週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**解答解説**

1 点 $(-5,\ 10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$3x+4y=25$，$x=-5$

(方法 1)　接点の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，接線の方程式は　$x_0x+y_0y=25$

これが点 $(-5,\ 10)$ を通るとき　$-5x_0+10y_0=25$　すなわち $-x_0+2y_0=5$　…… ①

また，点 $(x_0,\ y_0)$ は円 $x^2+y^2=25$ 上にあるから　${x_0}^2+{y_0}^2=25$　…… ②

①，② から x_0 を消去して整理すると　${y_0}^2-4y_0=0$

よって　$y_0(y_0-4)=0$　　ゆえに　$y_0=4,\ 0$

① から　$y_0=4$ のとき $x_0=3$，　$y_0=0$ のとき $x_0=-5$

したがって，求める直線の方程式は　$3x+4y=25$，$-5x+0\cdot y=25$

すなわち　$3x+4y=25$，$x=-5$

(方法 2)　点 $(-5,\ 10)$ を通る直線の方程式は，k を定数として

$x=-5$　…… ①　または　$y=k(x+5)+10$　…… ②

円 $x^2+y^2=25$ の中心 $(0,\ 0)$ から直線 ① までの距離は 5 で，円の半径に等しいから，

直線 ① は円 $x^2+y^2=25$ の接線である。

② から　$kx-y+5k+10=0$

円 $x^2+y^2=25$ と直線 ② が接するとき，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ② の距離が円の半径

5 に等しいから　$\dfrac{|k\cdot 0-0+5k+10|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=5$　すなわち　$5|k+2|=5\sqrt{k^2+1}$

よって　$|k+2|=\sqrt{k^2+1}$

両辺を 2 乗して整理すると　$4k+3=0$　ゆえに　$k=-\dfrac{3}{4}$

このとき，② は　$y=-\dfrac{3}{4}(x+5)+10$　すなわち　$3x+4y=25$

したがって，求める直線の方程式は　$3x+4y=25$，$x=-5$

(方法 3)　点 $(-5,\ 10)$ を通る直線の方程式は，m を定数として

$y=m(x+5)+10$　…… ①　または　$x=-5$　…… ②

① を $x^2+y^2=25$ に代入して整理すると

$(1+m^2)x^2+10m(m+2)x+25(m^2+4m+3)=0$

この判別式を D とすると，円 $x^2+y^2=25$ と直線 ① が接するとき　$D=0$

よって　$\dfrac{D}{4}=\{5m(m+2)\}^2-(1+m^2)\cdot 25(m^2+4m+3)=0$

整理すると　$4m+3=0$　ゆえに　$m=-\dfrac{3}{4}$

このとき，① は　$y=-\dfrac{3}{4}(x+5)+10$　すなわち　$3x+4y=25$

また，円 $x^2+y^2=25$ の中心から直線 ② までの距離は 5 で円の半径に等しいから，

直線 ② は円 $x^2+y^2=25$ の接線である。

したがって，求める直線の方程式は　$3x+4y=25$，$x=-5$

2 k を定数とする。円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=2x+k$ が共有点をもつとき，k の値の範囲を求めよ。

解答　$-2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5}$

$x^2+y^2=4$ ……①，$y=2x+k$ ……② について，② を ① に代入して整理すると

$$5x^2+4kx+k^2-4=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，円 ① と直線 ② が共有点をもつ条件は $D \geqq 0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-4)=-k^2+20$

よって，$D \geqq 0$ から　$-k^2+20 \geqq 0$　これを解いて　$-2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5}$

別解　円 $x^2+y^2=4$ と直線 $2x-y+k=0$ が共有点をもつとき，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線との距離は，円の半径 2 以下である。　すなわち　$\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \leqq 2$

よって，$|k| \leqq 2\sqrt{5}$ から　$-2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5}$

3 円 $x^2+y^2-8x-22y+133=0$ の直線 $3x+4y-31=0$ に関して対称な図形の方程式は，$x^2+y^2+ax-by+c=0$ で与えられるとする。$a-b+c$ の値を求めよ。

解答　7

$x^2+y^2-8x-22y+133=0$ を変形すると　$(x-4)^2+(y-11)^2=2^2$

よって，この方程式は中心 $(4,\ 11)$，半径 2 の円を表す。

直線 $3x+4y-31=0$ を ℓ，円の中心を $\mathrm{A}(4,\ 11)$ とし，ℓ について点 A と対称な点を $\mathrm{B}(p,\ q)$ とする。

$\mathrm{AB} \perp \ell$ であるから，$p \neq 4$ で　$\dfrac{q-11}{p-4} \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1$

ゆえに　$4p-3q=-17$ ……①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+4}{2},\ \dfrac{q+11}{2}\right)$ が直線 ℓ 上にあるから

$$3 \cdot \frac{p+4}{2}+4 \cdot \frac{q+11}{2}-31=0$$

ゆえに　$3p+4q=6$ ……②

①，② を解いて　$p=-2,\ q=3$

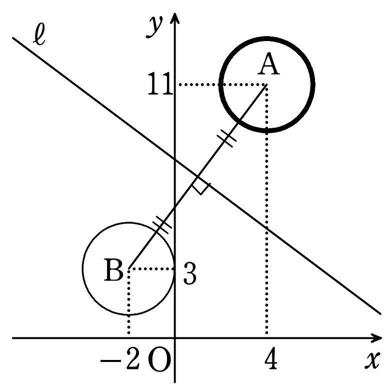
よって，もとの円と直線 ℓ に関して対称な円は，点 $(-2,\ 3)$ を中心とする半径 2 の円であるから，その方程式は　$(x+2)^2+(y-3)^2=2^2$

すなわち　$x^2+y^2+4x-6y+9=0$

これが $x^2+y^2+ax-by+c=0$ と一致するから

$$a=4,\ b=6,\ c=9$$

したがって　$a-b+c=4-6+9=7$



4　3 点 A (1，0)，B (3，-3)，C (2，-1) について，△ABC の外心の座標と外接円の半径を求めよ。

解答　外心の座標 $\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{9}{2}\right)$　　外接円の半径 $\dfrac{\sqrt{130}}{2}$

求める円の方程式を

$x^2+y^2+lx+my+n=0$　…… ① とおく。

① が 3 点 (1，0)，(3，-3)，(2，-1) を通るから，

① に代入して整理すると

$$\begin{cases} l+n=-1 \\ 3l-3m+n=-18 \\ 2l-m+n=-5 \end{cases}$$

これを解くと　　$l=5$，$m=9$，$n=-6$

よって，△ABC の外接円の方程式は

$$x^2+y^2+5x+9y-6=0$$

方程式を変形すると

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\frac{130}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{130}}{2}\right)^2$$

したがって，△ABC の外心の座標は

$$\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{9}{2}\right)$$

外接円の半径は　　$\dfrac{\sqrt{130}}{2}$

5　2 つの円 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2-8x-4y+4=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　2 つの円の 2 つの交点と点 (1，1) を通る円の方程式を求めよ。

(2)　2 つの円の 2 つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　$x^2+y^2+4x+2y-8=0$　　(2)　$2x+y-2=0$

k を定数とする。方程式 $k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-8x-4y+4)=0$　…… ① は，2 つの円の交点を通る図形を表す。

(1)　① に $x=1$，$y=1$ を代入すると　　$-2k-6=0$　　　よって　　$k=-3$

これを ① に代入して整理すると　　$x^2+y^2+4x+2y-8=0$

これが求める円の方程式である。

(2)　方程式 ① が直線を表すとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 となることから　　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　　$2x+y-2=0$

6　4つの点の座標を A(3, 6)，B(2, 4)，C(4, 0)，D(7, 0)，直線 AC と直線 BD の交点を E とする。線分 AE，BE，CE，DE の長さを，それぞれ a，b，c，d としたとき，$\dfrac{21bc}{ad}$ の値を求めよ。

解答　8

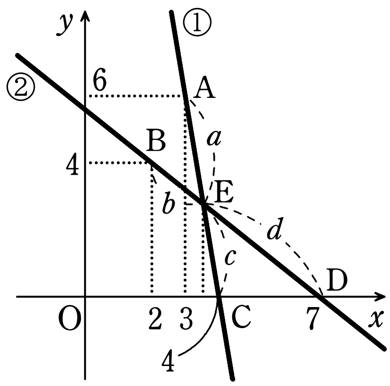
直線 AC の方程式は

$$y-6=\frac{0-6}{4-3}(x-3) \qquad \text{すなわち} \quad y=-6x+24 \quad \cdots\cdots①$$

直線 BD の方程式は

$$y-0=\frac{0-4}{7-2}(x-7) \qquad \text{すなわち} \quad y=-\frac{4}{5}x+\frac{28}{5} \quad \cdots\cdots②$$

①，② を連立して解くと　$x=\dfrac{46}{13}$，$y=\dfrac{36}{13}$



したがって　$E\left(\dfrac{46}{13}, \dfrac{36}{13}\right)$

よって　$$\frac{c}{a}=\frac{4-\frac{46}{13}}{\frac{46}{13}-3}=\frac{52-46}{46-39}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{b}{d}=\frac{\frac{46}{13}-2}{7-\frac{46}{13}}=\frac{46-26}{91-46}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$$

したがって　$\dfrac{21bc}{ad}=21\times\dfrac{6}{7}\times\dfrac{4}{9}=8$

別解　△AOC，△BOD において，メネラウスの定理により

$$\frac{AB}{BO}\cdot\frac{OD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1, \quad \frac{BA}{AO}\cdot\frac{OC}{CD}\cdot\frac{DE}{EB}=1$$

よって　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{c}{a}=1$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{d}{b}=1$

ゆえに　$\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{7}$，$\dfrac{b}{d}=\dfrac{4}{9}$

したがって　$\dfrac{21bc}{ad}=21\times\dfrac{6}{7}\times\dfrac{4}{9}=8$

$\boxed{7}$ 関数 $y=3\sin x+\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ の，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ における最大値 および，最小値を求めよ.

解答 （ア） $\sqrt{17}$　　（イ） -4

$\cos(x-45°)=\cos x\cos 45°+\sin x\sin 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x$ から

$y=3\sin x+\cos x+\sin x=4\sin x+\cos x=\sqrt{17}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{ただし } \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}, \cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$0°<\alpha<90°, -90°\leqq x\leqq 90°$ から $-90°<-90°+\alpha\leqq x+\alpha\leqq 90°+\alpha<180°$

よって　$x+\alpha=90°$ すなわち $x=90°-\alpha$ のとき最大値 $\sqrt{17}$

$x+\alpha=-90°+\alpha$ すなわち $x=-90°$ のとき最小値 $-4+0=-4$

$\boxed{8}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$$y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-\sin x\cos x-1$$

解答　最大値 $\dfrac{1}{2}$，最小値 $-\dfrac{7}{2}$

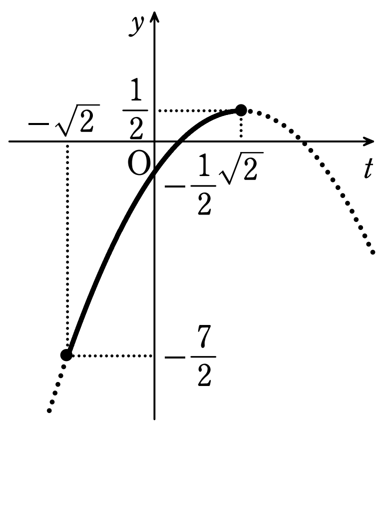
$\sin x+\cos x=t$ とおく。この式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$$

よって　　$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

したがって

$$y=\sqrt{2}t-\frac{t^2-1}{2}-1=-\frac{1}{2}(t^2-2\sqrt{2}t)-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(t-\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}$$



また，$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}\quad\cdots\cdots①$$

① の範囲において，y は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとり，

$t=-\sqrt{2}$ で最小値 $-\dfrac{7}{2}$ をとる。

9 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$$y=5\cos^2 x+6\sin x\cos x-3\sin^2 x$$

解答　最大値は 6，最小値は -4

$$y=5\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+6\cdot\frac{\sin 2x}{2}-3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=3\sin 2x+4\cos 2x+1$$

$$=5\sin(2x+\alpha)+1 \qquad \text{ただし} \quad \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

$-1\leqq\sin(2x+\alpha)\leqq 1$ であるから

$-5+1\leqq y\leqq 5+1$　すなわち　$-4\leqq y\leqq 6$

したがって　　最大値は 6，最小値は -4

10 次の値を求めよ。

(1) $64^2\div 4^{-2}\times 8^{-\frac{16}{3}}$

(2) $\log_2\sqrt[4]{18}+\frac{1}{8}\log_2 64-\log_4 6$

解答　(1)　1　(2)　$\frac{1}{2}$

(1) $64^2\div 4^{-2}\times 8^{-\frac{16}{3}}=(2^6)^2\div(2^2)^{-2}\times(2^3)^{-\frac{16}{3}}=2^{12}\div 2^{-4}\times 2^{-16}=2^{12+4-16}=2^0=1$

(2) $\log_2\sqrt[4]{18}+\frac{1}{8}\log_2 64-\log_4 6$

$$=\log_2 18^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}\log_2 2^6-\frac{\log_2 6}{\log_2 4}$$

$$=\frac{1}{4}\log_2(2\cdot 3^2)+\frac{1}{8}\cdot 6-\frac{\log_2(2\cdot 3)}{\log_2 2^2}$$

$$=\frac{1}{4}(\log_2 2+2\log_2 3)+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\log_2 2+\log_2 3)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{1}{2}$$

11 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_5 x^2=4$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}} x>-\dfrac{2}{3}$

(3)　$\log_3(2x-1)+\log_3(x+3)=2$

解答　(1)　$x=\pm 25$　　(2)　$0<x<\sqrt[3]{4}$　　(3)　$x=\dfrac{3}{2}$

(1)　対数の定義から　$x^2=5^4$　　すなわち　$x^2=25^2$

よって　$x=\pm 25$

(2)　真数は正であるから　$x>0$　……①

与えられた不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x>\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$

すなわち　$x<\sqrt[3]{4}$　……②

①，② から，解は　$0<x<\sqrt[3]{4}$

(3)　真数は正であるから，$2x-1>0$ かつ $x+3>0$ より　$x>\dfrac{1}{2}$

方程式を変形すると　$\log_3(2x-1)(x+3)=\log_3 3^2$

よって　$(2x-1)(x+3)=3^2$

整理すると　$2x^2+5x-12=0$

すなわち　$(x+4)(2x-3)=0$

$x>\dfrac{1}{2}$ であるから，解は　$x=\dfrac{3}{2}$

12 5^{30} は何桁の自然数であるか。近似式 $\log_{10}2=0.3010$ を用いてよい。

解答　21 桁

$$\log_{10}5^{30}=30\log_{10}5=30\log_{10}\frac{10}{2}$$

$$=30(\log_{10}10-\log_{10}2)=30(1-0.3010)=20.97$$

よって　$20\leqq\log_{10}5^{30}<21$　　ゆえに　$10^{20}\leqq 5^{30}<10^{21}$

したがって，5^{30} は 21 桁の自然数である。

13 30 分ごとに分裂して，個数が 2 倍に増える菌がある。菌の個数がある時点の 100 万倍を超えるのは，その時点から何時間後か。

解答　10 時間後

菌は 1 時間で 2^2 倍になる。

x 時間後に 100 万倍を超えたとすると

$$2^{2x} > 10^6$$

常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{2x} > \log_{10} 10^6$$

$$2x\log_{10} 2 > 6$$

よって　$2x \times 0.3010 > 6$

$$x > \frac{6}{2\times 0.3010} = 9.9\cdots$$

答　10時間後

14 方程式 $\log_{x-2}(x^3-16x+8)=3$ を解け。

解答　4

底の条件から　$x-2>0$，$x-2 \fallingdotseq 1$

よって　$x>2$，$x \fallingdotseq 3$　…… ①

また，真数は正であるから

$$x^3-16x+8>0 \quad \cdots\cdots ②$$

与えられた方程式から　$x^3-16x+8=(x-2)^3$

整理すると　$3x^2-14x+8=0$

$$(x-4)(3x-2)=0$$

① を満たす x の値は　$x=4$

このとき，$x^3-16x+8=64-64+8=8>0$ であり，② を満たすから解である。

答　$x=4$

15 $2^a=32^b=x^c$ $(abc \fallingdotseq 0,\ x>0)$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{c}$ となるとする。x の値を求めよ。

解答　8

$2^a=32^b=x^c$ より　$2^a=2^{5b}=x^c$

底 2 の対数をとると　$a=5b=c\log_2 x$　　よって　$a=5b$，$c=\dfrac{5b}{\log_2 x}$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{c}$ に代入すると　$\dfrac{1}{5b}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2\log_2 x}{5b}$

両辺に $5b$ を掛けて　$1+5=2\log_2 x$

よって　$\log_2 x=3$　　ゆえに　$x=8$