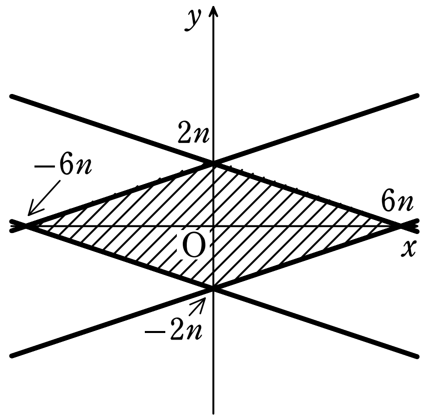
週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**問題**

1 座標平面上で x 座標の値と y 座標の値がいずれも整数である点を格子点という。n を自然数として，不等式 $|x|+3|y| \leqq 6n$ が表す座標平面上の領域内の格子点の個数を求めよ。

解答　$24n^2+4n+1$

不等式 $|x|+3|y| \leqq 6n$ が表す領域は，右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



【以下、四分割による解法を示す。別解あり。】
領域の対称性から，$x>0$，$y>0$ に含まれる格子点の個数を考える。
$x>0$，$y>0$ のとき　$x+3y \leqq 6n$

連立不等式 $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+3y \leqq 6n \end{cases}$ が表す領域を D とする。

領域 D に含まれる格子点のうち，直線 $y=k$ $(1 \leqq k \leqq 2n)$ 上にある格子点の個数は　$(6n-3k)$ 個
よって，領域 D に含まれる格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{2n}(6n-3k)=\frac{1}{2}\cdot 2n(6n-3)=6n^2-3n \text{ (個)}$$

図の対称性より，$x<0$ かつ $y>0$，$x<0$ かつ $y<0$，$x>0$ かつ $y<0$ に含まれる格子点の個数も同様にそれぞれ　$(6n^2-3n)$ 個
また，不等式 $|x|+3|y| \leqq 6n$ が表す領域内の格子点のうち，座標軸上にある格子点の個数は　$6n\times 2+2n\times 2+1=16n+1$ (個)
したがって，求める格子点の個数は

$$(6n^2-3n)\times 4+16n+1={}^{ア}24n^2+{}^{イ}4n+{}^{ウ}1 \text{ (個)}$$

2 数字の 1，2，3，4，5 がそれぞれ書かれたカードが 1 枚ずつ，合計 5 枚入った袋がある。その袋から 1 枚のカードを取り出し，数字を調べてからもとに戻す。この試行を繰り返し n 回行い，その n 回の試行で取り出したカードの数字の合計が偶数である確率を p_n とする。
(1)　p_1 および p_2 を求めよ。
(2)　p_{n+1} を p_n の式で表せ。

(3)　p_n を n の式で表せ。

解答　(1)　$p_1=\frac{2}{5}$，$p_2=\frac{13}{25}$　　(2)　$p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$　　(3)　$\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

(1)　p_1 は 1 回カードを取り出したとき，偶数のカードを取り出す確率である。

よって　　$p_1=\frac{2}{5}$

2 回カードを取り出したとき，取り出したカードの数字の合計が偶数となるのは次の場合である。

[1]　1 回目に偶数のカードを取り出し，2 回目に偶数のカードを取り出す。

[2]　1 回目に奇数のカードを取り出し，2 回目に奇数のカードを取り出す。

[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_2=p_1\cdot\frac{2}{5}+(1-p_1)\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{25}+\frac{9}{25}=\frac{13}{25}$$

(2)　$n+1$ 回カードを取り出したとき，取り出したカードの数字の合計が偶数となるのは次の場合である。

[1]　n 回の試行で取り出したカードの数字の合計が偶数で，$n+1$ 回目に偶数のカードを取り出す。

[2]　n 回の試行で取り出したカードの数字の合計が奇数で，$n+1$ 回目に奇数のカードを取り出す。

[1]，[2] は互いに排反であるから

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{2}{5}+(1-p_n)\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$$

よって　　$p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$

(3)　(2) から，$p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$ を変形すると　　$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{2}=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}$，公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

したがって　　$p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

3　正の偶数の列 2，4，6，…… を，第 n 群が n 個の数を含む次のような群に分ける。

2 | 4，6 | 8，10，12 | 14，16，18，20 | 22，24，26，28，30 | 32，……

(1)　第 12 群の 3 番目の数を求めよ。

(2)　472 が第何群の何番目の数かを答えよ。

解答　(1)　138　　(2)　第22群の5番目

第 $(n-1)$ 群までの項数は　　$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\dfrac{1}{2}n(n-1)$

よって，第 n 群の最初の数は，偶数の列の第 $\left\{\dfrac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 番目の数で

$$2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}=n^2-n+2$$

ゆえに，第 12 群の 1 番目の数は　　$12^2-12+2=134$

したがって，第 12 群に含まれる数は　　134，136，138，……

であるから，第 12 群の 3 番目の数は　　ア138

また，472 は，偶数の列の 236 番目の数である。

472 が第 n 群に含まれるとすると　　$\dfrac{1}{2}n(n-1)<236\leqq\dfrac{1}{2}n(n+1)$

よって　　$(n-1)n<472\leqq n(n+1)$

$21\cdot22=462$，$22\cdot23=506$ であるから　$n=22$

第 21 群までに含まれる項数は　$\dfrac{1}{2}\cdot21\cdot22=231$

また　$236-231=5$

したがって，472 は第 イ22 群の ウ5 番目の数である。

4　A $(5+6i)$，B $(-1+i)$，C $(-3-5i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を 1：4 に内分する点

(2)　線分 AB の中点

(3)　線分 AB を 5：1 に外分する点

(4)　△ABC の重心

解答　(1)　$\dfrac{19}{5}+5i$　　(2)　$2+\dfrac{7}{2}i$　　(3)　$-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}i$　　(4)　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$

(1)　$\dfrac{4(5+6i)+1\cdot(-1+i)}{1+4}=\dfrac{19+25i}{5}=\dfrac{19}{5}+5i$

(2)　$\dfrac{(5+6i)+(-1+i)}{2}=\dfrac{4+7i}{2}=2+\dfrac{7}{2}i$

(3)　$\dfrac{-1\cdot(5+6i)+5(-1+i)}{5-1}=\dfrac{-10-i}{4}=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}i$

(4)　$\dfrac{(5+6i)+(-1+i)+(-3-5i)}{3}=\dfrac{1+2i}{3}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$

週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**問題**

$\boxed{5}$ $\alpha=1-i$，$\beta=\sqrt{3}+i$ とする。ただし，偏角は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。　　(2)　$\arg\beta^4$，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta^4}\right|$ をそれぞれ求めよ。

$\boxed{解答}$　(1)　$\alpha\beta=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{23}{12}\pi+i\sin\dfrac{23}{12}\pi\right)$，

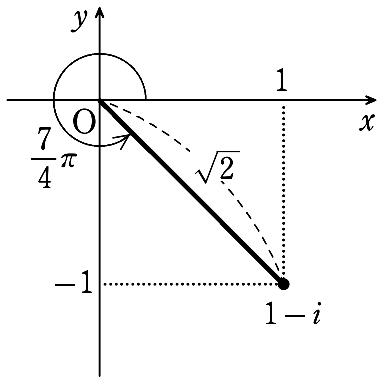
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$$

(2)　$\arg\beta^4=\dfrac{2}{3}\pi$，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta^4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{16}$

(1)　α，β をそれぞれ極形式で表すと

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right),$$

$$\beta=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



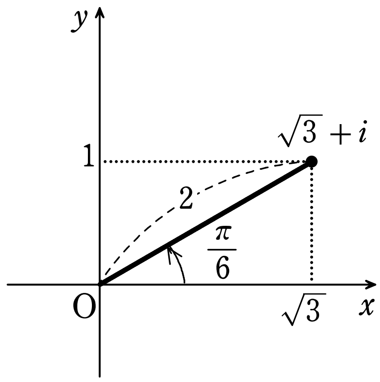
よって

$$\alpha\beta=\sqrt{2}\cdot 2\left\{\cos\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right),$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right)$$



(2)　(1) より　$\arg\beta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$\arg\beta^4=4\arg\beta=\frac{2}{3}\pi$$

(1) より　$|\alpha|=\sqrt{2}$，$|\beta|=2$ であるから

$$\left|\frac{\alpha}{\beta^4}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta^4|}=\frac{|\alpha|}{|\beta|^4}=\frac{\sqrt{2}}{2^4}=\frac{\sqrt{2}}{16}$$

$\boxed{6}$ (1)　$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$ を計算せよ。

(2)　方程式 $z^4=-8-8\sqrt{3}i$ の解を求めよ。

$\boxed{解答}$　(1)　-1　　(2)　$z=\pm(1+\sqrt{3}i)$，$\pm(\sqrt{3}-i)$

(1)　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^9=\cos\left(9\times\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(9\times\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=-1$$

(2)　解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$[r>0]$ とおくと　　$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$

また　　$-8-8\sqrt{3}\,i=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=16\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

ゆえに　　$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4=16,\ 4\theta=\frac{4}{3}\pi+2\pi\times k\quad (k\text{ は整数})$$

$r>0$ であるから　$r=2$

また　　$\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\times k$

よって　　$z=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\times k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\times k\right)\right\}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると　　$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$k=0$ とすると　　$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\,i$

$k=1$ とすると　　$z=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-\sqrt{3}+i$

$k=2$ とすると　　$z=2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)=-1-\sqrt{3}\,i$

$k=3$ とすると　　$z=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)=\sqrt{3}-i$

7　座標平面上の点 P(3，5) を，原点 O を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を Q とするとき，Q の座標を求めよ。

解答　$(-\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$

複素数平面上で考える。

$z=3+5i$ として，原点 O を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(3+5i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(3+5i)=-\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i$$

よって，点 Q の座標は　　$(-\sqrt{2},\ 4\sqrt{2})$

8　$\alpha=1+2i$，$\beta=-1+4i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

解答　$\gamma=-\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$

点 α が原点 O に移るような平行移動で，点 β，γ がそれぞれ β'，γ' に移るとすると

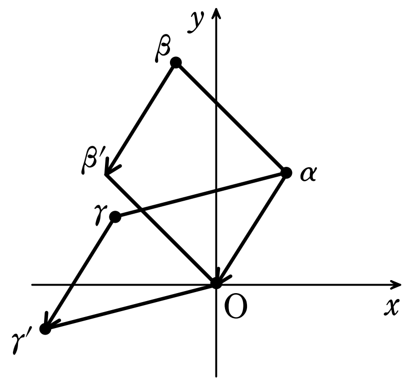
$$\beta'=\beta-\alpha=(-1+4i)-(1+2i)$$
$$=-2+2i$$
$$\gamma'=\gamma-\alpha$$

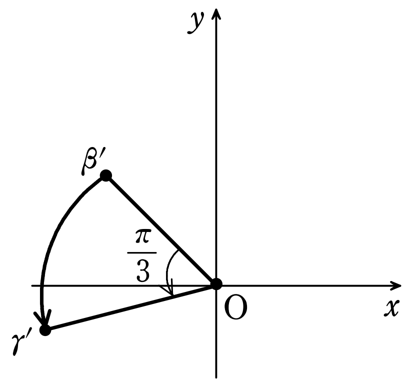
点 γ' は，点 β' を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

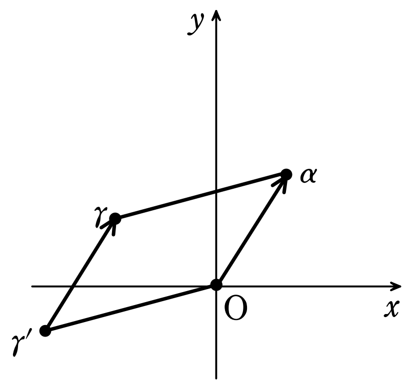
$$\gamma'=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(-2+2i)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2+2i)$$
$$=(-1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$$

よって

$$\gamma=\gamma'+\alpha$$
$$=(-1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i+(1+2i)$$
$$=-\sqrt{3}+(3-\sqrt{3})i$$







9　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=-1,\ a_{n+1}={a_n}^2+2na_n-2 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

解答　(1)　$a_2=-3$，$a_3=-5$，$a_4=-7$　　(2)　略

(1) $a_2=a_1{}^2+2\cdot1\cdot a_1-2=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=-3$

$a_3=a_2{}^2+2\cdot2\cdot a_2-2=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=-5$

$a_4=a_3{}^2+2\cdot3\cdot a_3-2=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=-7$

(2) (1) から，$a_n=-(2n-1)$ であると推測される。

$a_n=-(2n-1)$ を (A) とする。

[1] $n=1$ のとき

左辺$=a_1=-1$，右辺$=-(2\cdot1-1)=-1$

よって，$n=1$ のとき，(A) が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき (A) が成り立つ，すなわち

$a_k=-(2k-1)$ ……①

であると仮定する。

$a_{k+1}=a_k{}^2+2ka_k-2$ であるから，① より

$$a_{k+1}=\{-(2k-1)\}^2+2k\{-(2k-1)\}-2=(4k^2-4k+1)-4k^2+2k-2$$
$$=-2k-1=-\{2(k+1)-1\}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から，すべての自然数 n について (A) が成り立つ。