって $a + 2d = 8$ …… ①

$S_{10} = 155$ であるから $\frac{1}{2} \cdot 10(2a + 9d) = 155$

よって $2a + 9d = 31$ …… ②

①, ② を解くと $a = 2, d = 3$

したがって 初項 2 , 公差 3

A 21 - 2

等比数列 $\{a_n\}$ において, $a_1 + a_2 = 3$, $a_3 + a_4 = 12$ である。この等比数列の一般項を求めよ。

解答 $a_n = 2^{n-1}$ または $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$

初項を a , 公比を r とすると $a_n = ar^{n-1}$

$a_1 + a_2 = 3$ から $a + ar = 3$ …… ①

$a_3 + a_4 = 12$ から $ar^2 + ar^3 = 12$

よって $r^2(a + ar) = 12$ これに ① を代入すると $3r^2 = 12$

よって、 $r^2=4$ から $r=\pm 2$

$r=2$ のとき、① から $a=1$

$r=-2$ のとき、① から $a=-3$

したがって、求める一般項は

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

A 21 - 3

3 つの数 -6 , a , b がこの順に等差数列をなし、 a , b , -16 がこの順に等比数列をなす。
このとき、 a , b の値を求めよ。

解答 $a=-1$, $b=4$ または $a=-9$, $b=-12$

-6 , a , b がこの順に等差数列をなすから $2a = -6 + b$ …… ①

a , b , -16 がこの順に等比数列をなすから $b^2 = -16a$ …… ②

① から $b = 2a + 6$ …… ③

これを ② に代入して、整理すると $4a^2 + 40a + 36 = 0$

両辺を 4 で割ると $a^2 + 10a + 9 = 0$

これを解いて $a = -1$, -9

③ から、 $a = -1$ のとき $b = 4$

$a = -9$ のとき $b = -12$

よって $a = -1$, $b = 4$ または $a = -9$, $b = -12$

A 21 - 4

次の和を求めよ

(1) $\sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{2^k} \right)$

(2) $\sum_{k=1}^n k(n-k+1)$

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ (与式)} &= \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &= \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{\frac{1}{2}\{1 - (\frac{1}{2})^n\}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2}n(n+1) + 1 - \frac{1}{2^n}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (与式)} &= (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
 &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2),
 \end{aligned}$$

A 21 - 5

次の和を求めよ。

(1) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(2n-1)$

(2) $1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 5 + \cdots + n^2(n+2)$

解答 (1) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ (2) $\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+4)$

(1) これは、第 k 項が $k(2k-1)$ である数列の、初項から第 n 項までの和である。

よって、求める和は

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k(2k-1) &= \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\
 &= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1) - 3\} = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)
 \end{aligned}$$

(2) これは、第 k 項が $k^2(k+2)$ である数列の、初項から第 n 項までの和である。

よって、求める和は

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k^2(k+2) &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 2k^2) = \sum_{k=1}^n k^3 + 2 \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 + 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) \\
 &= \frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1) + 4(2n+1)\} \\
 &= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+4)
 \end{aligned}$$

A 21 - 6

和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}. \quad \dots(\text{答})\end{aligned}$$

A 21 - 7

次の和を求めよ。

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}}$$

解答 (1) $\frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^{n-1}}$ (2) $\frac{1 + 2x - (3n+1)x^n + (3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(1) $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}}$ ① とする。

① の両辺に $\frac{1}{3}$ を掛けると

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n} \quad \dots\dots ②$$

① - ② から $S - \frac{1}{3}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^n}$

よって
$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S &= \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{n-1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3(3^n - 1) - 2n}{2 \cdot 3^n} \\ &= \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{2 \cdot 3^n}\end{aligned}$$

したがって
$$S = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{2 \cdot 3^n} = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^{n-1}}$$

A 21 - 8

初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = 2^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_1=2$, $n \geq 2$ のとき $a_n=2^{n-1}$

初項 a_1 は $a_1=S_1=2$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= S_n - S_{n-1} = 2^{n-1}(2-1) \\ &= 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ が得られるから、① は $n=1$ のときには不成立。

したがって $a_1=2$, $n \geq 2$ のとき $a_n=2^{n-1}$

B 21 - 1

初項が 30, 公差が -4 の等差数列がある。

- (1) 初項から第何項までの和が初めて負の数になるか。
 (2) 初項から第何項までの和が最大となるか。

解答 (1) 第 17 項 (2) 第 8 項

(1) 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 30 + (n-1) \cdot (-4)\} = 2n(16-n)$$

$$S_n < 0 \text{ とすると } 2n(16-n) < 0 \quad n > 0 \text{ であるから } 16-n < 0$$

よって $n > 16$

これを満たす最小の自然数 n は $n = 17$

したがって、初項から第 17 項までの和が初めて負の数になる。

(2) 第 n 項を a_n とすると $a_n = 30 + (n-1) \cdot (-4) = 34 - 4n$

$$a_n \geq 0 \text{ とすると } 34 - 4n \geq 0 \quad \text{よって } n \leq \frac{17}{2} = 8.5$$

これを満たす最大の自然数 n は $n = 8$

したがって、初項から第 8 項までの和が最大となる。

B 21 - 2

次の数列の第 k 項を求めよ。また、初項から第 n 項までの和を求めよ。

9, 99, 999, 9999, ……

解答 第 k 項 $10^k - 1$, 和 $\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$

$$9 = 10 - 1, 99 = 10^2 - 1, 999 = 10^3 - 1, 9999 = 10^4 - 1, \dots\dots$$

であるから、第 k 項は $10^k - 1$

よって、初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^n (10^k - 1) = \sum_{k=1}^n 10^k - \sum_{k=1}^n 1 = \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$$

B 21 - 3

次の数列の第 k 項 a_k と、初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $1 \cdot (2n - 1), 3(2n - 3), 5(2n - 5), \dots, (2n - 3) \cdot 3, (2n - 1) \cdot 1$

(2) $1^2 \cdot n, 2^2 \cdot (n - 1), 3^2 \cdot (n - 2), \dots, (n - 1)^2 \cdot 2, n^2 \cdot 1$

解答 (1) $a_k = (2k - 1)(2n - 2k + 1), S_n = \frac{1}{3}n(2n^2 + 1)$

(2) $a_k = -k^3 + (n + 1)k^2, S_n = \frac{1}{12}n(n + 1)^2(n + 2)$

(1) $a_k = (2k - 1)\{2n - (2k - 1)\} = (2k - 1)(2n - 2k + 1) \quad [1 \leq k \leq n]$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S_n &= \sum_{k=1}^n (2k - 1)(2n - 2k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n \{-4k^2 + 4(n + 1)k - (2n + 1)\} \\ &= -4 \sum_{k=1}^n k^2 + 4(n + 1) \sum_{k=1}^n k - (2n + 1) \sum_{k=1}^n 1 \\ &= -4 \cdot \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) + 4(n + 1) \cdot \frac{1}{2}n(n + 1) - (2n + 1)n \\ &= -\frac{2}{3}n(n + 1)(2n + 1) + 2n(n + 1)^2 - (2n + 1)n \\ &= \frac{1}{3}n\{-2(2n^2 + 3n + 1) + 6(n^2 + 2n + 1) - 3(2n + 1)\} \\ &= \frac{1}{3}n(2n^2 + 1) \end{aligned}$$

(2) $a_k = k^2\{n - (k - 1)\} = -k^3 + (n + 1)k^2 \quad [1 \leq k \leq n]$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \{-k^3 + (n + 1)k^2\} \\ &= -\sum_{k=1}^n k^3 + (n + 1) \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= -\left\{\frac{1}{2}n(n + 1)\right\}^2 + (n + 1) \cdot \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)^2(2n+1) \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)^2\{-3n+2(2n+1)\} \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)
\end{aligned}$$

B 21 - 4

次の和 S を求めよ。

$$(1) \quad S = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$(2) \quad S = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

解答 (1) $S = \frac{n}{2(3n+2)}$ (2) $S = \frac{2n}{n+1}$

$$(1) \quad \text{第 } k \text{ 項は } \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$$

よって、求める和 S は

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3n+2)-2}{2(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}
\end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{第 } k \text{ 項は } \frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)} = \frac{2}{k(k+1)} = 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

よって、求める和 S は

$$\begin{aligned}
S &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}
\end{aligned}$$

B 21 - 5

和 $\sum_{k=1}^{76} \frac{2}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k+5}}$ を求めよ。

解答 $7 + 3\sqrt{5}$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5}} &= \frac{2(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+5})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})} \\ &= \frac{2(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+5})}{k+3-(k+5)} = \sqrt{k+5}-\sqrt{k+3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{したがって (与式)} &= \sum_{k=1}^{76} (\sqrt{k+5}-\sqrt{k+3}) \\ &= (\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})+\cdots \\ &\quad +(\sqrt{79}-\sqrt{77})+(\sqrt{80}-\sqrt{78})+(\sqrt{81}-\sqrt{79}) \\ &= -\sqrt{4}-\sqrt{5}+\sqrt{80}+\sqrt{81} \\ &= -2-\sqrt{5}+4\sqrt{5}+9=7+3\sqrt{5}\end{aligned}$$

B 21 - 6

次の和を求めよ。

$$1+4x+7x^2+\cdots+(3n-2)x^{n-1}$$

解答 (1) $\frac{3^{n+1}-2n-3}{4 \cdot 3^{n-1}}$ (2) $\frac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

(1) $S=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}$ …… ① とする。

① の両辺に $\frac{1}{3}$ を掛けると

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

①-② から $S - \frac{1}{3}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^n}$

よって
$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S &= \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{n-1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3(3^n - 1) - 2n}{2 \cdot 3^n} \\ &= \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{2 \cdot 3^n}\end{aligned}$$

したがって $S = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{2 \cdot 3^n} = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^{n-1}}$

(2) $S=1+4x+7x^2+\cdots+(3n-2)x^{n-1}$ …… ① とする。

① の両辺に x を掛けると

$$xS = x + 4x^2 + \cdots + (3n-5)x^{n-1} + (3n-2)x^n \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$x \neq 1$ であるから、①-② より

$$\begin{aligned}
 (1-x)S &= 1 + 3(x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) - (3n-2)x^n \\
 &= 1 + \frac{3x(1-x^{n-1})}{1-x} - (3n-2)x^n \\
 &= \frac{1-x + 3x(1-x^{n-1}) - (3n-2)x^n(1-x)}{1-x} \\
 &= \frac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{1-x}
 \end{aligned}$$

よって
$$S = \frac{1+2x-(3n+1)x^n+(3n-2)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

B 21 - 7

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は、 $S_n = n^3 + 3n^2 + 2n$ で与えられている。

- (1) 一般項 a_n を求めよ。 (2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

解答 (1) $a_n = 3n(n+1)$ (2) $\frac{n}{3(n+1)}$

(1) 初項 a_1 は $a_1 = S_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} = (n^3 + 3n^2 + 2n) - \{(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\
 &= (n^3 + 3n^2 + 2n) - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 3n^2 - 6n + 3 + 2n - 2) \\
 &= 3n^2 + 3n = 3n(n+1)
 \end{aligned}$$

① より $a_1 = 6$ であるから、この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって、一般項は $a_n = 3n(n+1)$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{3(n+1)}
 \end{aligned}$$

C 21 - 1

$a_n = 5n + 4$, $b_n = 3n + 2$ である 2 つの等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。この 2 つの数列に共通な項を順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とする。

- (1) c_1 を求めよ。

- (2) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。
 (3) $c_5 = a_l$, $c_{10} = a_m$ となる l , m に対し, 数列 $\{a_n\}$ の第 l 項から第 m 項までの和を求めよ。

解答 (1) 14 (2) $\frac{1}{2}n(15n+13)$ (3) 1784

(1) $a_p = b_q$ とすると $5p+4=3q+2$ …… ①

$5 \cdot (-1) + 4 = 3 \cdot (-1) + 2$ …… ② であるから, ① - ② より $5(p+1) = 3(q+1)$

5 と 3 は互いに素であるから, $p+1$ は 3 の倍数である。

よって, 整数 r によって, $p+1 = 3r$ と表される。

すなわち $p = 3r - 1$ …… ③

よって $c_n = a_{3n-1} = 5(3n-1) + 4 = 15n - 1$

したがって $c_1 = 14$

(2) 初項 14, 末項 $15n - 1$, 項数 n であるから, 和は

$$\frac{1}{2}n(14 + 15n - 1) = \frac{1}{2}n(15n + 13)$$

(3) ③ から $l = 3 \cdot 5 - 1 = 14$, $m = 3 \cdot 10 - 1 = 29$

ここで $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}n(5 \cdot 1 + 4 + 5n + 4) = \frac{1}{2}n(5n + 13)$$

よって, 求める和は $S_{29} - S_{13} = 2291 - 507 = 1784$

C 21 - 2

和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}}$ を求めよ。

解答 $\frac{1}{2}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{2})$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} &= \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k} - \sqrt{k+2})} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+2}}{k - (k+2)} \\ &= -\frac{1}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k+2}) \end{aligned}$$

よって $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} = \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{1}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k+2}) \right\}$
 $= -\frac{1}{2}\{(\sqrt{1} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{4}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{n-2} - \sqrt{n})\}$

$$\begin{aligned}
& +(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})\} \\
& = -\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}) \\
& = \frac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})
\end{aligned}$$

C 21 - 3

−5 と 15 の間に n 個の数を入れて等差数列を作ると、その総和が 100 になった。このとき、 n の値と公差を求めよ。

解答 $n=18$, 公差 $\frac{20}{19}$

この数列は、初項 −5, 末項 15, 項数 $n+2$ の等差数列。

初項から第 $(n+2)$ 項までの和を S とすると

$$S = \frac{1}{2}(n+2)(-5+15) = 5n+10$$

$S=100$ であるから $5n+10=100$ よって $n=18$

また、公差を d とすると $-5 + \{(18+2)-1\}d = 15$ ゆえに $d = \frac{20}{19}$

したがって $n=18$, 公差 $\frac{20}{19}$

C 21 - 4

3 で割り切れないすべての正の整数を、小さいものから順に並べてできる数列を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ とする。

- (1) 正の整数 m に対して、第 $2m$ 項 a_{2m} を m の式で表せ。
- (2) 正の整数 n に対して、和 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ を n の式で表せ。
- (3) $S_n \geq 600$ となる最小の正の整数 n を求めよ。

解答 (1) $a_{2m} = 3m - 1$

(2) n が偶数のとき $S_n = \frac{3}{4}n^2$, n が奇数のとき $S_n = \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{4}$

(3) $n = 29$

(1) 1, 2, 4, 5, 7, 8, $\dots$ であり $a_{2m-1} = 1 + 3(m-1) = 3m - 2$

よって $a_{2m} = a_{2m-1} + 1 = 3m - 1$

(2) n が偶数のとき、 $n = 2m$ とすると

$$S_n = S_{2m} = \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^m (3k-2+3k-1) = \sum_{k=1}^m (6k-3)$$

$$= 3m^2 = 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}n^2$$

n が奇数のとき, $n = 2m-1$ とすると

$$S_n = S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m} = 3m^2 - (3m-1) = 3\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{4}$$

$$(3) \quad \frac{3}{4}x^2 = 600 \text{ を解くと } x = 20\sqrt{2} = 28.28\cdots$$

$$n \leq 28 \text{ のとき } S_n \leq S_{28} = \frac{3}{4} \cdot 28^2 = 588 < 600$$

$$S_{29} = \frac{3}{4} \cdot 29^2 + \frac{1}{4} = 631 > 600$$

よって, 求める n の値は $n = 29$

C 21 - 5

m, n は正の整数で $m < n$ とする。このとき, m 以上 n 以下の分数で, 5 を分母とし, 5 の倍数でない整数を分子とするものの全体の和を求めよ。

解答 $2(m+n)(n-m)$

m 以上 n 以下の分数で, 5 を分母とするもの (整数も含む) を書き出すと

$$\frac{5m}{5}, \frac{5m+1}{5}, \frac{5m+2}{5}, \dots, \frac{5n-1}{5}, \frac{5n}{5}$$

これは初項 m , 末項 n , 公差 $\frac{1}{5}$, 項数 $5(n-m)+1$ の等差数列である。

よって, その和を S_1 とすると $S_1 = \frac{1}{2}\{5(n-m)+1\}(m+n)$

また, m 以上 n 以下の整数の和を S_2 とすると $S_2 = \frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)$

求める和は $S_1 - S_2$ であるから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\{5(n-m)+1\}(m+n) - \frac{1}{2}(n-m+1)(m+n) \\ &= \frac{1}{2}(m+n)\{5(n-m)+1-(n-m+1)\} \\ &= \frac{1}{2}(m+n) \cdot 4(n-m) = 2(m+n)(n-m) \end{aligned}$$

C 21 - 6

- (1) 数列 $1, 2, 3, \dots, n$ において、隣接する 2 数の積の総和を求めよ。
 (2) 数列 $1, 2, 3, \dots, n$ において、互いに相異なり、かつ隣接しない 2 数の積の総和を求めよ。

解答 (1) $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$ (2) $\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

(1) 求める和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

(2) 求める和を T とすると

$$(1+2+\dots+n)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + 2(S+T)$$

$$\text{すなわち } \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2(S+T)$$

したがって、(1) より

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

C 21 - 7

数列 $\{a_n\}$ を、初項 1、公差 3 の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの n 個の項のうち、異なる 2 項の積の総和を S_n とする。例えば、 $S_3 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ である。このとき、 S_{10} を求めよ。

解答 9090

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$$

$(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{10}^2 + 2S_{10}$ であるから

$$S_{10} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{10} a_k \right)^2 - \sum_{k=1}^{10} a_k^2 \right\}$$

$$\text{ここで } \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (3k-2) = 3 \times \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 - 2 \times 10 = 165 - 20 = 145$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = \sum_{k=1}^{10} (3k-2)^2 = \sum_{k=1}^{10} (9k^2 - 12k + 4)$$

$$= 9 \times \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - 12 \times \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 4 \times 10$$

$$= 3465 - 660 + 40 = 2845$$

$$\text{よって } S_{10} = \frac{1}{2}(145^2 - 2845) = \frac{1}{2}(21025 - 2845) = 9090$$

第 22 章 漸化式・数学的帰納法の基礎

A 22 - 1

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) \ a_1=1, \ a_{n+1}=a_n+6 \qquad (2) \ a_1=2, \ a_{n+1}=-3a_n$$

$$(3) \ a_1=3, \ a_{n+1}-a_n=1 \qquad (4) \ a_1=3, \ 2a_{n+1}=a_n$$

解答 (1) $a_n=6n-5$ (2) $a_n=2(-3)^{n-1}$ (3) $a_n=n+2$ (4) $a_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1) $a_{n+1}=a_n+6$ から $a_{n+1}-a_n=6$

よって、数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公差 6 の等差数列である。

したがって、一般項は $a_n=1+(n-1)\cdot 6$ すなわち $a_n=6n-5$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 2, 公比 -3 の等比数列である。

したがって、一般項は $a_n=2(-3)^{n-1}$

(3) 数列 $\{a_n\}$ は初項 3, 公差 1 の等差数列である。

したがって、一般項は $a_n=3+(n-1)\cdot 1$ すなわち $a_n=n+2$

(4) $2a_{n+1}=a_n$ から $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

よって、数列 $\{a_n\}$ は初項 3, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

したがって、一般項は $a_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

A 22 - 2

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1, \ a_{n+1}=a_n+8n$$

解答 $a_n=4n^2-4n+1$

条件より $a_{n+1}-a_n=8n$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $8n$ であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 8k=1+8\cdot \frac{1}{2}(n-1)n$$

よって $a_n=4n^2-4n+1$

初項は $a_1=1$ であるから、この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって、一般項は $a_n = 4n^2 - 4n + 1$

A 22 - 3

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$$

解答 $a_n = -2^n + 3$

漸化式を変形すると $a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

$b_n = a_n - 3$ とすると $b_{n+1} = 2b_n$

よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 - 3 = 1 - 3 = -2$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$

したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = b_n + 3$ より $a_n = -2^n + 3$

A 22 - 4

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+2a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。

(2) 第 n 項 a_n を推測して、それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答 (1) $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{8}$ (2) $a_n = \frac{1}{2n}$, 証明略

$$(1) \quad a_2 = \frac{a_1}{1+2a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \qquad a_3 = \frac{a_2}{1+2a_2} = \frac{\frac{1}{4}}{1+2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{1+2a_3} = \frac{\frac{1}{6}}{1+2 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{1}{8}$$

(2) $a_1 = \frac{1}{2}$ と (1) の結果から、 $a_n = \frac{1}{2n}$ …… (A) と推測される。

この推測が正しいことを、数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき (A) の右辺は $\frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

初項は $a_1 = \frac{1}{2}$ であるから, $n=1$ のとき, (A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち $a_k = \frac{1}{2k}$ であると仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1+2a_k} = \frac{\frac{1}{2k}}{1+2 \cdot \frac{1}{2k}} = \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2(k+1)}$$

よって, $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について (A) が成り立つ。

B 22 - 1

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

解答 $a_n = \frac{1}{3^n - 1}$

$a_1 > 0$ であるから, 漸化式により $a_2 > 0$

以下同様にして, すべての自然数 n について $a_n > 0$ であるから $a_n \neq 0$

漸化式を変形すると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 3}{a_n} = 2 + \frac{3}{a_n} = \frac{3}{a_n} + 2$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ とすると } b_{n+1} = 3b_n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また $b_1 = \frac{1}{a_1} = 2$

① を変形すると $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

よって, 数列 $\{b_n + 1\}$ は, 初項 $b_1 + 1 = 3$, 公比 3 の等比数列であるから

$$b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1}$$

すなわち $b_n = 3^n - 1$

したがって $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3^n - 1}$

B 22 - 2

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

解答 $a_n=3^n-2^n$

漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$

$\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}$

これを变形すると $b_{n+1}-1 = \frac{2}{3}(b_n-1)$

よって、数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1 = -\frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n-1 = -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに $\frac{a_n}{3^n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

したがって $a_n = 3^n - 2^n$

B 22 - 3

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n=2a_n-n$ であるとき、 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n=2^n-1$

$S_1=2a_1-1$ より $a_1=2a_1-1$

よって $a_1=1$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ であるから、与えられた関係式より

$$a_{n+1} = \{2a_{n+1} - (n+1)\} - (2a_n - n)$$

これより $a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 1$

すなわち $a_{n+1} = 2a_n + 1$

この漸化式を变形すると

$$a_{n+1}+1 = 2(a_n+1)$$

したがって、数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=2$ 、公比 2 の等比数列であるから

$$a_n+1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

すなわち $a_n = 2^n - 1$

B 22 - 4

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

解答 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$① \text{ から } a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \text{また } a_2 - 3a_1 = 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

よって、数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 1、公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1} \quad \dots\dots ②$$

$$① \text{ から } a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \quad \text{また } a_2 - 2a_1 = 4 - 2 \cdot 1 = 2$$

よって、数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 2、公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \dots\dots ③$$

$$③ - ② \text{ から } a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

B 22 - 5

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$$

解答 $a_n = (n+2) \cdot 3^{n-2}$

$$\text{漸化式 } a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \text{ を変形すると } a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は 公比 3、初項 $a_2 - 3a_1 = 1$ の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 3a_n = 3^{n-1}$$

$$\text{両辺を } 3^{n+1} \text{ で割ると } \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{9}$$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ とすると } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{9}$$

よって、 $\{b_n\}$ は公差 $\frac{1}{9}$ 、初項 $b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$ の等差数列であるから

$$b_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{9} \quad \text{すなわち} \quad b_n = \frac{1}{9}n + \frac{2}{9}$$

$$\text{したがって } a_n = 3^n \cdot b_n = (n+2) \cdot 3^{n-2}$$

B 22 - 6

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$a_1=1, b_1=3, a_{n+1}=3a_n+2b_n, b_{n+1}=2a_n+3b_n$$

(1) 数列 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$ の一般項を, それぞれ求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を, それぞれ求めよ。

解答 (1) $a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1}$, $a_n-b_n=-2$

$$(2) a_n=2\cdot 5^{n-1}-1, b_n=2\cdot 5^{n-1}+1$$

(1) $a_{n+1}=3a_n+2b_n$ …… ①, $b_{n+1}=2a_n+3b_n$ …… ② とする。

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{ から } a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$$

$$\text{また } a_1+b_1=1+3=4$$

数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4, 公比 5 の等比数列であるから

$$a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1} \text{ …… } \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から } a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$$

$$\text{また } a_1-b_1=1-3=-2$$

$$\text{よって } a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots=a_2-b_2=a_1-b_1=-2$$

$$\text{したがって } a_n-b_n=-2 \text{ …… } \textcircled{4}$$

$$(2) \textcircled{3}+\textcircled{4} \text{ から } 2a_n=4\cdot 5^{n-1}-2 \quad \text{よって } a_n=2\cdot 5^{n-1}-1$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{4} \text{ から } 2b_n=4\cdot 5^{n-1}+2 \quad \text{よって } b_n=2\cdot 5^{n-1}+1$$

B 22 - 7

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$a_1=6, b_1=1, a_{n+1}=a_n+3b_n, b_{n+1}=2a_n+2b_n$$

(1) 数列 $\{a_n-b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{2a_n+3b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を, それぞれ求めよ。

解答 (1) $a_n-b_n=5\cdot (-1)^{n-1}$ (2) $2a_n+3b_n=15\cdot 4^{n-1}$

$$(3) a_n=3\{(-1)^{n-1}+4^{n-1}\}, b_n=-2\cdot (-1)^{n-1}+3\cdot 4^{n-1}$$

$a_{n+1}=a_n+3b_n$ …… ①, $b_{n+1}=2a_n+2b_n$ …… ② とする。

$$(1) \textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から } a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$$

$$\text{また } a_1-b_1=6-1=5$$

よって, 数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 5, 公比 -1 の等比数列で

$$a_n - b_n = 5 \cdot (-1)^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(2) ①×2+②×3 から $2a_{n+1} + 3b_{n+1} = 4(2a_n + 3b_n)$

また $2a_1 + 3b_1 = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 15$

よって、数列 $\{2a_n + 3b_n\}$ は初項 15、公比 4 の等比数列で

$$2a_n + 3b_n = 15 \cdot 4^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

(3) ③×3+④ から $5a_n = 15 \cdot (-1)^{n-1} + 15 \cdot 4^{n-1}$

よって $a_n = 3\{(-1)^{n-1} + 4^{n-1}\}$

③ より、 $b_n = a_n - 5 \cdot (-1)^{n-1}$ であるから

$$b_n = 3\{(-1)^{n-1} + 4^{n-1}\} - 5 \cdot (-1)^{n-1} = -2 \cdot (-1)^{n-1} + 3 \cdot 4^{n-1}$$

B 22 - 8

n は自然数とする。 $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

解答 略

「 $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数である」を (A) とする。

[1] $n=1$ のとき $3^{1+1} + 4^{2 \cdot 1 - 1} = 9 + 4 = 13$

よって、 $n=1$ のとき、(A) が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定する。

すなわち、ある整数 m を用いて $3^{k+1} + 4^{2k-1} = 13m$ と表されると仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} 3^{(k+1)+1} + 4^{2(k+1)-1} &= 3 \cdot 3^{k+1} + 4^{2k+1} \\ &= 3(13m - 4^{2k-1}) + 4^2 \cdot 4^{2k-1} \\ &= 39m - 3 \cdot 4^{2k-1} + 16 \cdot 4^{2k-1} \\ &= 13(3m + 4^{2k-1}) \end{aligned}$$

ここで、 $3m + 4^{2k-1}$ は整数である。

よって、 $3^{(k+1)+1} + 4^{2(k+1)-1}$ は 13 の倍数であるから、 $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について (A) が成り立つ。

別解 $n=k$ のとき $3^{k+1} + 4^{2k-1} = 13m$ と仮定して、 $n=k+1$ のときについて、次のように変形してもよい。

$$\begin{aligned} 3^{(k+1)+1} + 4^{2(k+1)-1} &= 3 \cdot 3^{k+1} + 4^2 \cdot 4^{2k-1} \\ &= 3(3^{k+1} + 4^{2k-1}) + 13 \cdot 4^{2k-1} \end{aligned}$$

$$= 3 \cdot 13m + 13 \cdot 4^{2k-1} = 13(3m + 4^{2k-1})$$

C 22 - 1

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = 16a_n^5$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n = 2^{2 \cdot 5^{n-1} - 1}$

$a_1 = 2 > 0$ より、漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n > 0$ である。

漸化式について、両辺の 2 を底とする対数をとると $\log_2 a_{n+1} = \log_2 16a_n^5$

ここで $\log_2 16a_n^5 = \log_2(2^4 \cdot a_n^5) = 4 + 5\log_2 a_n$

よって $\log_2 a_{n+1} = 4 + 5\log_2 a_n$

$\log_2 a_n = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 4 + 5b_n$

変形すると $b_{n+1} + 1 = 5(b_n + 1)$

よって、数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 5 の等比数列で、初項は

$$b_1 + 1 = \log_2 a_1 + 1 = \log_2 2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

ゆえに $b_n + 1 = 2 \cdot 5^{n-1}$ よって $b_n = 2 \cdot 5^{n-1} - 1$

したがって $a_n = 2^{b_n} = 2^{2 \cdot 5^{n-1} - 1}$

C 22 - 2

$a_1 = 1$, $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められている数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}$

$\frac{a_n}{n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n$

また $b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$

よって、数列 $\{b_n\}$ は、初項 1、公比 2 の等比数列であるから

$$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

したがって、 $\frac{a_n}{n} = 2^{n-1}$ であるから $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

C 22 - 3

数列 $\{x_n\}$ が $x_1=3$, $x_{n+1}=\frac{4x_n-2}{x_n+1}$ で定義されている。

- (1) $x=\frac{4x-2}{x+1}$ の解を α , β ($\alpha<\beta$) とする。 $y_n=\frac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$ で定義される数列 $\{y_n\}$ が満たす漸化式を導き、一般項 y_n を求めよ。
- (2) 一般項 x_n を求めよ。

解答 (1) $y_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (2) $x_n=\frac{2^{n-2}-2\cdot 3^{n-1}}{2^{n-2}-3^{n-1}}$

(1) $x=\frac{4x-2}{x+1}$ から $x(x+1)=4x-2$ ただし $x+1\neq 0$

よって $x^2-3x+2=0$ ゆえに $x=1, 2$

これは $x+1\neq 0$ を満たす。

したがって $\alpha=1, \beta=2$

よって, $y_n=\frac{x_n-2}{x_n-1}$ …… ① であるから

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}-1} = \frac{\frac{4x_n-2}{x_n+1}-2}{\frac{4x_n-2}{x_n+1}-1} = \frac{4x_n-2-2(x_n+1)}{4x_n-2-(x_n+1)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{x_n-2}{x_n-1} = \frac{2}{3} y_n \end{aligned}$$

また $y_1=\frac{x_1-2}{x_1-1}=\frac{3-2}{3-1}=\frac{1}{2}$

よって, 数列 $\{y_n\}$ が満たす漸化式は $y_{n+1}=\frac{2}{3}y_n, y_1=\frac{1}{2}$

したがって $y_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(2) ① から $(x_n-1)y_n=x_n-2$

よって $(y_n-1)x_n=y_n-2$

$y_n=1$ のとき ① を満たす x_n が存在しないから, すべての自然数 n に対して

$$y_n \neq 1$$

ゆえに, $x_n=\frac{y_n-2}{y_n-1}$ であるから

$$x_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1} = \frac{2^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-1}}{2^{n-2} - 3^{n-1}}$$

C 22 - 4

$a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+2n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1)$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2(n+1), \quad a_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$$

$$a_{n+1} = 3a_n + 2n, \quad a_1 = 1$$

辺々引くと $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 2, \quad a_2 - a_1 = 4$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とおくと } b_{n+1} = 3b_n + 2$$

よって $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1), \quad b_1 + 1 = a_2 - a_1 + 1 = 5$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 5, 公比 3 の等比数列であるから

$$b_n + 1 = 5 \cdot 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 1$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (5 \cdot 3^{k-1} - 1) \\ &= 1 + 5 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} - (n-1) = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1) \end{aligned}$$

初項は $a_1=1$ であるから, この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって $a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1)$

別解 $b_n = a_n - (\alpha n + \beta)$ とおくと $a_n = b_n + \alpha n + \beta$

これを漸化式に代入して

$$b_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3(b_n + \alpha n + \beta) + 2n$$

よって $b_{n+1} = 3b_n + 2(\alpha+1)n + 2\beta - \alpha$

ここで $\{b_n\}$ が等比数列となるように α, β を定めるため,

$$2(\alpha+1)=0, \quad 2\beta-\alpha=0 \text{ とすると } \alpha=-1, \quad \beta=-\frac{1}{2}$$

このとき $b_{n+1} = 3b_n, \quad a_n = b_n - n - \frac{1}{2}$

また
$$b_1 = a_1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

したがって
$$b_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}$$

C 22 - 5

n を 3 以上の自然数とすると、不等式 $3^n > 8n$ …… (A) を証明せよ。

解答 略

[1] $n=3$ のとき 左辺 $= 3^3 = 27$, 右辺 $= 8 \cdot 3 = 24$

よって, $n=3$ のとき, (A) が成り立つ。

[2] $k \geq 3$ として, $n=k$ のとき (A) が成り立つ, すなわち $3^k > 8k$ が成り立つと仮定する。 $n=k+1$ のときの (A) の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 8(k+1) &= 3 \cdot 3^k - (8k+8) > 3 \cdot 8k - (8k+8) \\ &= 8(2k-1) \end{aligned}$$

$k \geq 3$ のとき, $8(2k-1) > 0$ であるから $3^{k+1} > 8(k+1)$

よって, $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から, 3 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ。

第 23 章 数列の応用

A 23 - 1

数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \dots$ において, $\frac{9}{128}$ は第何項であるか。
また, 初項からその項までの和を求めよ。

解答 第 68 項, $\frac{4057}{128}$

分母が等しいものを群として, 次のように区切って考える。

$$\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \mid \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \mid \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \dots$$

第 n 群の項数は 2^{n-1}

(前半) $\frac{9}{128} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{2^7}$ であるから, $\frac{9}{128}$ は第 7 群の 5 番目の数である。

第 1 群から第 6 群までの項数は

$$1 + 2 + \dots + 2^5 = \frac{1 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 63$$

$63 + 5 = 68$ であるから, $\frac{9}{128}$ は 第 68 項

(後半) 第 n 群に属する分数の総和は

$$\frac{1}{2^n} \{1 + 3 + \dots + (2 \cdot 2^{n-1} - 1)\} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \{1 + (2 \cdot 2^{n-1} - 1)\} = 2^{n-2}$$

よって, 初項から第 68 項までの和は

$$\begin{aligned} & 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^4 + \frac{1}{2^7} (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} + \frac{25}{2^7} = \frac{4057}{128} \end{aligned}$$

A 23 - 2

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 15x$ で囲まれる領域内 (境界を含む) にある格子点を考える。
ただし, 「格子点」とは, x 座標も y 座標も整数であるような点のことである。

(1) x 座標が 3 である格子点の個数を求めよ。

(2) この領域内にある格子点の個数を求めよ。

【解答】 (1) 37 (2) 576

$$x^2 = 15x \text{ とすると } x(x-15) = 0$$

よって、放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 15x$ は 2 点 $(0, 0)$, $(15, 225)$ で交わる。

(1) x 座標が 3 である格子点は、直線 $x = 3$ 上にあり、その座標を $(3, y)$ とすると

$$3^2 \leq y \leq 15 \cdot 3 \quad \text{すなわち} \quad 9 \leq y \leq 45$$

よって、求める格子点の個数は

$$45 - 9 + 1 = 37 \text{ (個)}$$

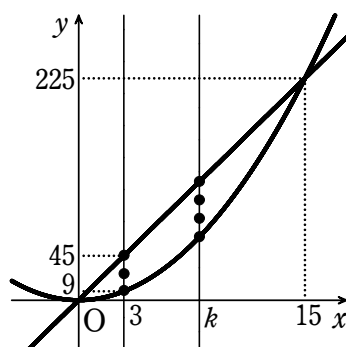
(2) 領域内の格子点で、直線 $x = k$ (k は整数) 上にあるものの座標を (k, y) とおくと、(1) と同様に考えて

$$k^2 \leq y \leq 15 \cdot k \quad \text{すなわち} \quad k^2 \leq y \leq 15k$$

よって、その格子点の個数は $15k - k^2 + 1$ (個)

$k = 0, 1, 2, \dots, 15$ であるから、求める格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{15} (15k - k^2 + 1) &= 15 \sum_{k=0}^{15} k - \sum_{k=0}^{15} k^2 + \sum_{k=0}^{15} 1 \\ &= 15 \sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{15} k^2 + \sum_{k=1}^{16} 1 \\ &= 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 - \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 + 16 \\ &= 576 \text{ (個)} \end{aligned}$$



A 23 - 3

n を正の整数, i を虚数単位として

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

【解答】 略

$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \dots\dots ①$ とする。

[1] $n = 1$ のとき $(\cos \theta + i \sin \theta)^1 = \cos \theta + i \sin \theta = \cos(1 \cdot \theta) + i \sin(1 \cdot \theta)$

よって、① は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき、① が成り立つと仮定すると

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta \dots\dots ②$$

$n = k + 1$ のときを考えると、② から

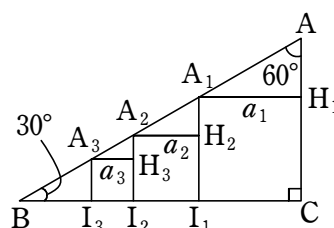
$$\begin{aligned}
 (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^k (\cos \theta + i \sin \theta) \\
 &= (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\
 &= (\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta) + i(\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta) \\
 &= \cos(k\theta + \theta) + i \sin(k\theta + \theta) = \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta
 \end{aligned}$$

よって、 $n = k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ① は成り立つ。

B 23 - 1

$A = 60^\circ$, $B = 30^\circ$, $AC = 1$ である直角三角形 ABC 内に、右の図のように、1 辺の長さが $a_1, a_2, a_3, \dots$ の正方形が並んでいる。



(1) a_1, a_2 の値を求めよ。

(2) 右の図の $\triangle A_1 A_2 H_2$ と $\triangle ABC$ が相似であることに着目して、一般に a_n, a_{n+1} の間に成り立つ関係式を導け。

(3) a_n の値を n を用いて表せ。

解答 (1) $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, $a_2 = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$ (2) $a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a_n$

(3) $a_n = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)^n$

(1) $\triangle ABC \sim \triangle AA_1 H_1$ から $AC : AH_1 = BC : A_1 H_1$

よって $1 : (1 - a_1) = \sqrt{3} : a_1$ よって $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

同様に、 $\triangle ABC \sim \triangle A_1 A_2 H_2$ から $1 : (a_1 - a_2) = \sqrt{3} : a_2$

$a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ から $a_2 = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$

(2) $\triangle ABC \sim \triangle A_n A_{n+1} H_{n+1}$ から $1 : (a_n - a_{n+1}) = \sqrt{3} : a_{n+1}$

よって $a_{n+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a_n$

(3) (1), (2) から $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$, 公比 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right)^n$$

B 23- 2

$\angle XPY (=60^\circ)$ の 2 辺 PX , PY に接する半径 1 の円を O_1 とする。次に, 2 辺 PX , PY および円 O_1 に接する円のうち半径の小さい方の円を O_2 とする。以下, 同様にして順に円 O_3 , O_4 , $\dots$ を作る。

- (1) 円 O_n の半径 r_n を n で表せ。
 (2) 円 O_n の面積を S_n とするとき, $S_1 + S_2 + \dots + S_n$ を n で表せ。

解答 (1) $r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (2) $\frac{9\pi}{8} \left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$

- (1) 右の図の $\triangle O_n O_{n+1} H$ について

$$O_n O_{n+1} = r_n + r_{n+1},$$

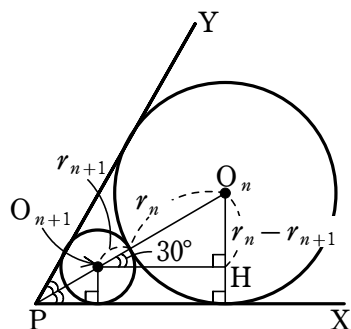
$$O_n H = r_n - r_{n+1}$$

$\angle O_n O_{n+1} H = 30^\circ$ であるから

$$O_n O_{n+1} = 2O_n H$$

よって $r_n + r_{n+1} = 2(r_n - r_{n+1})$

ゆえに $r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n$ また $r_1 = 1$



よって, 数列 $\{r_n\}$ は初項 1, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから $r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

- (2) $S_n = \pi r_n^2 = \pi \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$ であるから

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{\pi \left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9\pi}{8} \left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

B 23 - 3

自然数の列を次のような群に分けるとき

$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \{11, \dots\}, \dots$

- (1) 第 n 群の最初の数求めよ。
 (2) 第 n 群の数の和を求めよ。
 (3) 88 は第何群の何番目の数か。

解答 (1) $\frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ (2) $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$ (3) 第 13 群の 10 番目

- (1) 第 n 群は n 個の数を含むから, $n \geq 2$ のとき第 $(n-1)$ 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって、第 n 群の最初の数は $\frac{1}{2}n(n-1)+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$

これは、 $n=1$ についても成り立つ。

(2) (1) より、求める和は、初項 $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ 、公差 1、項数 n の等差数列の和である

$$\text{から} \quad \frac{1}{2}n\left\{2\cdot\frac{1}{2}(n^2-n+2)+(n-1)\cdot 1\right\}=\frac{1}{2}n(n^2+1)$$

(3) 第 n 群の最後の数は、(1) から $\frac{1}{2}(n^2-n+2)+(n-1)\cdot 1=\frac{1}{2}n(n+1)$

よって、88 が第 n 群に属するとすると $\frac{1}{2}(n-1)n < 88 \leq \frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$\text{ここで} \quad \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13=78 < 88 < \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$$

ゆえに、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 n は $n=13$

$$\text{第 13 群の最初の数は} \quad \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13+1=79 \qquad \text{また} \quad 88-79+1=10$$

よって、88 は第 13 群の 10 番目の数である。

B 23 - 4

n は自然数とする。座標平面上の 3 点 $(0, 0)$, $(2n, 0)$, $(0, n)$ を頂点とする三角形の周および内部にある格子点 (x 座標, y 座標がともに整数である点) の個数を求めよ。

解答 $(n+1)^2$

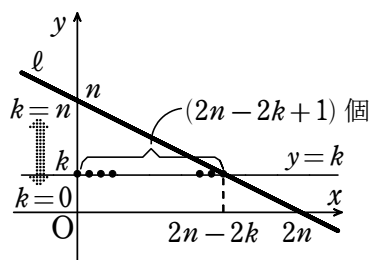
2 点 $(2n, 0)$, $(0, n)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$x+2y=2n$$

直線 $y=k$ ($k=0, 1, \cdots, n$) と直線 ℓ の交点の座標は $(2n-2k, k)$ であるから、題意に適する格子点のうち、直線 $y=k$ 上にある点の個数は $2n-2k+1$ である。

よって、求める格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (2n-2k+1) &= -2\sum_{k=0}^n k + (2n+1)\sum_{k=0}^n 1 \\ &= -n(n+1) + (2n+1)(n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$



別解 直線 $x+2y=2n$ ($0 \leq y \leq n$) 上の格子点 $(0, n)$,

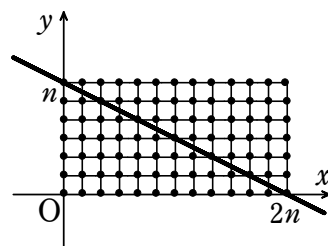
$(2, n-1), \dots, (2n, 0)$ の個数は $n+1$

4 点 $(0, 0), (2n, 0), (2n, n), (0, n)$ を頂点と

する長方形上の格子点の個数は $(2n+1)(n+1)$

よって、求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(2n+1)(n+1) - (n+1)\} + (n+1) = (n+1)^2$$



B 23 - 5

直線上に異なる 2 点 A, B があり、点 P は A と B の 2 点を行ったり来たりする。サイコロを投げて 1 の目が出たとき、P は他の点に移動し、1 以外の目が出たときはその場所にとどまる。初めに P は A にいるとして、サイコロを n 回投げたとき、P が A にいる確率を p_n で表す。

(1) p_1 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n で表せ。

(3) p_n を n で表せ。

解答 (1) $p_1 = \frac{5}{6}$ (2) $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}$ (3) $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(1) サイコロを 1 回投げたとき、P が A にいる確率が p_1 であるから、出た目は 1 以外の目である。よって $p_1 = \frac{5}{6}$

(2) サイコロを $(n+1)$ 回投げたとき、P が A にいる場合は

[1] n 回目に P が A にいて、 $(n+1)$ 回目に 1 以外の目が出る

[2] n 回目に P が B にいて、 $(n+1)$ 回目に 1 の目が出る

のいずれかであり、[1], [2] は互いに排反であるから

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{5}{6} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6} \quad \dots\dots ①$$

(3) ① から $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ また $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

よって、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

B 23 - 6

1 個のサイコロを投げ、4 以下の目が出ればボールの所有者が代わり、5 以上の目が出

れば代わらない，という規則に従って，最初 A が持っている 1 つのボールを，A，B の 2 人の間で受け渡し合うものとする。 n 回サイコロを投げた後，A，B がボールを持っている確率をそれぞれ a_n ， b_n としたとき

- (1) a_{n+1} と b_{n+1} をそれぞれ a_n ， b_n で表せ。
- (2) a_n と b_n をそれぞれ n の式で表せ。

解答 (1) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$ ， $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$

$$(2) a_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}, b_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

(1) $n+1$ 回サイコロを投げた後に，A がボールを持つには

[1] n 回後に A がボールを持っていて， $n+1$ 回目に 5 以上の目が出る

[2] n 回後に B がボールを持っていて， $n+1$ 回目に 4 以下の目が出る

の 2 つの場合がある。[1]，[2] の場合は互いに排反であるから

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2}{6} + b_n \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{B について同様に考えて } b_{n+1} = a_n \cdot \frac{4}{6} + b_n \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(2) \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ から } a_{n+1} - b_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_n - b_n)$$

よって，数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = \frac{2}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{3}$ ，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である

$$\text{から } a_n - b_n = \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \quad \text{また } a_n + b_n = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$(\textcircled{3} + \textcircled{4}) \div 2 \text{ から } a_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\} \quad (\textcircled{4} - \textcircled{3}) \div 2 \text{ から } b_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\}$$

B 23 - 7

硬貨を投げて数直線上を原点から正の向きに進む。表が出れば 1 進み，裏が出れば 2 進むものとする。このとき，ちょうど点 n に到達する確率を p_n で表す。ただし， n は自然数とする。

- (1) 2 以上の n について， p_{n+1} と p_n ， p_{n-1} との関係式を求めよ。
- (2) p_n を求めよ。

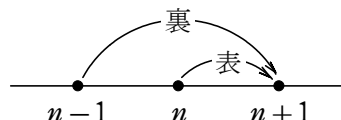
【解答】 (1) $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} \quad (n \geq 2)$ (2) $p_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1) 点 $n+1$ に到達するのは、

[1] 点 n に到達した後、表が出る。

[2] 点 $n-1$ に到達した後、裏が出る。

のどちらかの場合、これらは互いに排反である。



よって $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} \quad (n \geq 2)$

(2) $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}p_{n-1}$ を変形すると $p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{2}(p_n - p_{n-1})$

また、 $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ であるから $p_2 - p_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

よって $p_{n+1} - p_n = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$n \geq 2$ のとき $p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2}}$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $p_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

B 23 - 8

1 次式 $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が

$$f_1(x) = x+1, \quad x^2 f_{n+1}(x) = x^3 + x^2 + \int_0^x t f_n(t) dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき、 $f_n(x)$ を求めよ。

【解答】 $f_n(x) = \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}x + 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$f_n(x)$ は 1 次式であるから、 $f_n(x) = a_n x + b_n$ とおける。

$f_1(x) = x+1$ から $a_1 = 1, b_1 = 1$

また、 $x^2 f_{n+1}(x) = x^3 + x^2 + \int_0^x t f_n(t) dt$ から

$$\begin{aligned}
 x^2(a_{n+1}x + b_{n+1}) &= x^3 + x^2 + \int_0^x (a_n t^2 + b_n t) dt = x^3 + x^2 + \frac{a_n}{3} x^3 + \frac{b_n}{2} x^2 \\
 &= \left(1 + \frac{a_n}{3}\right) x^3 + \left(1 + \frac{b_n}{2}\right) x^2
 \end{aligned}$$

よって $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{3}$ …… ①, $b_{n+1} = 1 + \frac{b_n}{2}$ …… ②

① を変形すると $a_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \left(a_n - \frac{3}{2}\right)$

よって、数列 $\left\{a_n - \frac{3}{2}\right\}$ は、初項 $1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。

ゆえに $a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

② を変形すると $b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} (b_n - 2)$

よって、数列 $\{b_n - 2\}$ は、初項 $1 - 2 = -1$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

ゆえに $b_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

したがって $f_n(x) = \frac{3}{2} \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} x + 2 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

B 23 - 9

n が自然数のとき、 $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

解答 略

[1] $n=1$ のとき $3^{1+1} + 4^{2 \cdot 1 - 1} = 9 + 4 = 13$

よって、 $n=1$ のとき、 $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

[2] $n=k$ のとき $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数であると仮定する。

このとき、ある整数 m を用いて、 $3^{k+1} + 4^{2k-1} = 13m$ と表され

$$3^{k+1} = 13m - 4^{2k-1}$$

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}
 3^{(k+1)+1} + 4^{2(k+1)-1} &= 3 \cdot 3^{k+1} + 4^{2k+1} \\
 &= 3(13m - 4^{2k-1}) + 4^2 \cdot 4^{2k-1} \\
 &= 39m - 3 \cdot 4^{2k-1} + 16 \cdot 4^{2k-1} \\
 &= 13(3m + 4^{2k-1})
 \end{aligned}$$

ここで、 $3m + 4^{2k-1}$ は整数である。

よって、 $n = k + 1$ のときも $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

[1], [2] から、すべての自然数 n について $3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 の倍数である。

別解 $n = k$ のとき $3^{k+1} + 4^{2k-1} = 13m$ と仮定して、 $n = k + 1$ のときについて、次のように変形してもよい。

$$\begin{aligned} 3^{(k+1)+1} + 4^{2(k+1)-1} &= 3 \cdot 3^{k+1} + 4^2 \cdot 4^{2k-1} \\ &= 3(3^{k+1} + 4^{2k-1}) + 13 \cdot 4^{2k-1} \\ &= 3 \cdot 13m + 13 \cdot 4^{2k-1} \\ &= 13(3m + 4^{2k-1}) \end{aligned}$$

B 23 - 10

自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を、 $(3 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ。
- (2) $(3 - \sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 (1) $a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n$ (2) 略

$$(3) \quad a_n = \frac{(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n}{2}, \quad b_n = \frac{\sqrt{5} \{(3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n\}}{10}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{5} &= (3 + \sqrt{5})^{n+1} = (3 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})^n = (3 + \sqrt{5})(a_n + b_n\sqrt{5}) \\ &= (3a_n + 5b_n) + (a_n + 3b_n)\sqrt{5} \end{aligned}$$

a_{n+1} , b_{n+1} , $3a_n + 5b_n$, $a_n + 3b_n$ は自然数であるから

$$a_{n+1} = 3a_n + 5b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 3b_n$$

$$(2) \quad 3 + \sqrt{5} = a_1 + b_1\sqrt{5} \text{ で、} a_1, b_1 \text{ は自然数であるから} \quad a_1 = 3, \quad b_1 = 1$$

$$(3 - \sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5} \quad \dots\dots ① \quad \text{とおく。}$$

[1] $n = 1$ のとき

$$\text{左辺} = 3 - \sqrt{5}, \quad \text{右辺} = a_1 - b_1\sqrt{5} = 3 - \sqrt{5}$$

ゆえに、 $n = 1$ のとき ① は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき ① が成り立つ、すなわち

$$(3 - \sqrt{5})^k = a_k - b_k\sqrt{5} \quad \dots\dots ②$$

と仮定する。

$n = k + 1$ のとき、① の左辺について考えると、② により

$$\begin{aligned}(3-\sqrt{5})^{k+1} &= (3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^k = (3-\sqrt{5})(a_k - b_k\sqrt{5}) \\ &= (3a_k + 5b_k) - (a_k + 3b_k)\sqrt{5}\end{aligned}$$

ここで, (1) により $a_{k+1} = 3a_k + 5b_k$, $b_{k+1} = a_k + 3b_k$ であるから

$$(3-\sqrt{5})^{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{5}$$

ゆえに, ① は $n = k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] から, ① はすべての自然数 n について成り立つ。

$$(3) \quad (3+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$(3-\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ から } a_n = \frac{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n}{2}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ から } b_n = \frac{(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\{(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\}}{10}$$

B 23 - 11

$4(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = (2n+1)a_n + 1$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) で定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測し, その推測が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

解答 (1) $a_1=1, a_2=3, a_3=5$ (2) $a_n=2n-1$; 証明略

(1) $4(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = (2n+1)a_n + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$ とする。

① で, $n=1$ とすると $4a_1 = 3a_1 + 1$ よって $a_1=1$

① で, $n=2$ とすると $4(a_1 + a_2) = 5a_2 + 1$ よって $a_2 = 4a_1 - 1 = 4 - 1 = 3$

① で, $n=3$ とすると $4(a_1 + a_2 + a_3) = 7a_3 + 1$

$$\text{よって } a_3 = \frac{4(a_1 + a_2) - 1}{3} = \frac{4(1+3) - 1}{3} = 5$$

(2) (1) から, $a_n = 2n - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$ と推測できる。

[1] $n=1$ のとき, ② で $n=1$ とすると $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

(1) より $a_1=1$ であるから, $n=1$ のとき ② は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, ② が成り立つと仮定すると $a_k = 2k - 1$

$n=k+1$ のときを考えると, ① から

$$\{2(k+1) + 1\}a_{k+1} + 1 = 4(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})$$

$$\begin{aligned}
 &= 4(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + 4a_{k+1} \\
 &= (2k+1)a_k + 1 + 4a_{k+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } (2k+3)a_{k+1} = (2k+1)a_k + 4a_{k+1}$$

$$\text{よって } (2k-1)a_{k+1} = (2k+1)a_k = (2k+1)(2k-1)$$

$$2k-1 \neq 0 \text{ であるから } a_{k+1} = 2k+1 = 2(k+1)-1$$

よって、 $n = k+1$ のときにも ② は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ② は成り立つ。

B 23 - 12

$t = x + \frac{1}{x}$ とおくと、 $x^n + \frac{1}{x^n}$ は t の n 次式になることを数学的帰納法により証明せよ。

解答 略

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき } \quad x^1 + \frac{1}{x^1} = t$$

$$n=2 \text{ のとき } \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = t^2 - 2$$

よって、 $n=1, 2$ のとき、 $x^n + \frac{1}{x^n}$ は t の n 次式になる。

$$[2] \quad n=k, k+1 \text{ (} k \text{ は自然数) のとき, } x^n + \frac{1}{x^n} \text{ が } t \text{ の } n \text{ 次式になると仮定する。}$$

このとき

$$\begin{aligned}
 x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} &= \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - x \cdot \frac{1}{x} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \\
 &= \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) t - \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \cdots \cdots \text{①}
 \end{aligned}$$

仮定より、 $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ は t の $k+1$ 次式、 $x^k + \frac{1}{x^k}$ は t の k 次式である。

よって、① から $x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}}$ は t の $k+2$ 次式になる。

$$[1], [2] \text{ により, すべての自然数 } n \text{ について, } x^n + \frac{1}{x^n} \text{ は } t \text{ の } n \text{ 次式になる。}$$

C 23 - 1

平面上において、 n 本の直線は次の 2 つの条件を満たしている。

- (i) どの 2 本の直線も平行でない (ii) どの 3 本の直線も 1 点では交わらない

このとき、 n 本の直線によって分けられる平面の部分の個数を a_n とする。このとき a_n の一般項を求めよ。

解答 (ア) $n+1$ (イ) a_n+n+1 (ウ) $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$

n 本の直線が引かれているところにもう 1 本直線を引くと、この直線は $n+1$ 個の部分と交わるから、部分の個数は $n+1$ 個増える。

したがって $a_{n+1} = a_n + n + 1$

よって $a_{n+1} - a_n = n + 1$

すなわち、 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $n+1$

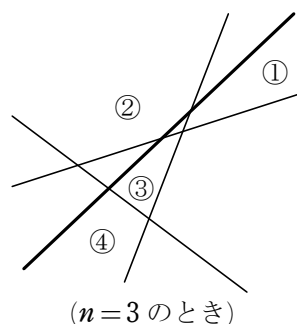
$a_1=2$ であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 2 + \frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$a_1=2$ から、① は $n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$



C 23 - 2

次のような操作を考える。

「1 つの線分に対し、それを 3 等分した長さを 1 辺とする正三角形の 2 辺でその線分の中央部を置き換える。」



面積 1 の正三角形 (図 1) から出発し、そのすべての辺に対し上の操作を繰り返す。

図 2, 図 3 はそれぞれ 1 回目, 2 回目の操作を行った後の図形である。

(1) 3 回目の操作を行った後の辺の数を求めよ。

(2) 3 回目の操作を行った後の面積を求めよ。

(3) n 回目の操作を行った後の面積を求めよ。

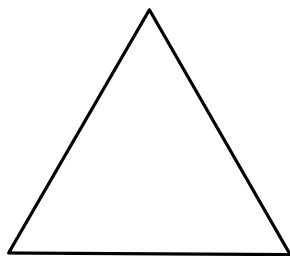


図 1

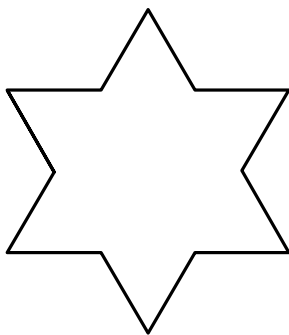


図 2

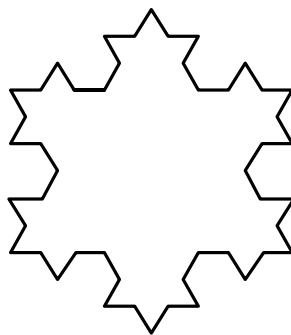


図 3

解答 (1) 192 (2) $\frac{376}{243}$ (3) $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

(1) 1つの辺につき, 1回の操作で4つの辺になる。

よって, 3回目の操作を行った後の辺の数は

$$3 \times 4 \times 4 \times 4 = 192$$

(2) n 回目の操作を行った後の図形の面積を S_n とし,

面積1の正三角形の1辺の長さを a とする。

1回目の操作により, 新たに加わる正三角形は 3個

その1辺の長さは $\frac{1}{3}a$ であるから, 面積は $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

よって
$$S_1 = 1 + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{4}{3}$$

2回目の操作により, 新たに加わる正三角形は

$$3 \times 4 = 12 \text{ (個)}$$

その1辺の長さは $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{1}{9}a$ であるから面積は

$$\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

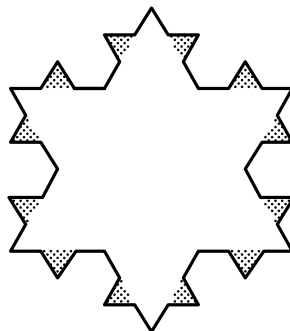
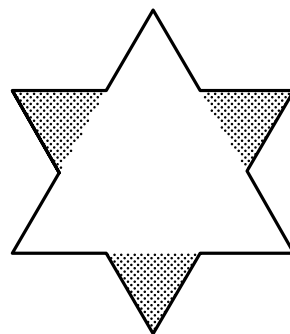
よって
$$S_2 = S_1 + 12 \times \frac{1}{81} = \frac{4}{3} + \frac{4}{27} = \frac{40}{27}$$

3回目の操作により, 新たに加わる正三角形は

$$3 \times 4 \times 4 = 48 \text{ (個)}$$

その1辺の長さは $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}a = \frac{1}{27}a$ であるから, 面積は

$$\left(\frac{1}{27}\right)^2$$



$$\text{よって} \quad S_3 = S_2 + 48 \times \left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{40}{27} + \frac{16}{243} = \frac{376}{243}$$

(3) k 回目の操作により, 新たに加わる正三角形は $3 \times 4^{k-1}$ 個

$$\text{その面積は} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$\text{したがって} \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^n 3 \times 4^{k-1} \times \left(\frac{1}{9}\right)^k = 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

C 23 - 3

自然数 n について, a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとするとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めよ。

(2) 自然数 m について, $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m^2}$ を, m を用いて表せ。

解答 (1) $a_1=1, a_2=1, a_3=1, a_4=2$ (2) $S = \frac{1}{6}m(4m^2 - 3m + 5)$

(1) a_1, a_2, a_3, a_4 は, それぞれ

$$a_1 \leq \sqrt{1} = 1, a_2 \leq \sqrt{2}, a_3 \leq \sqrt{3}, a_4 \leq \sqrt{4} = 2$$

を満たす整数のうち最大のものである。

$$\text{よって} \quad a_1=1, a_2=1, a_3=1, a_4=2$$

(2) 自然数 k に対して, $a_n=k$ となる n は

$$k \leq \sqrt{n} < k+1$$

すなわち $k^2 \leq n < (k+1)^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ を満たす。

$$\text{よって} \quad 1^2 \leq n < 2^2 \text{ のとき} \quad a_n=1$$

$$2^2 \leq n < 3^2 \text{ のとき} \quad a_n=2$$

$$\vdots$$

$$(m-1)^2 \leq n < m^2 \text{ のとき} \quad a_n=m-1$$

$$n=m^2 \text{ のとき} \quad a_n=m$$

① の範囲の自然数 n は $(2k+1)$ 個あるから

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=1}^{m-1} k(2k+1) + a_{m^2} = \sum_{k=1}^{m-1} (2k^2 + k) + m \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{6} (m-1)m(2m-1) + \frac{1}{2} (m-1)m + m \\
 &= \frac{1}{6} m(4m^2 - 3m + 5)
 \end{aligned}$$

C 23 - 4

n は自然数とする。3本の直線 $3x+2y=6n$, $x=0$, $y=0$ で囲まれる三角形の周および内部にあり、 x 座標と y 座標がともに整数である点は全部でいくつあるか。

解答 $3n^2 + 3n + 1$

$$3x+2y=6n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① と x 軸との交点の座標は $(2n, 0)$,

y 軸との交点の座標は $(0, 3n)$

直線 $y=k$ ($k=0, 1, \cdots, 2n$) と ① の交点の座標は

$$\left(k, 3n - \frac{3}{2}k\right)$$

よって、題意に適する格子点のうち、直線 $x=k$ 上に
ある個数を l_k とすると

$$k \text{ が偶数のとき} \quad l_k = 3n - \frac{3}{2}k + 1$$

$$k \text{ が奇数のとき} \quad l_k = 3n - \frac{3}{2}k - \frac{1}{2} + 1 = 3n - \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}$$

k が偶数のとき $k=2m$ ($m=0, 1, 2, \cdots, n$) とおけるから

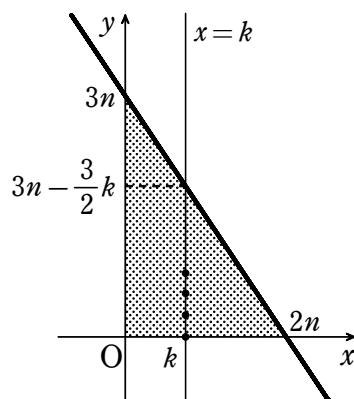
$$l_{2m} = 3n - \frac{3}{2} \cdot 2m + 1 = 3n - 3m + 1$$

k が奇数のとき $k=2m-1$ ($m=1, 2, \cdots, n$) とおけるから

$$l_{2m-1} = 3n - \frac{3}{2}(2m-1) + \frac{1}{2} = 3n - 3m + 2$$

よって、求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^n l_{2m} + \sum_{m=1}^n l_{2m-1} &= l_0 + \sum_{m=1}^n l_{2m} + \sum_{m=1}^n l_{2m-1} = l_0 + \sum_{m=1}^n (l_{2m} + l_{2m-1}) \\
 &= 3n + 1 + \sum_{m=1}^n \{(3n - 3m + 1) + (3n - 3m + 2)\} \\
 &= 3n + 1 + \sum_{m=1}^n \{-6m + 3(2n + 1)\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 3n + 1 - 6 \sum_{m=1}^n m + 3(2n+1) \sum_{m=1}^n 1 \\
&= 3n + 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 3(2n+1)n \\
&= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

別解 直線 $3x + 2y = 6n$ ($0 \leq x \leq 2n$) 上の格子点 $(0, 3n)$, $(2, 3n-3), \dots, (2n, 0)$ の個数は

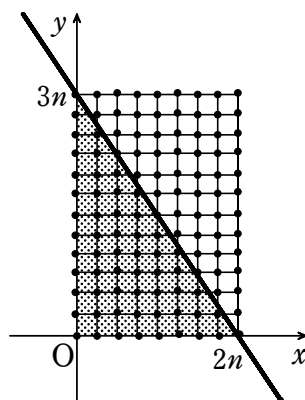
$$n+1$$

4 点 $(0, 0), (2n, 0), (2n, 3n), (0, 3n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$$(2n+1)(3n+1)$$

よって、求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \{ (2n+1)(3n+1) - (n+1) \} + (n+1) \\
&= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$



C 23 - 5

自然数を右の図のように並べて、上から第 m 行、左から第 n 列にある数を $a_{m, n}$ で表す。

(1) $a_{n, 1}, a_{1, n}$ を求めよ。

(2) $a_{m, n}$ を求めよ。

1	2	5	10	17	
4	3	6	11	18	
9	8	7	12		
16	15	14	13		

解答 (1) $a_{n, 1} = n^2, a_{1, n} = n^2 - 2n + 2$

(2) $m \geq n$ のとき $a_{m, n} = m^2 - n + 1, m < n$ のとき $a_{m, n} = n^2 - 2n + m + 1$

(1) 第 1 列の数は 1, 4, 9, 16, ……

よって $a_{n, 1} = n^2$

第 1 行の第 2 項以降の数 2, 5, 10, 17, …… は第 1 列の数に 1 を加えたものである。

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_{1, n} &= a_{n-1, 1} + 1 = (n-1)^2 + 1 \\
&= n^2 - 2n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$a_{1, 1} = 1$ であるから、① は $n = 1$ のときにも成り立つ。

よって $a_{1, n} = n^2 - 2n + 2$

1	2	5	10	17	
4	3	6	11	18	
9	8	7	12		
16	15	14	13		

- (2) [1] $m \geq n$ のとき, 第 m 行の第 1 列から第 n 列までの数は, 初項 m^2 , 公差 -1 の等差数列である。

よって
$$a_{m, n} = m^2 + (n-1) \cdot (-1) = m^2 - n + 1$$

- [2] $m < n$ のとき, 第 n 列の第 1 行から第 m 行までの数は, 初項 $n^2 - 2n + 2$, 公差 1 の等差数列である。

よって
$$a_{m, n} = n^2 - 2n + 2 + (m-1) \cdot 1 = n^2 - 2n + m + 1$$