

第10回 (2024年7月13日実施)

週テスト (科目：数学 講師名：山中)

解答解説

1

(1) α, β は 2 次方程式 $2x^2 - 3x + 4 = 0$ の解であるから、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = 2$$

$$\text{したがって、} \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times 2 = -\frac{7}{4}$$

また、 $f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 7x + 3$ とし、 $f(x)$ を $2x^2 - 3x + 4$ で割ったときの商は $2x^2 + x - 1$ 、余りは 7 であるから、

$$f(x) = (2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x - 1) + 7$$

これと $\alpha^2 - 3\alpha + 4 = 0$ であることから

$$\begin{aligned} 4\alpha^4 - 4\alpha^3 + 3\alpha^2 + 7\alpha + 3 &= f(\alpha) \\ &= (2\alpha^2 - 3\alpha + 4)(2\alpha^2 + \alpha - 1) + 7 = 7 \end{aligned}$$

(2) $\cos 2\theta + \cos \theta = \log_2 a \cdots \cdots (*)$

(i) $a = 1$ のとき、 $\log_2 1 = 0$ より、 $(*)$ は、 $\cos 2\theta + \cos \theta = 0$ であるから、

$$2\cos^2 \theta - 1 + \cos \theta = 0$$

$$(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$$

これと $0 \leq \theta < 2\pi$ より $\cos \theta = \frac{1}{2}, -1$

よって、 $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

(ii) $(*)$ より $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = \log_2 a$

であるから、 $\cos \theta = t$ とすると、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $-1 \leq t \leq 1 \cdots \cdots ②$

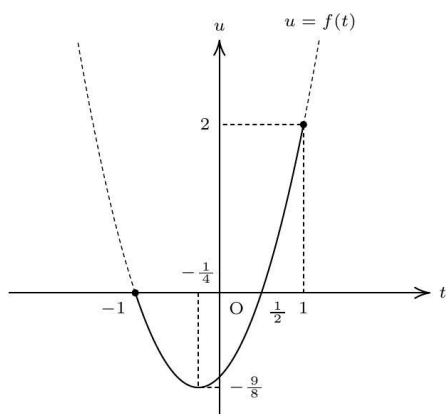
であり、① は、 $2t^2 + t - 1 = \log_2 a \cdots \cdots ③$

ここで、(2) において、 $f(t) = 2t^2 + t - 1$ とすると

$$f(t) = 2\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

であり、③ の実数解は曲線 $u = f(t)$ と直線 $u = \log_2 a$ の交点の t 座標 と一致する。

曲線 $u = f(t)$ を描くと、次の図のようになる。



また、 $\cos \theta = t$ かつ $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して、

$$\begin{cases} t = -1 \text{ のとき,} & \theta = \pi \text{ の 1 個,} \\ t = 1 \text{ のとき,} & \theta = 0 \text{ の 1 個,} \end{cases}$$

であり、 $-1 < t < 1$ のとき、 $\cos \theta = t$ を満たす θ の値は 2 個であるから (*) が異なる 2 つの実数解をもつのは直線 $u = \log_2 a$ が曲線 $u = f(t)$ の $-1 < t < 1$ の部分とただ 1 つの共有点をもつときである。

したがって、 $\log_2 a = -\frac{9}{8}$ または $0 < \log_2 a < 2$

であるから、求める a の値の範囲は、 $a = 2^{-\frac{9}{8}}$ または $1 < a < 4$

(3) 5 つの値 8, 3, a , 2, 7 の平均値が 5 である条件は $\frac{8+3+a+2+7}{5} = 5$ であるから、

$$a = 5$$

(これは 8, 3, a , 2, 7 が異なることに適する.)

また、データの中央値が a となる条件は、 $3 < a < 7 \cdots \cdots \textcircled{1}$

さらに、データの平均値 $\bar{x}$ は、

$$\bar{x} = \frac{8+3+a+2+7}{5} = \frac{a+20}{5} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \frac{23}{5} < \bar{x} < \frac{27}{5}$$

(4) 3 個のさいころを同時に振るとき、目の出方は、 $6^3 = 216$ 通り あり、これらは同様に確からしい。

このうち、出た目の積が 12 となる目の組合せは、(2, 2, 3), (2, 6, 1), (3, 4, 1) であり、目の出方を考えると、出た目の積が 12 となるのは、

$$\frac{3!}{2!1!} + 3! \times 2 = 15 \text{ 通り}$$

よってその確率は $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$ 。

また、出た目の和が 12 となる目の組合せは

(1, 5, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 5), (3, 3, 6), (3, 4, 5), (4, 4, 4)

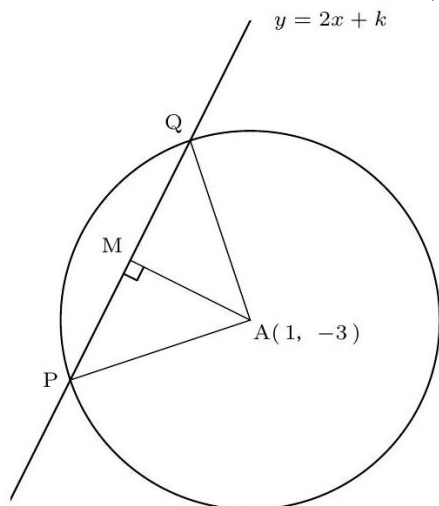
であり、目の出方を考えると、出た目の和が 12 となるのは

$$3! \times 3 + \frac{3!}{2!1!} \times 2 + 1 = 25 \text{ 通り.}$$

したがって、出た目の和が 12 となる確率は、 $\frac{25}{216}$

(5) 円 C の方程式 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ 変形すると、 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$ であるから、円 C の半径は $\sqrt{10}$

また、 C が直線 $y = 2x + k$ から切り取る線分の長さが $2\sqrt{5}$ となるのは次の図のようになるときである。ただし、点 $A(1, -3)$ は C の中心であり、2 点 P, Q は C と直線 $y = 2x + k$ の交点である。また、点 M は線分 PQ の中点とする。



点 M は線分 PQ の中点であるから、 $AP = AQ$ より、 $AM \perp PQ$.

また、 $PM = \sqrt{5}$, $AP = \sqrt{10}$ であるから、三平方の定理より $AM = \sqrt{5}$.

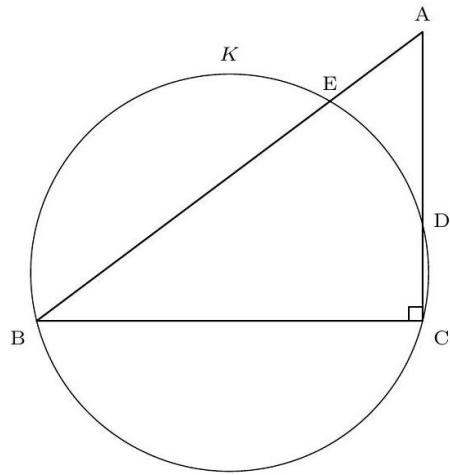
ここで、点と直線の距離の公式より $AM = \frac{|k + 5|}{\sqrt{5}} \dots\dots ②$

よって、 $\frac{|k + 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

これを解くと $k = 0, -10$

2

直角三角形 ABC を図示すると、次の図のようになる。



(1) $AB = 10$, $BC = 8$, $\angle BCA = 90^\circ$ であるから、三平方の定理より
$$CA = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

(2) 方べきの定理より、 $AE \times AB = AD \times AC$

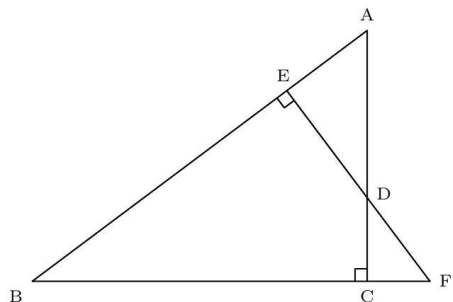
(1) の結果と条件より、 $AE \times 10 = (6 - 2) \times 6$

これより、 $AE = \frac{12}{5}$

(3) $\angle BCD = 90^\circ$ であるから、線分 BD は円 K の直径である。

したがって、円 K の半径 $= \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

(4) 直線 BC と直線 ED の交点 F を図示すると、 次の図のようになる。



(i) メネラウスの定理より $\frac{AE}{EB} \times \frac{BF}{FC} \times \frac{CD}{DA} = 1$

が成り立つから、(1)(2)の結果より、

$$\frac{\frac{12}{5}}{10 - \frac{12}{5}} \times \frac{BF}{FC} \times \frac{2}{4} = 1$$

これより、 $\frac{BF}{FC} = \frac{19}{3}$

であるから、 $BC = 8$ より、

$$\frac{CF + 8}{CF} = \frac{19}{3}$$

$$19CF = 3(CF + 8)$$

したがって、 $CF = \frac{3}{2}$

(ii) (i)の結果より $BF = 8 + \frac{3}{2} = \frac{19}{2}$

であるから、 $\angle BEF = 90^\circ$, $BE = \frac{38}{5}$ より、

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2 - \left(\frac{38}{5}\right)^2} \\ &= \frac{57}{10}. \end{aligned}$$

さらに、三角形 BFE は $\angle BEF = 90^\circ$ である直角三角形であるから 三角形 BEF の内接円の半径を r とすると、

$$BF = (BE - r) + (EF - r)$$

したがって

$$\begin{aligned} r &= \frac{BE + EF - BF}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{38}{5} + \frac{57}{10} - \frac{19}{2} \right) \\ &= \frac{19}{10} \end{aligned}$$

3 (1) ユークリッドの互除法を用いると、

$$4847 - 4662 = 18$$

$$4662 - 185 \times 25 = 37$$

$$185 - 37 \times 5 = 0$$

であるから、4662 と 4847 の最大公約数 g は、 $g = 37$

(2) (1) の結果より、 $4847 = 37 \times 131$

であるから、4847 の正の約数の個数は、 $(1 + 1)(1 + 1) = 4$

(3) (1) の結果より、

$$4662 = 37 \times 126$$

$$= 2 \times 3^2 \times 7 \times 37$$

であるから、4662 の正の約数のうち、3 の倍数であるものの総和は、

$$(1 + 2)(3 + 3^2)(1 + 7)(1 + 37) = 10944$$

(4)

$4662x + 4847y = g \cdots (*)$ に (1) の結果 $g = 37$ を用いると,

$$4662x + 4847y = 37$$

$$126x + 131y = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) 2 つの数 126 と 131 にユークリッドの互除法を用いると

$$131 - 126 = 5$$

$$126 - 5 \times 25 = 1$$

であるから,

$$1 = 126 - 5 \times 25$$

$$= 126 - (131 - 126) \times 25$$

$$= 126 \times 26 + 131 \times (-25).$$

これより,

$$126 \times 26 + 131 \times (-25) = 1. \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① - ② より,

$$126(x - 26) + 131(y + 25) = 0 \text{ であるから,}$$

$$126(x - 26) = -131(y + 25). \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③ において, 126 と 131 は互いに素であるから, 整数 k を用いて,

$$\begin{cases} x - 26 = -131k \\ y + 25 = 126k \end{cases} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{cases} x = 26 - 131k \\ y = -25 + 126k \end{cases} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

とおける。

④ より, $y > 0$ で y の値が最小となるのは $k = 1$ のときであるから, 求める x, y の組は, $(x, y) = (-105, 101)$

(ii) ④ より, $|x + y| = |1 - 5k|$ であるから, $|x + y| \leq a$

を満たす整数 k の値の範囲は $a \geq 0$ のもとで,

$$|1 - 5k| \leq a \iff \frac{1-a}{5} \leq k \leq \frac{1+a}{5} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

これより, ⑤ を満たす x, y の組の総数が 2020 となる条件は,

$$\begin{cases} 1010 \leq \frac{1+a}{5} < 1011 \\ -1010 < \frac{1-a}{5} \leq -1009 \end{cases}$$

であるから, 求める a の値の範囲は,

$$5049 \leq a < 5051$$