# すうがく♪ちゃちゃちゃ！

## ③数学IIIC 篇【解答】

第 1 章　複素数平面 ........ 3
第 2 章　二次曲線 ........ 18
第 3 章　極座標 ........ 30
第 4 章　数学Ⅲの関数 ........ 36
第 5 章　数学Ⅲの極限 ........ 46
第 6 章　数学Ⅲの極限の応用（１）★ ........ 60
補章　数学Ⅲの極限の応用（２）★ ........ 70
第 7 章　数学Ⅲの微分 ........ 76
第 8 章　数学Ⅲのグラフ ........ 92
第 9 章　数学Ⅲの微分の応用 ........ 100
第 10 章　数学Ⅲの積分計算 ........ 112
第 11 章　数学Ⅲの積分の応用（１） ........ 126
第 12 章　数学Ⅲの積分の応用（２） ........ 140
第 13 章　物理問題 ........ 152
第 14 章　積分と不等式 ........ 156
第 15 章　微分方程式 ........ 164
第 16 章　有名曲線 ........ 170

# 第１章　複素数平面

## 《学習項目》

・複素数の定義，加減乗除
・複素数の絶対値，共役複素数
・絶対値，共役複素数の性質

$$|\alpha\cdot\beta|=|\alpha||\beta|,\quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta},\quad \overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta},\quad \overline{\alpha\cdot\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta},\quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

（注）$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ は一般には成り立たない。

・複素数とベクトルの関係　（座標⇔位置ベクトルの成分⇔複素数），（内分・外分・中点・重心）
・極形式
・複素数と積，商，ｎ乗
・ド・モアブルの定理
・複素数平面における円

・共役解の定理
・「複素単項式型ｎ次方程式」
・複素数平面における，回転＆拡大・縮小

## A 問題

①**A-1-1**

(1)　次の複素数の絶対値をそれぞれ求めよ．

$4-2i,\qquad \sqrt{3}+i,\qquad 3i.$

(2)　$|\alpha|=1$，$|\beta|=\sqrt{5}$，$\alpha\overline{\beta}=2+i$ のとき，次の値をそれぞれ求めよ．

(i)　$\overline{\alpha}\beta.$　　(ii)　$|\alpha+\beta|.$　　(iii)　$\left|\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right|.$

【答】

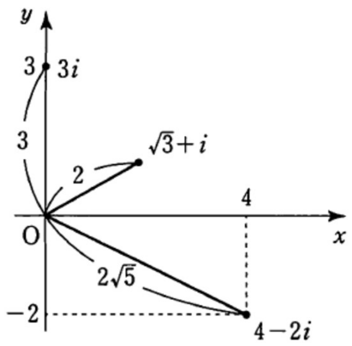
(1) $|4-2i|=\sqrt{4^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$

$|\sqrt{3}+i|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}$

$=\sqrt{4}=2.$

$|3i|=3.$



(2) $|\alpha|=1,\ |\beta|=\sqrt{5}.$ ……①

$\alpha\overline{\beta}=2+i.$ ……②

(i) $\overline{\alpha}\beta=(\overline{\alpha\overline{\beta}})=(\overline{2+i})$ （∵ ②）

$=2-i.$ ……③

(ii) $|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}$

$=|\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2$

$=1+2+i+2-i+(\sqrt{5})^2=10.$

（∵ ①，②，③）

∴ $|\alpha+\beta|=\sqrt{10}.$

(iii) $\left|\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right|=\dfrac{|\alpha+\beta|}{|\alpha\beta|}=\dfrac{|\alpha+\beta|}{|\alpha||\beta|}$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{1\cdot\sqrt{5}}=\sqrt{2}.$

①**A-1-2**

複素数平面上に 3 点 A$(1+3i)$，B$(3)$，C$(5+6i)$ がある．
次の点を表す複素数をそれぞれ求めよ．

(1) 線分 AB の中点M.

(2) 線分 AC を 2:1 に内分する点 P，2:1 に外分する点 Q.

(3) 三角形 ABC の重心 G.

【答】

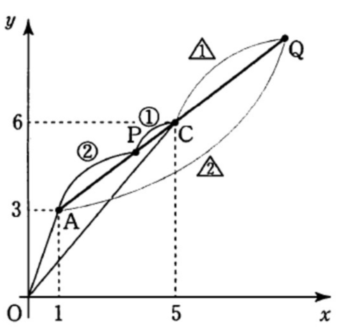
(1) M$(m)$ とする．

M は線分 AB の中点より，

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$

∴ $m=\dfrac{1+3i+3}{2}=2+\dfrac{3}{2}i.$

(2)



P$(p)$，Q$(q)$ とする．点 P は，線分 AC を 2:1 に内分するから，

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}}{3}.$

∴ $p=\dfrac{1+3i+2(5+6i)}{3}=\dfrac{11}{3}+5i.$

点 Q は線分 AC を 2:1 に外分するから，

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

∴ $q=2(5+6i)-(1+3i)=9+9i.$

(3) G$(g)$ とする．

G は三角形 ABC の重心だから，

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$

∴ $g=\dfrac{(1+3i)+3+(5+6i)}{3}=3+3i.$

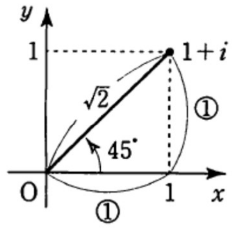
①**A-1-3**

次の複素数の絶対値，偏角を求めて，極形式で表せ．ただし，偏角は，0° 以上 360° 未満で考えるものとする．

(1) $1+i$.　　(2) $1-\sqrt{3}i$.　　(3) $-2+2\sqrt{3}i$.　　(4) $-2i$.

【答】

(1)



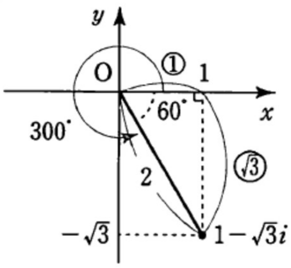

(絶対値) $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,

(偏　角) $=45°$.

(①：①より)

$\therefore\ 1+i=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$.

(2)



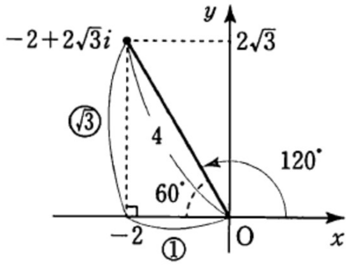

(絶対値) $=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$,

(偏　角) $=300°$.

$(=360°-60°$ … ①：$\sqrt{3}$より)

$\therefore\ 1-\sqrt{3}i=2(\cos 300°+i\sin 300°)$.

(3)



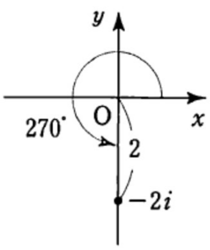

(絶対値) $=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$,

(偏　角) $=120°$.

$(=180°-60°$ … ①：$\sqrt{3}$より)

$\therefore\ -2+2\sqrt{3}i=4(\cos 120°+i\sin 120°)$.

(4)




(絶対値) $=2$,

(偏　角) $=270°$.

$\therefore\ -2i=2(\cos 270°+i\sin 270°)$.

①**A-1-4**

$\alpha=1+i,\ \beta=-1+\sqrt{3}i$ とする．次の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角は，0° 以上 360° 未満で表せ．

(1) $\alpha\beta$.　　(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}$.　　(3) $\alpha i$.　　(4) $\dfrac{1}{\alpha}$.

【答】

$\alpha=1+i=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$,

$\beta=-1+\sqrt{3}i=2(\cos 120°+i\sin 120°)$.

(1) $\alpha\beta$

$=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)\cdot 2(\cos 120°+i\sin 120°)$

$=\underbrace{\sqrt{2}\cdot 2}_{\text{絶対値は積}}\{\cos(45°+120°)+i\sin(45°+120°)\}$

偏角は和

$=2\sqrt{2}(\cos 165°+i\sin 165°)$.

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{2(\cos 120°+i\sin 120°)}{\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)}$

$=\underbrace{\dfrac{2}{\sqrt{2}}}_{\text{絶対値は商}}\{\cos(120°-45°)+i\sin(120°-45°)\}$

偏角は差

$=\sqrt{2}(\cos 75°+i\sin 75°)$.

(3) $i=1\cdot(\cos 90°+i\sin 90°)$ より，

$\alpha i$

$=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)\cdot 1\cdot(\cos 90°+i\sin 90°)$

$=\sqrt{2}\cdot 1\{\cos(45°+90°)+i\sin(45°+90°)\}$

$=\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)$.

(4) $1=1\cdot(\cos 0°+i\sin 0°)$

$=1\cdot(\cos 360°+i\sin 360°)$ より，

$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1\cdot(\cos 360°+i\sin 360°)}{\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(360°-45°)+i\sin(360°-45°)\}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos 315°+i\sin 315°)$.

①**A-1-5**

次の複素数の値を極形式で表せ．ただし，偏角は 0° 以上 360° 未満とする．

(1)　$(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{10}$.　　(2)　$\{2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\}^8$.

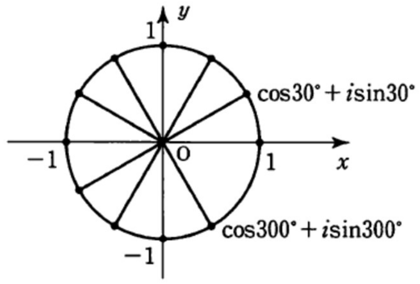
(3)　$\dfrac{1}{(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^6}$.

【答】

(1)　$(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^{10}$

$=\cos(10\times 30^\circ)+i\sin(10\times 30^\circ)$

$=\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ.\ \left(=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$




(2)　$\{2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)\}^8$

$=2^8\{\cos(8\times 60^\circ)+i\sin(8\times 60^\circ)\}$

$=256(\cos \underset{\downarrow -360^\circ}{480^\circ} + i\sin \underset{\downarrow -360^\circ}{480^\circ})$

$=256(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$.

$(=-128+128\sqrt{3}i)$

(3)　$\dfrac{1}{(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^6}$

$=\dfrac{1}{\cos(6\times 45^\circ)+i\sin(6\times 45^\circ)}=\dfrac{1}{\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ}$

$=\dfrac{1}{-i}=\dfrac{1}{-i}\times\dfrac{i}{i}=\dfrac{i}{1}=i$

$=\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$.

〈別解〉

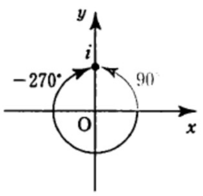
$\dfrac{1}{(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)^6}$

$=\{\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)\}^6$

$=\cos\{6\times(-45^\circ)\}+i\sin\{6\times(-45^\circ)\}$

$=\cos(-270^\circ)+i\sin(-270^\circ)$

$=\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$.




①**A-1-6**

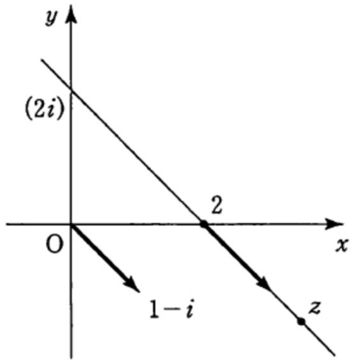
次の方程式をみたす $z$ が複素数平面上にえがく図形をそれぞれ図示せよ．

(1)　$z=2+t(1-i)$.　　(2)　$|z-4|=|z-2i|$.

【答】

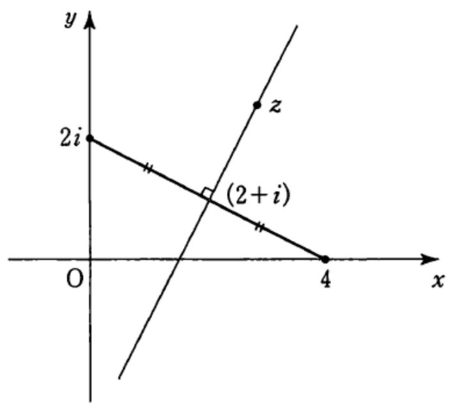
(1)　$z=2+t(1-i)$.

点 2 を通り，$1-i$ に対応するベクトルに平行な直線．




(2)　$|z-4|=|z-2i|$.

2 点 4，$2i$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線．



①$\boxed{\textbf{A-1-7}}$

次の方程式をみたす $z$ が複素数平面上にえがく図形を，それぞれ図示せよ．

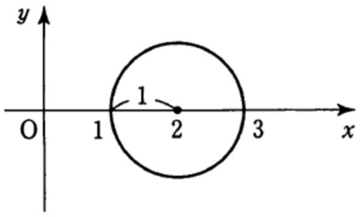
(1)　$|z-2|=1.$　　　(2)　$|z+2+i|=\sqrt{5}.$

(3)　$|z|^2-2z-2\overline{z}=0.$

【答】

(1)　$|z-2|=1.$

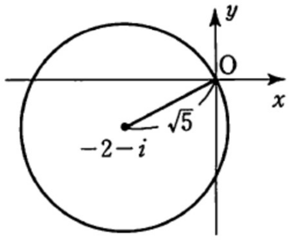
中心 2，半径 1 の円．




(2)　$|z+2+i|=\sqrt{5}.$

$|z-(-2-i)|=\sqrt{5}.$

中心 $-2-i$，半径 $\sqrt{5}$ の円．




(O と円の中心の距離)

$=|-2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}=$(半径)

∴ 円は原点 O を通る．

(3)　$|z|^2-2z-2\overline{z}=0$

$\Leftrightarrow$ $z\cdot\overline{z}-2z-2\overline{z}+2\cdot2=2\cdot2$

$z\cdot\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\cdot\overline{\alpha}$

↓ 因数分解できるように，両辺に 2・2 を加えた．

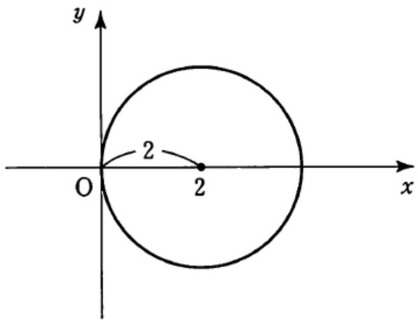
$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})$

$\Leftrightarrow$ $(z-2)(\overline{z}-2)=4$

$\Leftrightarrow$ $|z-2|^2=4$

$\Leftrightarrow$ $|z-2|=2.$

中心 2，半径 2 の円．




①$\boxed{\textbf{A-1-8}}$

(1)　点 $\mathrm{A}(4+i)$ について，次の点を表す複素数をそれぞれ求めよ．

(i)　$-2-3i$ だけ平行移動した点 B.

(ii)　実軸に関して対称移動した点 C.

(iii)　原点に関して対称移動した点 D.

(2)　点 $z$ に対して，点 $w$ が，$w=-(\overline{z}+4)$ で表される．

(i)　点 $w$ は点 $z$ をどのように移動した点か．

(ii)　$z=-2+3i$ のとき，$w$ を求めよ．

【答】

(1)　点 $A(4+i)$ について，

(i)　$-2-3i$ だけ平行移動した点 B.

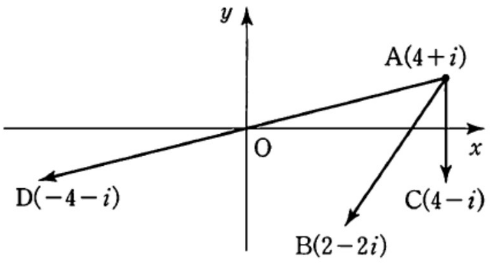
$4+i+(-2-3i)=\underline{2-2i}.$

(ii)　実軸に関して対称移動した点 C.

$\overline{4+i}=\underline{4-i}.$

(iii)　原点に関して対称移動した点 D.

$-(4+i)=\underline{-4-i}.$




(2)　$w=-(\overline{z}+4)=-\overline{z}-4$

(i)　$z$

$-\overline{z}$　虚軸について対称移動

$w=-\overline{z}-4$　$-4$ 平行移動

よって，

点 $w$ は，点 $z$ を虚軸について対称移動し，次に $-4$ 平行移動した点.

(ii)　$z=-2+3i$

$w=-\{\overline{(-2+3i)}+4\}$

$=-(-2-3i+4)$

$=-(2-3i)$

$=\underline{-2+3i}.$

①**A-1-9**

複素数平面上で，点 $A(3+i)$ を次のように移動した点の複素数を求めよ.

(1)　原点中心に 2 倍拡大した点 B.

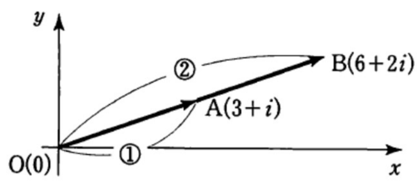
(2)　原点中心に 30° 回転した点 C.

(3)　原点中心に $\sqrt{2}$ 倍して，135° 回転した点 D.

【答】

(1)　点 $A(3+i)$ を原点中心に 2 倍拡大した点 B を表す複素数は，

$(3+i)\times 2=\underline{6+2i}.$

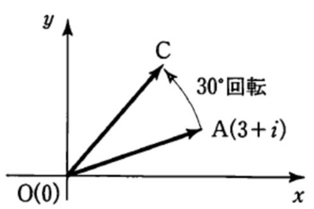



(2)　点 $A(3+i)$ を原点中心に 30° 回転した点 C を表す複素数は，

$(3+i)\times(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

$=(3+i)\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$=\underline{\dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}i}.$



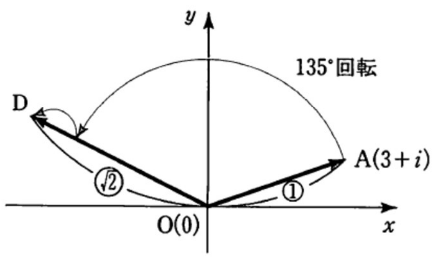

(3)　点 $A(3+i)$ を原点中心に $\sqrt{2}$ 倍して，135° 回転した点 D を表す複素数は，

$(3+i)\cdot\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$

$=(3+i)\cdot\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=(3+i)\cdot(-1+i)$

$=\underline{-4+2i}.$



# B 問題

①**B-1-1**

(1) $|\alpha|=|\alpha-4i|=2|\alpha-3|$ をみたす複素数 $\alpha$ を求めよ．

(2) 複素数 $\alpha$, $\beta$ が $|\alpha|=1$, $|\beta|=\sqrt{6}$, $|\alpha+\beta|=3$ をみたすとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ．

【解答】

(1) $\alpha=a+bi$（$a$, $b$ は実数）とする．

$|\alpha|=|\alpha-4i|=2|\alpha-3|$

$\Leftrightarrow |a+bi|=|a+bi-4i|=2|a+bi-3|$

$\Leftrightarrow |a+bi|^2=|a+(b-4)i|^2=4|a-3+bi|^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=a^2+(b-4)^2=4\{(a-3)^2+b^2\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=a^2+(b-4)^2 & \cdots\cdots ① \text{ かつ,} \\ a^2+b^2=4\{(a-3)^2+b^2\}. & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①より，$8b-16=0$.　$\therefore$　$b=2$.

$\therefore$　②：$a^2+4=4\{(a-3)^2+4\}$.

$3a^2-24a+48=0$.

$3(a-4)^2=0$.　$\therefore$　$a=4$.

$\therefore$　$\alpha=4+2i$.

(2) $|\alpha|=1$,　$\cdots\cdots ③$

$|\beta|=\sqrt{6}$,　$\cdots\cdots ④$

$|\alpha+\beta|=3$.　$\cdots\cdots ⑤$

③，④より，$\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=\dfrac{\sqrt{6}}{1}$.　$\therefore$　$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=\sqrt{6}$.　$\cdots\cdots ⑥$

③，⑤より，$\dfrac{|\alpha+\beta|}{|\alpha|}=\dfrac{3}{1}$.　$\therefore$　$\left|1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=3$.　$\cdots\cdots ⑦$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=a+bi$（$a$, $b$ は実数）とする．

⑥より，$a^2+b^2=6$.

⑦より，$(a+1)^2+b^2=9$.

これを解いて，$a=1$, $b=\pm\sqrt{5}$.

$\therefore$　$\dfrac{\beta}{\alpha}=1\pm\sqrt{5}i$.

①**B-1-2**

2次方程式 $x^2-6x+a=0$ の2解を $\alpha$, $\beta$ とする．複素数平面上において，3点 O, A($\alpha$), B($\beta$) が正三角形の3頂点となるとき，実数 $a$ の値および正三角形の1辺の長さを求めよ．

【解答】

$x^2-6x+a=0$（$a$ は実数）の2解は，

$x=\dfrac{6\pm\sqrt{6^2-4a}}{2}=3\pm\sqrt{9-a}$.

(i) $9-a\geqq 0 \Leftrightarrow a\leqq 9$ のとき，

$x=3+\sqrt{9-a}$, $3-\sqrt{9-a}$.

2解 $\alpha$, $\beta$ は実数だから，3点 O, A, B はすべて実軸上で三角形はできない．

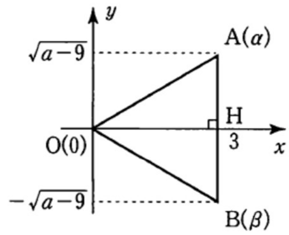
(ii) $9-a<0 \Leftrightarrow a>9$ のとき，

$x=3+\sqrt{a-9}i$, $3-\sqrt{a-9}i$.

2解 $\alpha$, $\beta$ は虚数．

H(3) とする．

3点 O, A, B が正三角形の頂点となるとき，




$\mathrm{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{OH}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3=\sqrt{3}$.

$\therefore$　$\sqrt{a-9}=\sqrt{3}$.

$\therefore$　$a=12$.

正三角形の1辺の長さは，

$\mathrm{OA}=2\cdot\mathrm{AH}=2\sqrt{3}$.

①**B-1-3**

(1) $|\alpha|=1$ のとき，$\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$ が実数であることを示せ．

(2) $\dfrac{z-i}{z+i}$ が実数となるような複素数 $z$ の条件を求めよ．

【解答】

(1) $\alpha\cdot\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1.$ ……① （∵ $|\alpha|=1$）

$\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$ が実数 $\Leftrightarrow$ $\overline{\left\{\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\right\}}=\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$ を示す．

$$\overline{\left\{\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\right\}}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{(1-\alpha)^2}}=\frac{\overline{\alpha}}{(1-\overline{\alpha})^2}$$

$$=\frac{\overline{\alpha}}{(1-\overline{\alpha})^2}\times\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{\overline{\alpha}\cdot\alpha\cdot\alpha}{(\alpha-\alpha\cdot\overline{\alpha})^2}$$

$$=\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}.\quad(\because\ ①)$$

よって，$\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$ は実数である．

(2) $\dfrac{z-i}{z+i}$ が実数

$\Leftrightarrow$ $\overline{\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)}=\dfrac{z-i}{z+i}$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i}=\dfrac{z-i}{z+i}$

$\Leftrightarrow$ $(z+i)(\overline{z}+i)=(z-i)(\overline{z}-i)$ $(z\neq -i)$

$\Leftrightarrow$ $|z|^2+zi+\overline{z}i-1=|z|^2-zi-\overline{z}i-1$

$\Leftrightarrow$ $2i(z+\overline{z})=0$

$\Leftrightarrow$ $\overline{z}=-z.$

よって，$z$ は純虚数，または，0.

（ただし，$z\neq -i$）

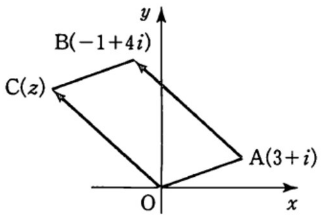
①$\boxed{\textbf{B-1-4}}$

複素数平面上に，O(0)，A$(3+i)$，B$(-1+4i)$ がある．

(1) 四角形 OABC が平行四辺形のとき，C を表す複素数 $z$ を求めよ．

(2) C$(p+qi)$ とする．３点 A，B，C が同一直線上にあるとき，実数 $p$，$q$ のみたす条件を求めよ．

(1)




四角形 OABC が平行四辺形より，

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$ ∴ $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}.$

∴ $z=(-1+4i)-(3+i)$

$=-4+3i.$

(2) ３点 A，B，C が一直線上にあるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（$k$：実数）と表せる．

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}).$

$p+qi-(3+i)=k\{-1+4i-(3+i)\}.$

$p-3+(q-1)i=-4k+3ki.$

$p$，$q$，$k$ は実数だから，

$$\begin{cases}p-3=-4k, & \cdots\cdots①\\ q-1=3k. & \cdots\cdots②\end{cases}$$

①×3＋②×4：$3p+4q-13=0.$

①$\boxed{\textbf{B-1-5}}$

(1) $\dfrac{(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)(\cos 55^\circ+i\sin 55^\circ)}{\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ}$ の値を求めよ．

(2) (i) $(\sqrt{3}+i)(1+i)$ の偏角を求めよ．

(ii) $\cos 75^\circ$，$\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

【解答】

(1) $\dfrac{(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ)}{\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ}$

$=\dfrac{\cos(25^\circ+55^\circ)+i\sin(25^\circ+55^\circ)}{\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ}$

$=\cos(25^\circ+55^\circ-20^\circ)+i\sin(25^\circ+55^\circ-20^\circ)$

$=\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

(2)(i) $(\sqrt{3}+i)(1+i)$

$=2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)\cdot\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

$=2\sqrt{2}\{\cos(30^\circ+45^\circ)+i\sin(30^\circ+45^\circ)\}$

$=2\sqrt{2}(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$

偏角は$75^\circ$.

(ii) (i)の結果より，

$2\sqrt{2}(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$

$=(\sqrt{3}+i)(1+i)=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i.$

$\therefore\ \cos 75^\circ + i\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i.$

$\therefore\ \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

①**B-1-6**

(1) $(1+i)^{11}$ の値を $a+bi$ の形で表せ.

(2) $(1+i)^n$ が実数となる自然数 $n$ の条件を求めよ.

【解答】

(1) $(1+i)^{11}$

$=\{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\}^{11}$

$=(\sqrt{2})^{11}\{\cos(11\times 45^\circ)+i\sin(11\times 45^\circ)\}$

$=(\sqrt{2})^{11}(\cos 495^\circ + i\sin 495^\circ).$

ここで，

$\begin{cases}(\sqrt{2})^{11}=2^{\frac{11}{2}}=2^5\cdot 2^{\frac{1}{2}}=32\sqrt{2},\\ 495^\circ=360^\circ+135^\circ.\end{cases}$

$\therefore\ (1+i)^{11}=32\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$

$=32\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=-32+32i.$

(2) $(1+i)^n$

$=\{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\}^n$

$=(\sqrt{2})^n\cdot\{\cos(45^\circ\times n)+i\sin(45^\circ\times n)\}.$

これが実数である条件は，

$45^\circ\cdot n=180^\circ\cdot k$ （$k$： 自然数).

$\therefore\ n=4k.$

よって，$n$ は 4 の倍数.

①**B-1-7**

$z^4=-8+8\sqrt{3}i$ をみたす複素数 $z$ を極形式で表し，複素数平面上に図示せよ.

【解答】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r>0,\ 0^\circ\leqq\theta<360^\circ)$

とおく．

$z^4=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^4$

$\quad=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta).\qquad\cdots\cdots①$

また，

$z^4=-8+8\sqrt{3}i$

$\quad=16(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ).\qquad\cdots\cdots②$

①，②より，

$$\begin{cases} r^4=16, & \cdots\cdots③\\ 4\theta=120^\circ+360^\circ\times k\ (k：\text{整数}). & \cdots\cdots④\end{cases}$$

③：$r^4=2^4.\quad\therefore\quad r=2\quad(\because\ r>0).$

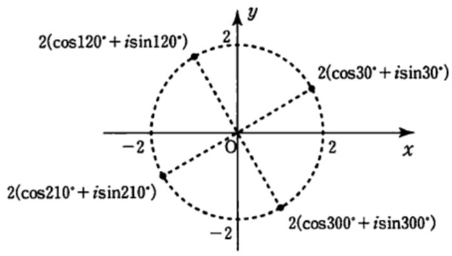
④$\times\frac{1}{4}$：$\theta=30^\circ+90^\circ\times k.$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ だから，

$\theta=30^\circ,\ 120^\circ,\ 210^\circ,\ 300^\circ.$

$$\therefore\quad z=\begin{array}{ll} 2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ), & \left[\ =\sqrt{3}+i.\right.\\ 2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ), & \ \ =-1+\sqrt{3}i.\\ 2(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ), & \ \ =-\sqrt{3}-i.\\ 2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ). & \left.\ =1-\sqrt{3}i.\ \right]\end{array}$$

点 $z$ の位置は，次図のようになる．




①**B-1-8**

次の方程式で表される図形を複素数平面上で図示せよ．

(1)　$|z|=|\overline{z}+2i|.$

(2)　$2|z|=|z-3+3i|.$

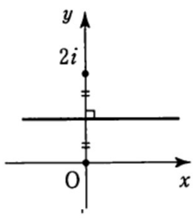
【解答】

(1)　$|z|=|\overline{z}+2i|.$

(右辺)$=|\overline{\overline{z}+2i}|=|z-2i|.$

$\therefore\quad |z-0|=|z-2i|.$

2 点 0，$2i$ を結ぶ線分の垂直 2 等分線．




(2)〈解 1〉　$2|z|=|z-3+3i|.$

$z=x+yi$（$x$，$y$：実数）とおく．

$2|x+yi|=|x-3+(y+3)i|.$

$2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}.$

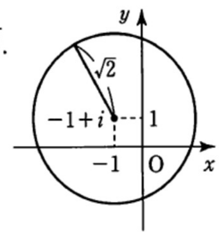
$4(x^2+y^2)=(x-3)^2+(y+3)^2.$

$3x^2+3y^2+6x-6y=18.$

$x^2+y^2+2x-2y=6.$

$(x+1)^2+(y-1)^2=8.$

中心 $-1+i$，半径 $2\sqrt{2}$ の円．




①**B-1-9**

複素数平面上に，3 点 O(0)，A($3+i$)，B($z$) がある．三角形 OAB が次の条件をみたすとき，$z$ の値をそれぞれ求めよ．

(1)　正三角形．

(2)　$\mathrm{AB}:\mathrm{BO}:\mathrm{OA}=1:2:\sqrt{3}.$

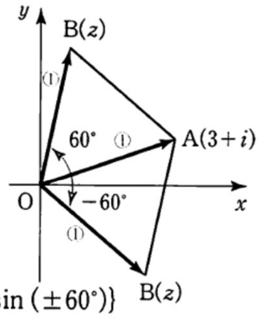
【解答】

(1)　三角形 OAB が正三角形.

$\overrightarrow{OB}$ は，$\overrightarrow{OA}$ を

$\begin{cases} 1 \text{ 倍拡大}, \\ 60^\circ \text{ または } -60^\circ \text{ 回転} \end{cases}$

したもの.




$z=(3+i)\cdot 1\cdot\{\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)\}$

$=(3+i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=\underline{\frac{3}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i}$　(複号同順).

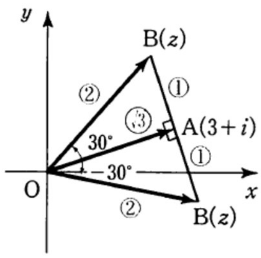
(2)　三角形 OAB は，

AB : BO : OA $=1:2:\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{OB}$ は，$\overrightarrow{OA}$ を

$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ 倍拡大}, \\ 30^\circ \text{ または } -30^\circ \text{ 回転} \end{cases}$

したもの.




$z=(3+i)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\{\cos(\pm 30^\circ)+i\sin(\pm 30^\circ)\}$

$=(3+i)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$

$=(3+i)\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}i\right)$

$=\underline{3\mp\frac{1}{\sqrt{3}}+(1\pm\sqrt{3})i}$　(複号同順).

①$\boxed{\textbf{B-1-10}}$

0 でない複素数 $\alpha$，$\beta$ が $2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ をみたしている.

(1)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ.

(2)　3 点 O(0)，A($\alpha$)，B($\beta$) を 3 頂点とする三角形 OAB の形状を求めよ.

(1)　$2\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0.$

$\left.\right) \times\frac{1}{\alpha^2}$

$2-2\cdot\frac{\beta}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=0.$

$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\beta}{\alpha}+2=0.$

$\therefore\quad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=\underline{1\pm i}.$

(2)　(1)の結果より，

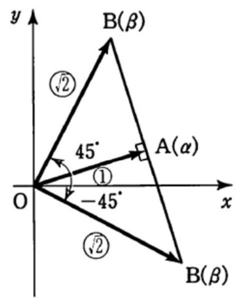
$\beta=\alpha\cdot(1\pm i)$

$=\alpha\cdot\sqrt{2}\{\cos(\pm 45^\circ)+i\sin(\pm 45^\circ)\}$　(複号同順).

よって，$\overrightarrow{OB}$ は，$\overrightarrow{OA}$ を

$\begin{cases} \sqrt{2} \text{ 倍拡大，かつ}, \\ 45^\circ \text{ または } -45^\circ \text{ 回転} \end{cases}$

したもの.




よって，三角形 OAB は，

$\underline{\angle A=90^\circ \text{ の直角二等辺三角形}}$.

# C 問題

①**C-1-1**

複素数平面上の点 $z$ に対して，点 $w$ を $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ で定める．点 $z$ が次の条件をみたして動くとき，点 $w$ のえがく図形をそれぞれ求めよ．

(1)　$z$ が実数全体を動く．

(2)　$|z|=1$. ただし，$z\neq i$.

【解答】

$w=\dfrac{z+i}{z-i}$ より，$w(z-i)=z+i$.

$\Leftrightarrow\ wz-z=iw+i\ \Leftrightarrow\ (w-1)z=i(w+1)$.

$\therefore\quad z=\dfrac{i(w+1)}{w-1}\ (w\neq 1)$.

(1)　$z$ が実数全体を動くとき，

$z$ が実数 $\Leftrightarrow\ \overline{z}=z$

$\Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{i(w+1)}{w-1}\right)}=\dfrac{i(w+1)}{w-1} \Leftrightarrow \dfrac{-i(\overline{w}+1)}{\overline{w}-1}=\dfrac{i(w+1)}{w-1}$

$\Leftrightarrow\ -i(\overline{w}+1)(w-1)=i(w+1)(\overline{w}-1)$

$\Leftrightarrow\ -i\{(\overline{w}+1)(w-1)-(w+1)(\overline{w}-1)\}=0$

$\Leftrightarrow\ 2|w|^2-2=0$

$\Leftrightarrow\ |w|=1$.

点 $w$ は，中心 O，半径 1 の円をえがく．$(w\neq 1)$

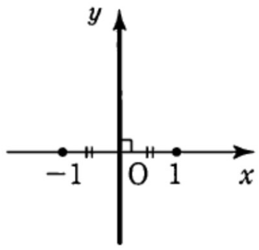
(2)　$|z|=1\,(z\neq i)$ のとき，

$|z|=1$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{i(w+1)}{w-1}\right|=1\ \Leftrightarrow\ \dfrac{|i|\times|w+1|}{|w-1|}=1$

$\Leftrightarrow\ |w+1|=|w-1|$.

点 $w$ は，2 点 $-1$, 1 を結ぶ線分の垂直 2 等分線をえがく．



①**C-1-2**

複素数平面上で，点 $z$ は，$|z|=1$ をみたして動く．また，点 $w$ を $w=(1+i)(z+2)$ で定める．ただし，$0°\leqq\arg w<360°$ とする．

(1) 点 $w$ は，どのような図形をえがくか．

(2) $|w|$，$\arg w$ の取り得る値の範囲を求めよ．

【解答】

(1) $w=(1+i)(z+2)=\underbrace{(z+2)}_{+2\text{平行移動}}\cdot\underbrace{\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)}_{\text{原点中心に}\sqrt{2}\text{倍拡大・}45°\text{回転}}$.

$z$ … 円：中心 O，半径 1．（← $|z|=1$）

↓ +2 平行移動

$z+2$ … 円：中心 2，半径 1．

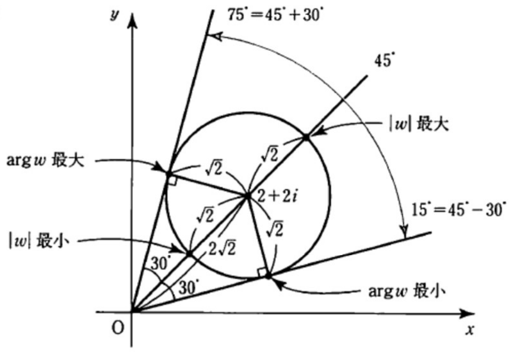
↓ $\times\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)(=\times(1+i))$ 原点中心に $\sqrt{2}$ 倍拡大・45° 回転

$w$ … 円：中心 $2(1+i)$，半径 $\sqrt{2}$.

よって，点 $w$ のえがく図形は，

円：$|w-(2+2i)|=\sqrt{2}$（中心 $2+2i$，半径 $\sqrt{2}$）．

(2)




図より，

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}\leqq|w|\leqq2\sqrt{2}+\sqrt{2}$．　∴　$\sqrt{2}\leqq|w|\leqq3\sqrt{2}$．

$45°-30°\leqq\arg w\leqq45°+30°$．　∴　$15°\leqq\arg w\leqq75°$．

①**C-1-3**

方程式 $z^5=1$ の解 $z$ について，

(1) $z$ を極形式で表せ。

(2) $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ を用いて $z+\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

(3) $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

(1)　$z^5=1$ ……①　◂ 解法 STEP 1

の両辺の絶対値をとると，

$|z^5|=1$ より，$|z|^5=1$，ゆえに，$|z|=1$　◂ A

である。そこで，

$z=\cos\theta+i\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$　……②

とおくことができて，この②のもとでは，ド・モアブルの定理により

$$
\begin{aligned}
① &\iff (\cos\theta+i\sin\theta)^5=1 \quad \text{◂ 解法 STEP 2}\\
&\iff \cos5\theta+i\sin5\theta=\cos0+i\sin0\\
&\iff 5\theta=2k\pi\\
&\iff \theta=\frac{2k\pi}{5}\quad(k\text{ は整数})
\end{aligned}
$$

である。ここで，$0\leqq\theta<2\pi$ を満たすのは

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

の場合に限られるので，求める $z$ は

$z=\cos\dfrac{2k\pi}{5}+i\sin\dfrac{2k\pi}{5}$　$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$　……(答)

である。

(2)　① $\iff (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$　◂ 解法 STEP 3

$\iff z=1$ ……③　または　$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ ……④

であり，

①**C-1-4**

複素数平面上に異なる３点 $z$，$z^2$，$z^3$ がある。

(1)　$z$，$z^2$，$z^3$ が同一直線上にあるような $z$ をすべて求めよ。

(2)　$z$，$z^2$，$z^3$ が二等辺三角形の頂点になるような $z$ の全体を複素数平面上に図示せよ。
　また，$z$，$z^2$，$z^3$ が正三角形の頂点になるような $z$ をすべて求めよ。

３点 $z$，$z^2$，$z^3$ が相異なる条件は，

$z \neq z^2$　かつ　$z^2 \neq z^3$　かつ　$z^3 \neq z$

すなわち，$z \neq 0$　かつ　$z \neq \pm 1$　……①　◀A

である。以下，A$(z)$，B$(z^2)$，C$(z^3)$ とし，①のもとで考察する。

(1)　①のもとでは，　◀解法STEP1

３点 A，B，C が同一直線上にある

$\iff \dfrac{z^3-z^2}{z-z^2}$ が実数である　◀解法STEP2

$\iff -z$ が実数である

$\iff z$ が実数である　……②

であるから，求める $z$ は，①かつ②より，

0，$\pm 1$ 以外のすべての実数　……(答)

である。

(2)　①と②より，　◀解法STEP1

３点 A，B，C が三角形の頂点になる

$\iff z$ が実数でない　……③

である。この③のもとでは，

３点 A，B，C が二等辺三角形の頂点になる

$\iff$ AB＝AC　または　BC＝BA　または　CA＝CB
　　　　……(i)　　　　……(ii)　　　　……(iii)

であるから，以下，③のもとで，それぞれについて調べると，

(i)　$\iff |z^2-z|=|z^3-z|$　◀解法STEP3

$\iff |z||z-1|=|z||z+1||z-1|$

$\iff 1=|z+1|$　……④

(ii)　$\iff |z^3-z^2|=|z-z^2|$

$\iff |z|^2\,|z-1|=|z||1-z|$

$\iff |z|=1$　……⑤　◀B

(iii)　$\iff |z-z^3|=|z^2-z^3|$

$\iff |z||1+z||1-z|=|z|^2\,|1-z|$

$\iff |z+1|=|z|$　……⑥

である。

よって，求める図形は，　◀C

③　かつ　“④　または　⑤　または　⑥”

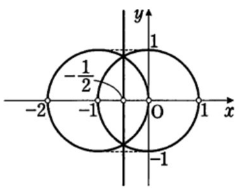
であり，複素数平面上で

④は，「点 $-1$ を中心とする半径１の円」

⑤は，「原点を中心とする半径１の円」

⑥は，「点 $-1$ と原点を両端とする線分の垂直二等分線」

を表すので，求める図形を図示すると右図の太線部分のようになる。ただし，○印の点は除く。




また，A，B，C が正三角形の頂点になるような $z$ は，　◀解法STEP1

③かつ④かつ⑤かつ⑥

を満たす $z$ であり，それは右図より，　◀解法STEP3

$$z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{……(答)}$$

である。

①**C-1-5**

複素数平面上において，次の各々はどのような図形を表すかを答えよ。

(1)　複素数 $z$ が $|z|=1$ および $z \neq 1$ を満たすとき，$w=\dfrac{z}{1-z}$ が表す点の全体。

(2)　複素数 $z$ が $|z|=1$ を満たすとき，$w=\dfrac{z}{1-\sqrt{3}\,z}$ が表す点の全体。

(3)　複素数 $z$ が $|z|=1$ および $0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，$w=\dfrac{z}{1-\sqrt{3}\,z}$ が表す点の全体。

$|z|=1$ ……(＊)

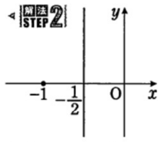
(1) $z \neq 1$ のもとでは，◂解法STEP1

$$w=\frac{z}{1-z} \iff (1-z)w=z \iff z=\frac{w}{w+1} \quad \cdots\cdots ①$$

であるから，複素数$z$が(＊)かつ$z \neq 1$を満たすとき，$w$は①を(＊)に代入して得られる関係式を満たす。すなわち，◂解法STEP2

$$\left|\frac{w}{w+1}\right|=1 \iff \frac{|w|}{|w+1|}=1 \quad \text{◂解法STEP3}$$

$$\iff |w+1|=|w|$$




であるから，複素数平面上において，点$w$は

点 −1 と原点を結ぶ線分の垂直二等分線（上図）……(答)

である。

(2)

$$w=\frac{z}{1-\sqrt{3}z} \iff (1-\sqrt{3}z)w=z \quad \text{◂解法STEP1}$$

$$\iff z=\frac{w}{\sqrt{3}w+1} \quad \cdots\cdots ②$$

であるから，複素数$z$が(＊)を満たすとき，$w$は②を(＊)に代入して得られる関係式を満たす。すなわち，◂解法STEP2

$$\left|\frac{w}{\sqrt{3}w+1}\right|=1 \iff |\sqrt{3}w+1|^2=|w|^2 \quad \text{◂解法STEP3 ◂Ⓐ}$$

$$\iff (\sqrt{3}w+1)(\sqrt{3}\,\overline{w}+1)=w\overline{w}$$

$$\iff 2w\overline{w}+\sqrt{3}w+\sqrt{3}\,\overline{w}+1=0$$

$$\iff w\overline{w}+\frac{\sqrt{3}}{2}w+\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{w}+\frac{1}{2}=0$$

$$\iff \left(w+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\overline{w}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4} \quad \text{◂Ⓑ}$$

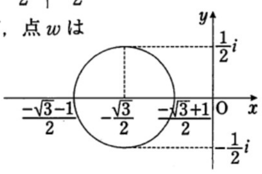
$$\iff \left|w+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\frac{1}{4}$$

$$\iff \left|w+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

であるから，複素数平面上において，点$w$は

点 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を中心とする

半径 $\frac{1}{2}$ の円 ……㋐(答)




である。

(3) ②より，

$$z=\frac{w}{\sqrt{3}w+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{0-w}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-w} \quad \text{◂解法STEP3}$$

であるから，$\mathrm{A}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{W}(w)$ とすると，

$$0<\arg z<\frac{\pi}{2} \iff 0<\angle\mathrm{AWO}<\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

である。ここで，$\angle\mathrm{AWO}$は，$\overrightarrow{\mathrm{WA}}$から$\overrightarrow{\mathrm{WO}}$まで正の向きに測った角である。ゆえに，④を満たす点$w$は複素数平面上において，

実軸の上側で，かつ直径OAの円の外側

（右図斜線部分で境界線上の点は含まない）……㋑

である。

したがって，複素数$z$が(＊)かつ$0<\arg z<\frac{\pi}{2}$を満たすとき，$w$は③かつ④を満たすから，$w$が表す点全体は，

㋐の円周上の点のうち，㋑を満たす部分

（右図太線部分で○印は含まない）……(答)

である。

①$\boxed{\text{C-1-6}}$

**$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 $z\,(z \neq 0)$ を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ。**

まず，実数条件を調べると，◂解法STEP1

$$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}\text{ が実数} \iff \frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\overline{\frac{z}{2}+\frac{1}{z}}$$

$$\iff \frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{2}+\frac{1}{\overline{z}}$$

$$\iff \frac{z-\overline{z}}{2}-\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}}=0 \quad \text{◂解法STEP2}$$

$$\iff (z-\overline{z})(z\overline{z}-2)=0 \text{ かつ } z \neq 0$$

$$\iff \text{「}z=\overline{z}\text{ または }z\overline{z}=2\text{」かつ } z \neq 0$$

$$\iff \text{「“}z\text{ は実数” または }|z|^2=2\text{」かつ } z \neq 0$$

$$\iff \text{「“}z\text{ は実数” かつ } z \neq 0\text{」または }|z|=\sqrt{2} \;◂$$

……(i)　　　……(ii)

である。

そこで次に，(i)，(ii)に場合分けして 0 以上 2 以下の条件を調べる。

(i)の場合，$z$が実数であることに注意すると，◂解法STEP3

$$0 \leqq \frac{z}{2}+\frac{1}{z} \leqq 2 \iff 0 \leqq \frac{z^2+2}{2z} \leqq 2$$

$$\iff \frac{z^2+2}{2z} \geqq 0 \text{ かつ } \frac{z^2-4z+2}{2z} \leqq 0$$

$$\iff z>0 \text{ かつ } z^2-4z+2 \leqq 0 \quad \text{◂Ⓑ}$$

$$\iff 2-\sqrt{2} \leqq z \leqq 2+\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①$$

である。

(ii)の場合，$|z|=\sqrt{2}$ であるから，◂解法STEP3

$$z=\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(-\pi \leqq \theta<\pi) \quad \cdots\cdots ②$$

となる$\theta$が存在して，

$$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\sqrt{2}\cos\theta$$

となる。よって，$-\pi \leqq \theta<\pi$ のもとでは，

$$0 \leqq \frac{z}{2}+\frac{1}{z} \leqq 2 \iff 0 \leqq \sqrt{2}\cos\theta \leqq 2 \quad \text{◂Ⓒ}$$

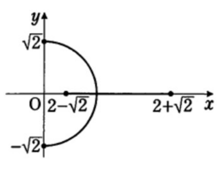
$$\iff -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

である。

以上から，求める集合は，①または（②かつ③）より，式で表すと，

$$\left.\begin{array}{l}\{z \mid 2-\sqrt{2} \leqq z \leqq 2+\sqrt{2}\} \\ \text{または} \\ \left\{\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\,\middle|\,-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}\end{array}\right\} \cdots\cdots\text{(答)}$$

となり，これを図示して右図の太線部分のようになる。



# 第２章　二次曲線

## 《学習項目》

・放物線の公式、楕円の公式、双曲線の公式
・二次曲線の接線公式

・楕円のパラメータ表示
・楕円・円変換

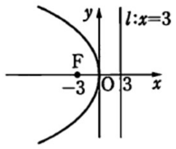
## A 問題

②A-2-1

放物線 $y^2=-12x$ の焦点の座標と準線の方程式を求め，その概形をかけ。

解答

$y^2=-12x=4\cdot(-3)x$ より，
**焦点の座標は，$(-3,\ 0)$**
**準線の方程式は，$x=3$**
グラフは**右図**のようになる。



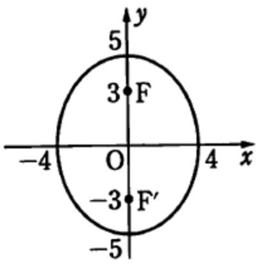

②A-2-2

次の楕円の焦点の座標および長軸，短軸の長さを求め，その概形をかけ。

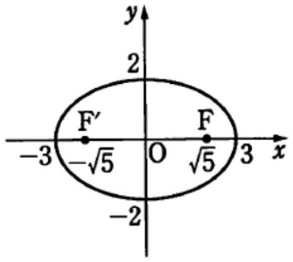
(1)* $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$　　(2)　$4x^2+9y^2=36$　　(3)* $9x^2+4y^2=1$

解答

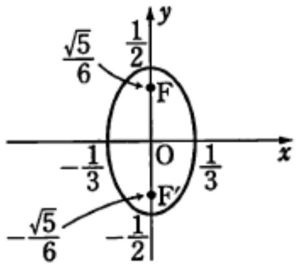
**(1)　焦点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$**
**長軸の長さ 10，短軸の長さ 8**




**(2)　焦点 $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$**
**長軸の長さ 6，短軸の長さ 4**




**(3)　焦点 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$**
**長軸の長さ 1，短軸の長さ $\dfrac{2}{3}$**




②A-2-3

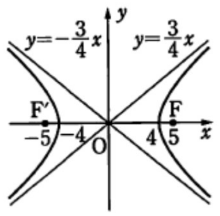
次の双曲線の焦点の座標および漸近線の方程式を求め，その概形をかけ。

(1)* $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$　　(2)* $9x^2-4y^2=-36$　　(3) $16x^2-9y^2=1$

**解答**

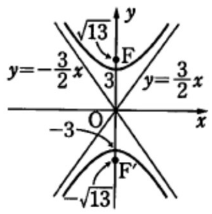
(1) 焦点 $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$

漸近線 $y=\pm\dfrac{3}{4}x$



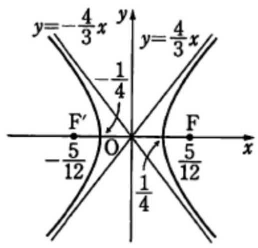

(2) 焦点 $(0,\ \sqrt{13})$，$(0,\ -\sqrt{13})$

漸近線 $y=\pm\dfrac{3}{2}x$




(3) 焦点 $\left(\dfrac{5}{12},\ 0\right)$，$\left(-\dfrac{5}{12},\ 0\right)$

漸近線 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$




②$\boxed{\text{A-2-4}}$

次の２次曲線の接線の方程式を求めよ。

(1)* 放物線 $y^2=4x$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線

(2) 楕円 $4x^2+y^2=5$ 上の点 $(-1,\ 1)$ における接線

**解答**　(1) $y=-x-1$　　(2) $y=4x+5$

**解き方** (1) $y^2=4x$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は $y_1y=2(x+x_1)$

$x_1=1$，$y_1=-2$ とする。

(2) $4x^2+y^2=5$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は $4x_1x+y_1y=5$

$x_1=-1$，$y_1=1$ とする。

# B 問題

②**B-2-1**

次の２次曲線の接線の方程式を求めよ。

(3) 放物線 $y^2=2x$ の接線で，点 $(4,\ 3)$ を通るもの

(4)* 楕円 $9x^2+4y^2=36$ の接線で，傾き２であるもの

**解答** (3) $x-2y+2=0$, $x-4y+8=0$ (4) $y=2x\pm5$

(3) $y^2=2x$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は

$y_1y=2\cdot\frac{1}{2}(x+x_1)$ ……①

これが点 $(4,\ 3)$ を通るから，

$3y_1=4+x_1$ ……②

また，点 $(x_1,\ y_1)$ は $y^2=2x$ 上にあるから，

${y_1}^2=2x_1$ ……③

②，③より，$(x_1,\ y_1)=(2,\ 2),\ (8,\ 4)$

これらを①に代入する。

(4) 求める接線を $y=2x+b$ とおき，

$9x^2+4y^2=36$ に代入して，

$25x^2+16bx+4(b^2-9)=0$

接することから，判別式を $D$ とすると，

$\frac{D}{4}=(8b)^2-100(b^2-9)=0$ より

$b=\pm5$

②**B-2-2**

次の方程式で表される放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

(1)* $(y-1)^2=8(x+2)$ (2) $(x+2)^2=-4(y-2)$

(3) $y^2+y-x=0$ (4)* $x^2-2x-2y+5=0$

(5) $y^2+6y+13-4x=0$

**解答**

(1) 焦点 $(0,\ 1)$，準線 $x=-4$

(2) 焦点 $(-2,\ 1)$，準線 $y=3$

(3) 焦点 $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$，準線 $x=-\frac{1}{2}$

(4) 焦点 $\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$，準線 $y=\frac{3}{2}$

(5) 焦点 $(2,\ -3)$，準線 $x=0$

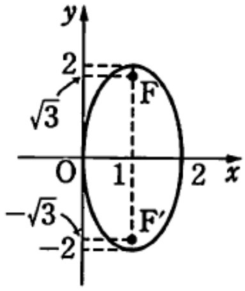
②**B-2-3**

次の楕円の焦点の座標および長軸，短軸の長さを求め，その概形をかけ。

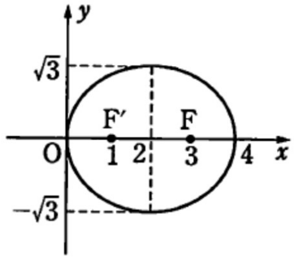
(1) $4(x-1)^2+y^2=4$ (2)* $3x^2+4y^2-12x=0$

**解答**

(1)　焦点 $(1,\ \sqrt{3})$，$(1,\ -\sqrt{3})$
長軸の長さ 4，短軸の長さ 2




(2)　焦点 $(3,\ 0)$，$(1,\ 0)$
長軸の長さ 4，短軸の長さ $2\sqrt{3}$



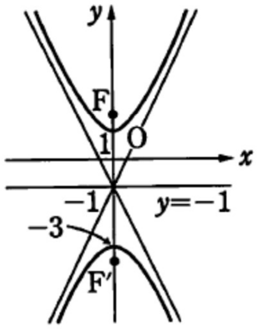

②**B-2-4**

次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求め，その概形をかけ。

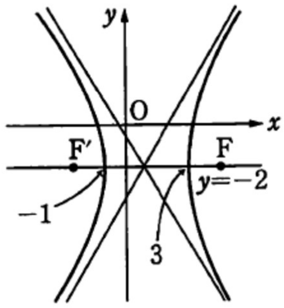
(1)* $4x^2-(y+1)^2=-4$　　(2)　$9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$

**解答**

(1)　焦点 $(0,\ \sqrt{5}-1)$，$(0,\ -\sqrt{5}-1)$
漸近線 $y=\pm 2x-1$




(2)　焦点 $(\sqrt{13}+1,\ -2)$，$(-\sqrt{13}+1,\ -2)$
漸近線 $y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}$，$y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$



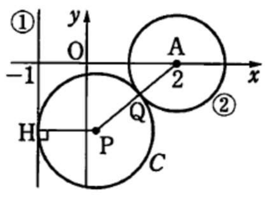

②**B-2-5**

(1)* 直線 $x=-1$ に接し，円 $(x-2)^2+y^2=1$ に外接する円 $C$ の中心P$(x,\ y)$の軌跡の方程式を求めよ。

**解答**　(1)　$y^2=8x$

解き方　(1)　$x=-1$ ……①
$(x-2)^2+y^2=1$ ……②

Pから①に下ろした垂線の足をHとすると，
$x>-1$ だから
$\mathrm{PH}=x-(-1)$
$=x+1$




円 $C$ と円②との接点をQ，円②の中心をAとすれば，
$\mathrm{PQ}=\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1$
$\mathrm{PH}=\mathrm{PQ}$ より $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-1=x+1$
$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x+2$ の両辺を 2 乗して，
整理する。

②**B-2-6**

(1)　焦点の座標がF(7，2)，F′(−1，2)で，長軸の長さが10である楕円の方程式を求めよ。

(2)* 2つの定点F(1，3)，F′(1，1)がある。PF＋PF′＝4 である点Pの軌跡の方程式を求めよ。

解答

(1) $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

(2) $\dfrac{(x-1)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

②B-2-7

次の双曲線の方程式を求めよ。

(1)　焦点の座標が(0，2)，(0，−2)で，点(3，−2)を通る双曲線

(2)* 焦点の座標が(4，0)，(−4，0)で，漸近線が $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ である双曲線

(3)　2直線 $y=2x$，$y=-2x$ を漸近線にもち，点(5，8)を通る双曲線

解答

(1) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=-1$　　(2) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$

(3) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$

②B-2-8

直線 $2x+y=3$ が双曲線 $x^2-y^2=1$ によって切り取られる線分の長さを求めよ。

解き方　$y=3-2x$ を $x^2-y^2=1$ に代入して，

$3x^2-12x+10=0$ ……①

線分の両端の座標を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，①において，解と係数の関係から，

$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=\dfrac{10}{3}$

求める線分の長さを $l$ とすると，

$l^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$=(x_2-x_1)^2+\{(3-2x_2)-(3-2x_1)\}^2$

$=5(x_2-x_1)^2=5\{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\}=\dfrac{40}{3}$

よって，$\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$

②B-2-9

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ が2つの共有点P，Qをもつとき，

(1)　$k$ のとる値の範囲を求めよ。

(2)　線分PQの中点Rの描く図形の方程式を求めよ。

(1)　$-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

(2)　$y=-\dfrac{1}{9}x\left(-\dfrac{9\sqrt{10}}{10}<x<\dfrac{9\sqrt{10}}{10}\right)$

解き方　(1)　2式より $y$ を消去すると，

$10x^2+18kx+9(k^2-1)=0$ ……①

異なる2つの共有点をもつから，

判別式 $\dfrac{D}{4}=(9k)^2-90(k^2-1)>0$

$k^2<10$　　$-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

(2)　P，Q の $x$ 座標を $\alpha$，$\beta$ とし，線分 PQ の中点 R の座標を $(X,\ Y)$ とすると，

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$Y=X+k$

ここで，$\alpha$，$\beta$ は①の解であるから，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-\dfrac{9}{5}k$

よって，$X=-\dfrac{9}{10}k$，$Y=-\dfrac{9}{10}k+k=\dfrac{k}{10}$

この2式から $k$ を消去して，$X+9Y=0$

ただし，(1)の結果と $X=-\dfrac{9}{10}k$ より，

$-\dfrac{9\sqrt{10}}{10}<X<\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$

## ②B-2-10

(1)* 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点Pから直線 $x-2\sqrt{3}y+8=0$ に下ろした垂線の長さの最大値と最小値を求めよ。また，それぞれの場合に，点Pの座標を求めよ。

●北海道大●

(2)* 点 $(x,\ y)$ が楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上を動くとき，$2x^2+xy$ の最小値を求めよ。

●大阪女子大●

(1)　$\mathrm{P}\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

$\mathrm{P}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

(2)　$-1$

解き方　(1)　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点Pの座標は $(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表され，点Pから直線へ下ろした垂線の長さは点と直線の距離の公式から，

$\dfrac{|2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta+8|}{\sqrt{1^2+(-2\sqrt{3})^2}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{13}}\left|2-\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$

ここで $-1\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$ より

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$，すなわち，$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

このとき，Pの座標は $\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

このとき，Pの座標は $\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2)　$x=2\cos\theta$，$y=3\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。

$$\begin{aligned}2x^2+xy&=8\cos^2\theta+6\cos\theta\sin\theta\\&=4(\cos2\theta+1)+3\sin2\theta\\&=3\sin2\theta+4\cos2\theta+4\\&=5\sin(2\theta+\alpha)+4\end{aligned}$$

$-1\leqq\sin(2\theta+\alpha)\leqq1$ より最小値は $-1$

## ②B-2-11

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ の接線が $x$ 軸と $y$ 軸とにはさまれてできる線分の長さの最小値を求めよ。

解き方　接点を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$
$(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とすると，接線は，

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

①と $x$ 軸，$y$ 軸との交点をそれぞれ A，B とすると，$A\left(\dfrac{a}{\cos\theta},\ 0\right)$，$B\left(0,\ \dfrac{b}{\sin\theta}\right)$

$$AB^2=\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{b^2}{\sin^2\theta}$$

$$=a^2(1+\tan^2\theta)+b^2\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$$

$$=a^2+b^2+\left(a^2\tan^2\theta+\frac{b^2}{\tan^2\theta}\right)$$

$$\geqq a^2+b^2+2\sqrt{a^2\tan^2\theta\cdot\frac{b^2}{\tan^2\theta}}$$

（相加平均・相乗平均の関係より）

$$=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$$

よって，AB の最小値は $a+b$

②**B-2-12**

(1)　$x$，$y$ が $x^2+2y^2=1$ を満たすとき，$y-|x|$ の最大値と最小値を求めよ。

(1)　最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(x=0,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right)$，

最小値 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\left(x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ y=-\dfrac{\sqrt{6}}{6} \text{ のとき}\right)$

解き方　(1)　$y-|x|=k$ とおくと，$y=|x|+k$

これは右図のような折れ線だから，$k$ は図１のとき最大となり，図２のとき最小となる。

図１

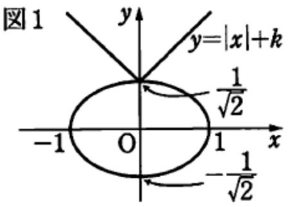
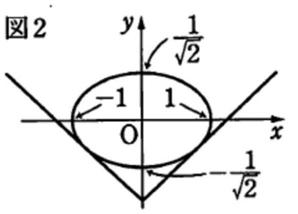



図２




最大値は $x=0$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときの $k$ の値であり，最小値は楕円 $x^2+2y^2=1$ と直線 $y=x+k$ が接するときの $k$ の値である。

２式を連立して，

$$x^2+2(x+k)^2=1$$

$$3x^2+4kx+2k^2-1=0 \quad \cdots\cdots ①$$

判別式を $D$ とすると，

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-1)=0$$

$k<0$ より $k=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

このとき，①は，$(\sqrt{3}x-\sqrt{2})^2=0$

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$y=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

# C 問題

②C-2-1

$\theta$ を $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点P$(a,\ b)$から放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ に引いた２つの接線の接点をQ，Rとし，接線PQ，PRの傾きをそれぞれ $m_1$，$m_2$ とおく。点Pは $\angle \mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点Pの全体が作る図形を $G$ とする。

(1) $m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を $m_1$ と $m_2$ で表せ。

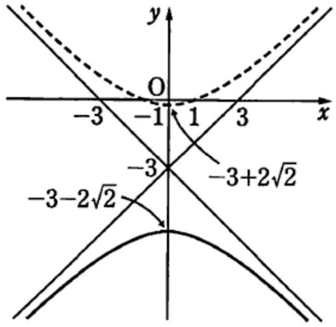
(2) $G$ を数式で表せ。

(3) $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，$G$ を図示せよ。　●九州大●

(1) $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

(2) $\frac{\sqrt{x^2-4y}}{1+y}=-\tan\theta$

(3)




解き方 (1) 直線PQ，PRと $x$ 軸とのなす角をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とおくと，

$\tan\alpha=m_1$，$\tan\beta=m_2$，$\theta=\alpha-\beta$ より，

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

(2) 点P$(a,\ b)$を通る直線の傾きを $m$ $(m\neq 0)$ とすると，$y=m(x-a)+b$

これが $y=\frac{1}{4}x^2$ と接するから，

$\frac{1}{4}x^2=m(x-a)+b$ より，

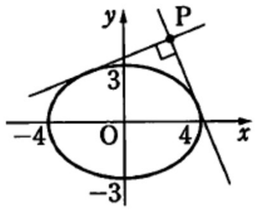
②C-2-2

楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ の外部の点P$(x_1,\ y_1)$から，この楕円に２本の接線を引くと，接線は直交するという。点Pはどんな図形上を動くか。

点Ｐは円 $\boldsymbol{x^2+y^2=25}$ の周上を動く。

解き方 (i) $x_1=\pm4$ のとき，

直交する２接線は
$x=\pm4$ と $y=\pm3$ で
あるから，
$y_1=\pm3$（複号任意）




②**C-2-3**

直線 $y=2x+k$ が曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ $(x>0)$ と異なる２点Ａ，Ａ′で交わるとき，$k$ の値の範囲を求めよ。また，線分ＡＡ′の中点Ｐ$(x,\ y)$ の軌跡の方程式を求めよ。

$\boldsymbol{k<-\sqrt{7}}$，

軌跡の方程式 $\boldsymbol{y=\dfrac{9}{8}x\ \left(x>\dfrac{8\sqrt{7}}{7}\right)}$

解き方 $y=2x+k$ ……①

$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ ……②

この２式より $y$ を消去すると，

$7x^2+16kx+4(k^2+9)=0$ ……③

①，②が異なる２点で交わるためには，③が異なる２つの正の実数解 $\alpha$，$\beta$ をもてばよい。そのための条件は，

$$\begin{cases}\text{判別式 } \dfrac{D}{4}=(8k)^2-28(k^2+9)>0\\ \alpha+\beta=-\dfrac{16k}{7}>0\\ \alpha\beta=\dfrac{4(k^2+9)}{7}>0\end{cases}$$

より，$k<-\sqrt{7}$　このとき，線分ＡＡ′の中点をＰ$(x,\ y)$ とすると，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{8}{7}k$

これと①より $k$ を消去して，Ｐの軌跡の方程式は $y=\dfrac{9}{8}x$　　ただし，$k<-\sqrt{7}$ と $x=-\dfrac{8}{7}k$ より，$x>\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

②$\boxed{\text{C-2-4}}$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ のどんな接線をとっても，接線と2つの漸近線とで囲まれる三角形の面積は一定であることを示せ。

双曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は，

$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ ……①

①と漸近線 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$ との交点をそれぞれA，Bとすると，A，Bの座標は，

$\mathrm{A}\left(\dfrac{a^2b}{bx_1-ay_1},\ \dfrac{ab^2}{bx_1-ay_1}\right)$，

$\mathrm{B}\left(\dfrac{a^2b}{bx_1+ay_1},\ \dfrac{-ab^2}{bx_1+ay_1}\right)$ より求める三角形の面積を $S$ とすると，

②$\boxed{\text{C-2-5}}$

$xy$ 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から定点 $\mathrm{F}(a,\ b)$ までの距離 PF と，点 P から直線 $x=c$ に下ろした垂線の長さ PH の比を $e=\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$a\neq c$ とする。

(1)　$e=1$ のとき，点 P の軌跡を表す方程式を求め，その概形をえがけ。

(2)　$e=\dfrac{1}{2}$ のとき，点 P の軌跡が楕円になることを示し，その楕円の長軸と短軸の長さの比を求めよ。

(3)　$e=2$ のとき，点 P の軌跡が双曲線になることを示し，その頂点の座標および漸近線の傾きを求めよ。　（'00　宇都宮大・工）

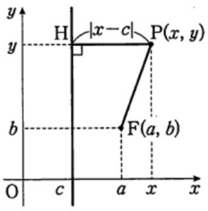
$P(x,\ y)$について，$e=\dfrac{PF}{PH}$

すなわち，$PF^2=e^2PH^2$ から，

$$(x-a)^2+(y-b)^2=e^2(x-c)^2$$

これを $x$ について整理すると，

$$(1-e^2)x^2-2(a-ce^2)x+(y-b)^2+a^2-c^2e^2=0 \quad \cdots\cdots①$$




(1)　$e=1$ のとき，①に代入して，◀解法STEP 1

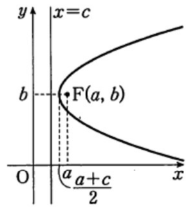
$$-2(a-c)x+(y-b)^2+a^2-c^2=0 \quad ◀Ⓐ$$

$$(y-b)^2=2(a-c)x-(a^2-c^2)$$

よって，点Pの軌跡を表す方程式は，

$$(y-b)^2=2(a-c)\left(x-\frac{a+c}{2}\right) \quad \cdots\cdots(答)$$ ◀解法STEP 2 ◀解法STEP 3

これは，頂点$\left(\dfrac{a+c}{2},\ b\right)$，焦点$(a,\ b)$，準線$x=c$の放物線を表し，概形は右図のようになる。




(2)　$e=\dfrac{1}{2}$ のとき，①に代入して，

$$\frac{3}{4}x^2-2\left(a-\frac{c}{4}\right)x+(y-b)^2+a^2-\frac{1}{4}c^2=0 \quad ◀Ⓑ$$

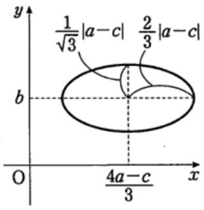
$$\frac{3}{4}\left\{x^2-2\cdot\frac{4}{3}\left(a-\frac{c}{4}\right)x+\frac{16}{9}\left(a-\frac{c}{4}\right)^2\right\}+(y-b)^2+a^2-\frac{1}{4}c^2-\frac{4}{3}\left(a-\frac{c}{4}\right)^2=0$$

$$\frac{3}{4}\left\{x-\frac{4}{3}\left(a-\frac{c}{4}\right)\right\}^2+(y-b)^2=\frac{1}{3}(a-c)^2$$

よって，点Pの軌跡を表す方程式は，

$$\frac{\left(x-\dfrac{4a-c}{3}\right)^2}{\left\{\dfrac{2}{3}(a-c)\right\}^2}+\frac{(y-b)^2}{\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}(a-c)\right\}^2}=1$$

◀解法STEP 2 ◀解法STEP 3




これは楕円を表し，長軸，短軸の長さの比は，

$$2\cdot\frac{2}{3}|a-c| : 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}|a-c|=2 : \sqrt{3} \quad \cdots\cdots(答) \quad ◀Ⓒ$$

(3)　$e=2$ のとき，①に代入して，

$$-3x^2-2(a-4c)x+(y-b)^2+a^2-4c^2=0 \quad ◀Ⓓ$$

$$3\left\{x^2+2\cdot\frac{1}{3}(a-4c)x+\frac{1}{9}(a-4c)^2\right\}-(y-b)^2-a^2+4c^2-\frac{1}{3}(a-4c)^2=0$$

$$3\left(x+\frac{a-4c}{3}\right)^2-(y-b)^2=\frac{4}{3}(a-c)^2$$

よって，点Pの軌跡を表す方程式は，

$$\frac{\left(x+\dfrac{a-4c}{3}\right)^2}{\left\{\dfrac{2}{3}(a-c)\right\}^2}-\frac{(y-b)^2}{\left\{\dfrac{2}{\sqrt{3}}(a-c)\right\}^2}=1$$ ◀解法STEP 2 ◀解法STEP 3

これは双曲線を表し，頂点の $x$ 座標，$y$ 座標はそれぞれ，

$$x=\pm\frac{2}{3}(a-c)-\frac{a-4c}{3} \text{ より，} x=\frac{a+2c}{3},\ -a+2c \quad ◀Ⓔ$$

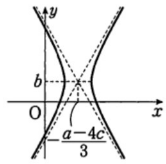
$$y=b \quad ◀Ⓔ$$

よって，

$$頂点は\left(\frac{a+2c}{3},\ b\right),\ (-a+2c,\ b) \quad \cdots\cdots(答)$$

漸近線の傾きは，

$$\pm\frac{\dfrac{2}{\sqrt{3}}|a-c|}{\dfrac{2}{3}|a-c|}=\pm\sqrt{3} \quad \cdots\cdots(答)$$




②$\boxed{\text{C-2-6}}$

双曲線 $x^2-y^2=a^2\ (a>0)$ 上の点 $P(s,\ t)\ (s>0,\ t>0)$ における法線 $m$ が，双曲線 $y^2-x^2=b^2\ (b>0)$ に点Qで接するとする。

(1)　$s^2$，$t^2$ を $a$，$b$ で表せ。

(2)　$\dfrac{OQ}{OP}$ を $a$，$b$ で表せ。また，$\angle POQ$ を求めよ。ただしOは $xy$ 平面の原点とする。

（'04　大阪大・理，工，基礎工）

点Qの座標を$(u,\ v)$とおく。

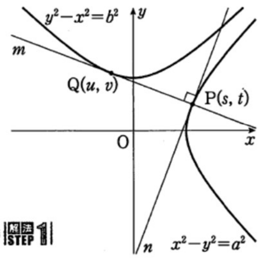
(1)　点$P(s,\ t)$，点$Q(u,\ v)$はそれぞれ双曲線

$$x^2-y^2=a^2\ (a>0)$$
$$y^2-x^2=b^2\ (b>0)$$

上の点であるから，

$$s^2-t^2=a^2\ \cdots\cdots ①$$
$$v^2-u^2=b^2\ \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。




与えられた条件は，図のように，点Qにおける接線$m$と点Pにおける接線$n$が直交し，かつ，$m$が点Pを通ることである。

接線$m$，$n$の方程式はそれぞれ，　◂解法STEP1

$$m:-ux+vy=b^2\quad ◂A$$
$$n:sx-ty=a^2$$

であるから，$m\perp n$，$m$が点Pを通る条件はそれぞれ，　◂解法STEP2

$$-us+v(-t)=0\ \cdots\cdots ③\quad ◂B$$
$$-us+vt=b^2\ \cdots\cdots (*)$$

$s>0$，$t>0$なので，辺々を加えた式と辺々を引いた式から，　◂解法STEP3

$$u=-\frac{b^2}{2s}\ \cdots\cdots ④$$
$$v=\frac{b^2}{2t}\ \cdots\cdots ⑤$$

これらを②に代入して，

$$\frac{b^4}{4}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{s^2}\right)=b^2$$

$b>0$であるから，

$$\frac{b^2}{4}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{s^2}\right)=1$$
$$b^2(s^2-t^2)=4s^2t^2$$

これに①を代入して，

$$b^2a^2=4s^2t^2$$

よって，

$$s^2t^2=\frac{a^2b^2}{4}\ \cdots\cdots ⑥$$

①，⑥から，

$$s^2+(-t^2)=a^2,\ s^2(-t^2)=-\frac{a^2b^2}{4}$$

よって，$s^2$，$-t^2$は$X$についての方程式

$$X^2-a^2X-\frac{a^2b^2}{4}=0\quad ◂C$$

の２解である。よって，解の公式より，

$$X=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4+a^2b^2}}{2}=\frac{a^2\pm a\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$a>0$と，$s^2>0$，$-t^2<0$に注意して

$$\left.\begin{aligned}s^2&=\frac{a^2+a\sqrt{a^2+b^2}}{2}\\ t^2&=\frac{-a^2+a\sqrt{a^2+b^2}}{2}\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots(答)\quad ◂D$$

(2)　点$P(s,\ t)$，点$Q(u,\ v)$から，

$$\frac{OQ}{OP}=\sqrt{\frac{u^2+v^2}{s^2+t^2}}=\sqrt{\frac{\left(-\frac{b^2}{2s}\right)^2+\left(\frac{b^2}{2t}\right)^2}{s^2+t^2}}\quad (④,\ ⑤を用いた)$$
$$=\sqrt{\frac{b^4\,(s^2+t^2)}{(s^2+t^2)\cdot 4s^2t^2}}=\sqrt{\frac{b^4}{a^2b^2}}\quad (⑥を代入した)$$

$a>0$，$b>0$より，

$$\frac{OQ}{OP}=\frac{b}{a}\ \cdots\cdots(答)$$

また，③から，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=su+tv=0$$

$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$はいずれも$\vec{0}$でないから，　◂E

$$\angle POQ=90^\circ\ \cdots\cdots(答)$$

# 第３章　極座標

## 《学習項目》

・放物線の公式、楕円の公式、双曲線の公式

・二次曲線の接線公式

・楕円のパラメータ表示

・楕円・円変換

## A 問題

②**A-3-1**

次の図形の極方程式を求めよ。

(1) 極Oを通り，始線OXとなす角が$\frac{\pi}{6}$の直線

(2) 極Oを中心とする半径2の円

(3)* 極座標が$\left(\sqrt{3},\ -\frac{\pi}{3}\right)$である点Aを通り，OAに垂直な直線

(1) $\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6}}$　(2) $\boldsymbol{r=2}$

(3) $\boldsymbol{r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}}$

②**A-3-2**

次の直交座標に関する方程式を極方程式で表せ。

(1)* $\sqrt{3}x+y=4$　(2) $x+y=2$　(3) $y^2=4(y-1)$

(4)* $x^2-y^2=4$　(5)* $x^2+y^2-4x=0$　(6) $x^2+y^2+2x-2y=0$

(1) $\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2}$

(2) $\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}}$　(3) $\boldsymbol{r\sin\theta=2}$

(4) $\boldsymbol{r^2\cos 2\theta=4}$　(5) $\boldsymbol{r=4\cos\theta}$

(6) $\boldsymbol{r=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$

②**A-3-3**

次の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ。

(1) $r=4$　(2) $a=r\sin\theta$　(3)* $r=a\sin\theta$

(4)* $r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$　(5)* $r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$　(6)* $r=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

(1) $\boldsymbol{x^2+y^2=16}$　(2) $\boldsymbol{y=a}$

(3) $\boldsymbol{x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}}$　(4) $\boldsymbol{y=x+2}$

(5) $\boldsymbol{y=x^2}$　(6) $\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1}$

# B 問題

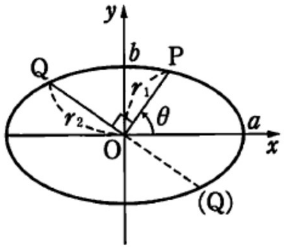
②**B-3-1**

次の曲線上を，２点P，Qが∠POQが直角であるように動くとき，

$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}$ は一定であることを証明せよ。

(1)* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$　　(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(b>a>0)$

(1) 原点Oを極，$Ox$ を始線にとり，Pの極座標を $(r_1,\ \theta)$ とすると，Qの偏角は $\theta\pm\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\mathrm{Q}\left(r_2,\ \theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおける。したがって，２点P，Qの直交座標を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とすれば，




$x_1=r_1\cos\theta$,

$y_1=r_1\sin\theta$

$x_2=r_2\cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\quad=\mp r_2\sin\theta$

$y_2=r_2\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\quad=\pm r_2\cos\theta$ (複号同順)

この２点が楕円の周上にあるから，

$$\frac{r_1{}^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r_1{}^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

$$\frac{1}{r_1{}^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}$$

同様に，$\dfrac{1}{r_2{}^2}=\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{b^2}$

この２式から，

$$\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}$$
$$=\frac{1}{r_1{}^2}+\frac{1}{r_2{}^2}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{b^2}$$
$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ (\text{一定})$$

(2) $\mathrm{OP}=r_1$, $\mathrm{OQ}=r_2$ とし，Pの偏角を $\theta$ とすれば，Qの偏角は $\theta\pm\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

P，Qの直交座標は，

$\mathrm{P}(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta)$,

$\mathrm{Q}\left(r_2\cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right),\ r_2\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

すなわち，$\mathrm{Q}(\mp r_2\sin\theta,\ \pm r_2\cos\theta)$ と表せる。２点P，Qが双曲線上にあるから，

$$\frac{r_1{}^2\cos^2\theta}{a^2}-\frac{r_1{}^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

$$\frac{1}{r_1{}^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}$$

同様に，$\dfrac{1}{r_2{}^2}=\dfrac{\sin^2\theta}{a^2}-\dfrac{\cos^2\theta}{b^2}$

この２式から，

$$\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}=\frac{1}{r_1{}^2}+\frac{1}{r_2{}^2}$$
$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\ (\text{一定})$$

②**B-3-2**

(1) 放物線 $y^2=4px$ $(p>0)$ について，焦点Fを極，$x$ 軸の正の部分を始線とする極方程式を求めよ。

(2) 放物線の焦点Fを通る直線が放物線と交わる点をP，Qとすれば，

$\dfrac{1}{\mathrm{FP}}+\dfrac{1}{\mathrm{FQ}}$ は一定であることを証明せよ。

(1)　$\boldsymbol{r=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}}$

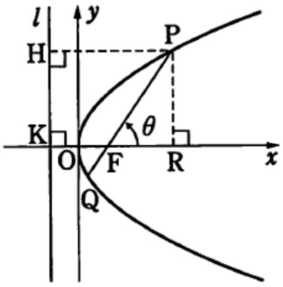
(2)　$\mathrm{P}(r,\theta)$ であるから，点 Q の偏角は $\theta+\pi$

よって，(1)より，

$$\frac{1}{\mathrm{FP}}+\frac{1}{\mathrm{FQ}}=\frac{1-\cos\theta}{2p}+\frac{1-\cos(\theta+\pi)}{2p}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{2p}+\frac{1+\cos\theta}{2p}=\frac{1}{p}\ (\text{一定})$$

解き方　(1)　放物線 $y^2=4px\ (p>0)$ 上の任意の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ から，準線 $l$，始線 O$x$ に下ろした垂線の足をそれぞれ H，R とし，F から $l$ に下ろした垂線の足を K とする。




$\mathrm{PH}=\mathrm{PF}(=r)$ ……①　において，

$$\mathrm{PH}=\mathrm{KR}=\mathrm{KF}+\mathrm{FR}=2p+r\cos\theta$$

これと①より，$r=2p+r\cos\theta$

$$r=\frac{2p}{1-\cos\theta}$$

# C 問題

②C-3-1

$xy$ 座標において，双曲線 $C$：$x^2-y^2=1$ 上の点 P$(a,\ b)$ における $C$ の接線に対して，原点 O から下ろした垂線の足を点 Q とする。

(1) 点 Q の $x$，$y$ 座標を $a$，$b$ を用いて表せ。

(2) 原点 O を極，半直線 O$x$ を始線とする極座標において，双曲線 $C$ の極方程式を求めよ。

(3) 点 P が双曲線 $C$ 上を動くとき，点 Q が描く軌跡の極方程式を求めよ。

●九州工業大●

(1) $\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

(2) $r^2\cos 2\theta=1$

(3) $r^2=\cos 2\theta$ ($r \neq 0$)

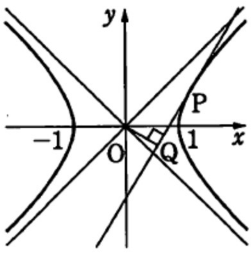
解き方 (1) 点 P$(a,\ b)$ における接線の方程式は，

$ax-by=1$ ……①

原点を通り，①に垂直な直線の方程式は

$bx+ay=0$ ……②

①，②を解いて，




$x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=-\dfrac{b}{a^2+b^2}$

(2) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を $x^2-y^2=1$ に代入して，$r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$ より，

$r^2\cos 2\theta=1$

(3) $r\cos\theta=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$r\sin\theta=\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ より，

$$r^2=\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}$$

$r\cos\theta=ar^2$，$r\sin\theta=-br^2$

$a^2-b^2=1$ だから，

$$\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)^2-\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)^2=1$$

$r^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$ ($r \neq 0$)

②C-3-2

次の問いに答えよ。

(1) 次の極方程式の表す曲線を，直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表し，その概形を図示せよ。

$$r=\frac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$$

(2) 原点を O とする。(1)の曲線上の点 P$(x,\ y)$ から直線 $x=a$ に下ろした垂線を PH とし，$k=\dfrac{\text{OP}}{\text{PH}}$ とおく。点 P が(1)の曲線上を動くとき，$k$ が一定となる $a$ の値を求めよ。また，そのときの $k$ の値を求めよ。　('04 徳島大・医)

(1)　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}\cos\theta}$ ……◎ ◂解法STEP1

から，

$2r+\sqrt{6}\,r\cos\theta=\sqrt{6}$　すなわち，$2r=\sqrt{6}\,(1-r\cos\theta)$

を得て，両辺を２乗すると，

$4r^2=6(1-r\cos\theta)^2$　すなわち，$2r^2=3(1-r\cos\theta)^2$ ◂A

となるので，これに，$r^2=x^2+y^2$，$r\cos\theta=x$ を代入して，

$2(x^2+y^2)=3(1-x)^2$ ……①

を得る。これを整理して，

$x^2-2y^2-6x+3=0$　より，$(x-3)^2-2y^2=6$

すなわち，

$\dfrac{(x-3)^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$ ……(答)

と表される。これは双曲線を表し，

漸近線の方程式は，

$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-3)$ ◂B

であることなどから，

その概形は右図のようになる。

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ について，◂解法STEP2

$k=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x-a|}$ ……② ◂C

である。

一方，①から，

$y^2=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{3}{2}$

であるから，②に代入すると，

$k=\dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{2}(x^2-2x+1)}}{|x-a|}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{|x-a|}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\left|\dfrac{x-1}{x-a}\right|$

となる。

よって，$k$ が一定値となる条件は，◂解法STEP3

$a=1$ ……(答)

であり，このとき，

$k=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ……(答) ◂D

である。

②$\boxed{\text{C-3-3}}$

$xy$ 平面上において，焦点が原点Ｏ，準線の方程式が $x=-2$ であるような放物線 $C$ がある。$C$ の頂点をＰとし，原点を通る直線 $l$ が $C$ と相異なる２点Ｑ，Ｒで交わるように動くとき，線分QRの長さを $u$，三角形PQRの面積を $S$ とすると，$S=\sqrt{u}$ であることを証明せよ。

原点Ｏを極とし，$x$ 軸の正の部分を始線とする極座標で考える。

$C$ 上の点Ｘの極座標を $(r,\ \theta)$ とし，点Ｘから準線 $x=-2$ への垂線の足をＨとすると，◂解法STEP 1

$$\begin{aligned} \mathrm{X}\in C &\iff \mathrm{XO}=\mathrm{XH} \\ &\iff r=r\cos\theta+2 \\ &\iff r=\frac{2}{1-\cos\theta} \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

であるから，①が放物線 $C$ を表す極方程式である。

そこで，右図のように $l$ と $C$ の交点をＱ，Ｒと定め，点Ｑの偏角を $\alpha\,(0<\alpha<\pi)$ とすれば，点Ｒの偏角は $\alpha+\pi$ であるから，①より，

$$\mathrm{OQ}=\frac{2}{1-\cos\alpha} \quad \cdots\cdots ②$$

$$\mathrm{OR}=\frac{2}{1-\cos(\alpha+\pi)}=\frac{2}{1+\cos\alpha} \quad \cdots\cdots ③$$

と表される。◂解法STEP 2

したがって，②と③より，

$$\begin{aligned} u=\mathrm{QR}&=\mathrm{OQ}+\mathrm{OR} \\ &=\frac{2}{1-\cos\alpha}+\frac{2}{1+\cos\alpha} \\ &=\frac{2(1+\cos\alpha)+2(1-\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} \\ &=\frac{4}{1-\cos^2\alpha}=\frac{4}{\sin^2\alpha} \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$ ◂A

と表される。

一方，直交座標では $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ であり $\mathrm{OP}=1$ であることと，$\angle\mathrm{POQ}=\pi-\alpha$，$\angle\mathrm{POR}=\alpha$ であることから，④も用い，

$$\begin{aligned} S&=\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{OPR} \\ &=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\sin(\pi-\alpha)+\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}\sin\alpha \\ &=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot(\mathrm{OQ}+\mathrm{OR})\sin\alpha \\ &=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{QR}\sin\alpha \\ &=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{4}{\sin^2\alpha}\cdot\sin\alpha=\frac{2}{\sin\alpha} \quad \cdots\cdots ⑤ \end{aligned}$$

◂解法STEP 3　◂B

と表されるから，④と⑤および $0<\alpha<\pi$ に注意すると，◂C

$$S=\sqrt{u}$$

が成り立つ。

（証明終わり）

（別証の略解）

$xy$ 座標系では $C:y^2=4(x+1)$ と表され，$l:x=my$ とおける。

$x=my$ を $y^2=4(x+1)$ に代入し $x$ を消去して得られる $y$ の２次方程式

$$y^2-4my-4=0$$

の２解を $y_1$，$y_2$ とすると，◂D

$$u=\sqrt{m^2+1}\,|y_1-y_2|=\sqrt{m^2+1}\cdot4\sqrt{m^2+1}=4(m^2+1) \quad \cdots\cdots ㋐$$

である。

一方，線分 OP の長さは１であるから，

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(|y_1|+|y_2|) \quad ◂\mathrm{E} \\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(2m+2\sqrt{m^2+1}\right)+\left(-2m+2\sqrt{m^2+1}\right)\right\} \quad ◂\mathrm{F} \\ &=2\sqrt{m^2+1} \quad \cdots\cdots ㋑ \end{aligned}$$

と表される。㋐と㋑から証明が終わる。

# 第４章　数学Ⅲの関数

## 《学習項目》

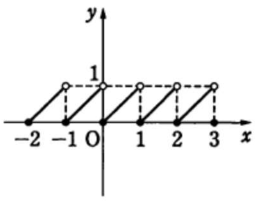
・有理関数（分数型関数），無理関数
・逆関数，合成関数
・グラフの平行移動と対称移動
・三角関数のグラフの周期

## A 問題

③**4-A-1**

$y=x-[x]$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ のグラフをかけ。

$-2\leqq x<-1$ のとき，$[x]=-2$ より
$y=x-(-2)=x+2$
同様にして，
$-1\leqq x<0$ のとき　$y=x-(-1)=x+1$
$0\leqq x<1$ のとき　$y=x-0=x$




解答　他の範囲についても同様に考えて，グラフは上図。

③**4-A-2**

次の問いに答えよ。

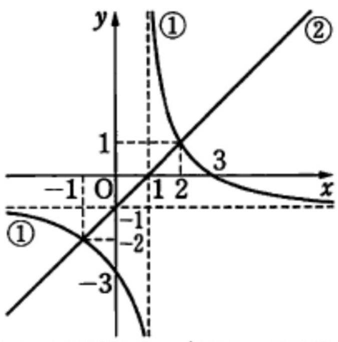
(1)　分数関数 $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ のグラフと直線 $y=x-1$ との共有点の座標を求めよ。

(2)　グラフを利用して，不等式 $\dfrac{-x+3}{x-1}\leqq x-1$ を解け。

解答　**(1)　$(-1,\ -2)$，$(2,\ 1)$ (2)　$-1\leqq x<1$，$x\geqq 2$**

解き方　(1)　共有点の $x$ 座標は，
$\dfrac{-x+3}{x-1}=x-1$ の解である。
この両辺に $x-1$ を掛けると，
$-x+3=(x-1)^2$
よって，$(x+1)(x-2)=0$
したがって，共有点の $x$ 座標は，$x=-1,\ 2$
これらを $y=x-1$ に代入して，共有点の座標は，$(-1,\ -2)$，$(2,\ 1)$

(2)　$y=\dfrac{-x+3}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+2}{x-1}$
$=\dfrac{2}{x-1}-1$ ……①，
$y=x-1$ ……② とおくと，①，②のグラフは次の図のようになる。




求める不等式の解は，双曲線①が共有点を含めて直線②の下側にある $x$ の値の範囲であるから，$-1\leqq x<1$，$x\geqq 2$

③**4-A-3**

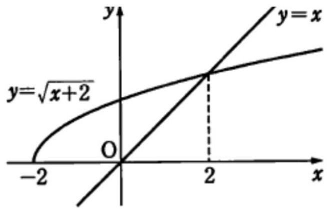
グラフを利用して，不等式 $\sqrt{x+2}>x$ を解け。

解答　$-2\leq x<2$

$x+2 \geqq 0$ より定義域は $x \geqq -2$

$\sqrt{x+2}=x$ を解いて，$x=2,\ -1$

ここで，$y=\sqrt{x+2}$，$y=x$ のグラフをかくと右図のようになるから，求める $x$ の値の範囲は，$-2 \leqq x < 2$




$\sqrt{x+2}=x+k$ より，$x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$

③**4-A-4**

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ の逆関数を求めよ。また，$g(x)=\dfrac{1}{ax+b}$ が $g(f(x))=\dfrac{x}{x-1}$ を満たすとき，$a$，$b$ の値を求めよ。

**解答**　$a=1,\ b=0$

$y=f(x)$ とすると，$y=\dfrac{x-1}{x}=1-\dfrac{1}{x}$ より $y \neq 1$

また，$y=\dfrac{x-1}{x}$ を $x$ について解くと，$x=\dfrac{1}{1-y}$　　$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{1-x}\ (x \neq 1)$

$g(f(x))=\dfrac{1}{a\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+b}=\dfrac{x}{(a+b)x-a}$　　よって，$a=1$，$b=0$

# B 問題

③**4-B-1**

曲線 $y=\sqrt{2x-1}$ と直線 $y=x+k$ とのグラフの共有点の個数は，実数 $k$ の値によってどのように変わるか。

**解答**　$k>0$ のとき 0 個，$k=0$，$k<-\dfrac{1}{2}$ のとき 1 個，$-\dfrac{1}{2} \leqq k < 0$ のとき 2 個

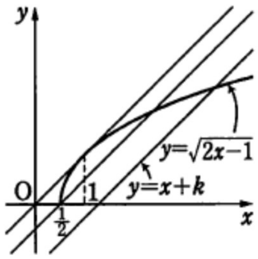
**解き方**　曲線

$y=\sqrt{2x-1}$ ……①

に対して，

直線 $y=x+k$ ……②

を動かしてみる。




①，②が接するとき，

$\sqrt{2x-1}=x+k$

両辺を平方して整理すると，

$x^2+2(k-1)x+k^2+1=0$ から，

判別式 $D=0$ より，$k=0$

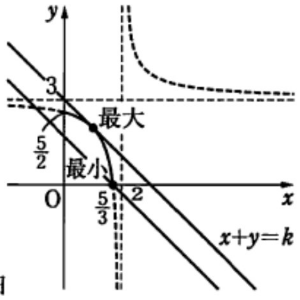
また，②が点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るとき，$k=-\dfrac{1}{2}$

③**4-B-2**

$x$，$y$ が $xy=3x+2y-5$ $(0 \leqq x < 2,\ y \geqq 0)$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

**解答**　最大値 3 $(x=1,\ y=2)$　最小値 $\dfrac{5}{3}$ $\left(x=\dfrac{5}{3},\ y=0\right)$

解き方　$xy=3x+2y-5$ ……① より，
$y(x-2)=3x-5$
$0 \leqq x < 2$ から
$x \neq 2$ なので，
$y=\dfrac{3x-5}{x-2}$
$=\dfrac{1}{x-2}+3$
よって，右図の双曲線の実線部分となる。




$x+y=k$ とおくと，これは $y=-x+k$ より，上図から接点を通るときに最大値をとり，点 $\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$ を通るときに最小値をとる。

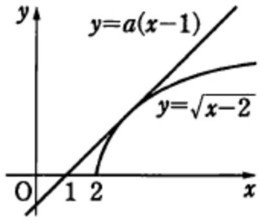
$y=-x+k$ を①に代入して，
$x(-x+k)=3x+2(-x+k)-5$ から，
$x^2-(k-1)x+2k-5=0$
判別式 $D=0$ を解いて，$k=3,\ 7$
図のように接するのは $k=3$ のときである。
このとき，$x^2-2x+1=0$　　$x=1$
$y=-1+3=2$

③**4-B-3**

方程式 $\sqrt{x-2}=a(x-1)$ について，次の問いに答えよ。
(1)　この方程式が異なる２つの実数解をもつような定数 $a$ の値の範囲を求めよ。
(2)　異なる２つの実数解の差が $3\sqrt{5}$ であるとき，$a$ の値を求めよ。

解答　**(1)　$0<a<\dfrac{1}{2}$　　(2)　$a=\dfrac{1}{3}$**

解き方　(1)　双曲線 $y=\sqrt{x-2}$ と直線 $y=a(x-1)$ が右図のように接するのは $\sqrt{x-2}=a(x-1)$ の両辺を２乗して $x-2=a^2(x-1)^2$




$a^2x^2-(2a^2+1)x+a^2+2=0$
$a=0$ のとき実数解は１つだから，$a \neq 0$
判別式 $D=0$ より　$a=\pm\dfrac{1}{2}$
上図より接するのは　$a=\dfrac{1}{2}$
これら２つのグラフが異なる２つの共有点をもつ $a$ の値の範囲は，$0<a<\dfrac{1}{2}$

(2)　２つの解は(1)の２次方程式より
$x=\dfrac{2a^2+1\pm\sqrt{1-4a^2}}{2a^2}$ であり，その差は，
$\dfrac{2a^2+1+\sqrt{1-4a^2}}{2a^2}-\dfrac{2a^2+1-\sqrt{1-4a^2}}{2a^2}$
$=\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a^2}$
よって，$\dfrac{\sqrt{1-4a^2}}{a^2}=3\sqrt{5}$
分母を払って $\sqrt{1-4a^2}=3\sqrt{5}\,a^2$
両辺を２乗して $1-4a^2=45a^4$
よって，$(9a^2-1)(5a^2+1)=0$
ここで $0<a<\dfrac{1}{2}$ より，$a=\dfrac{1}{3}$

③**4-B-4**

$a,\ b,\ c$ を定数とするとき，$x$ の１次関数 $f(x)=ax+b$ と $g(x)=x+c$ の合成関数 $f(g(x))$ が $f(g(x))=2x-3$ となり，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が $f^{-1}(3)=-2$ を満たすとき，$a,\ b,\ c$ の値を求めよ。　●千葉工業大●

解答　**$a=2,\ b=7,\ c=-5$**

解き方　$f(g(x))=ag(x)+b$

$=a(x+c)+b=ax+(ac+b)$

だから，$f(g(x))=2x-3$ より，

$a=2$ かつ $ac+b=-3$ ……①

また，$f^{-1}(3)=-2$ より，$f(-2)=3$

だから，$-2a+b=3$ ……②

①，②より，$a=2$，$b=7$，$c=-5$

③**4-B-5**

(1)　関数 $f(x)=ax^2+1$ ($a>0$，$x\geqq 0$) の逆関数 $g(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ と $g(x)$ のグラフが接するときの $a$ の値と，接点の座標を求めよ。

解答　**(1)　$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{a}}$ ($x\geqq 1$) (2)　$a=\dfrac{1}{4}$，接点 (2，2)**

解き方　(1)　$y=ax^2+1$ ($a>0$，$x\geqq 0$)

を $x$ について解くと，$x^2=\dfrac{y-1}{a}$

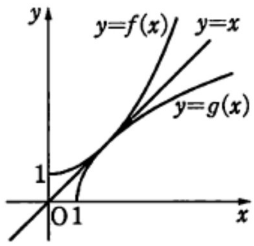
$x\geqq 0$ のとき $y\geqq 1$ であるから，

$x=\sqrt{\dfrac{y-1}{a}}$

したがって，逆関数は，

$y=g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{a}}$　($x\geqq 1$)

(2)　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，この 2 曲線が接するとき，$y=x$ は共通接線になる。




よって，$y=f(x)$ と $y=x$ が接するときを考える。

$f(x)=x$ より $ax^2-x+1=0$ ($a>0$) …①

①について，

判別式 $D=1-4a=0$ より，$a=\dfrac{1}{4}$

このとき，①より $x=2$

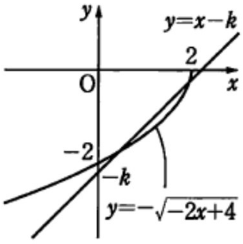
③**4-B-6**

定義域を $x\leqq 0$ としたときの，関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2$ の逆関数を $y=g(x)$ とするとき，関数 $y=g(x)$ のグラフと直線 $y=x-k$ が，異なる 2 つの共有点をもつような定数 $k$ の値の範囲を求めよ。

解答　$\boldsymbol{2\leqq k<\dfrac{5}{2}}$

解き方　$x^2=-2y+4\geqq 0$ より $y\leqq 2$

また，$x\leqq 0$ より
$g(x)=-\sqrt{-2x+4}$ $(x\leqq 2)$
右図のように２つの共有点をもつような $k$ の値の範囲を求める。
点 $(2,\ 0)$ を通るときの $k$ の値は２
接するときの $k$ の値




は，$x-k=-\sqrt{-2x+4}$ の両辺を平方して整理すると，$x^2+2(1-k)x+k^2-4=0$
判別式 $\dfrac{D}{4}=0$ を解いて $k=\dfrac{5}{2}$
以上より $2\leqq k<\dfrac{5}{2}$

③**4-B-7**

(1) $\sqrt{13-x^2}>x+1$　　　(2) $\sqrt{x^2-x}\leqq 3-x$

解答　(1) $-\sqrt{13}\leqq x<2$　　(2) $x\leqq 0,\ 1\leqq x\leqq\dfrac{9}{5}$

(1) (i) $x+1\geqq 0$ ……① のとき，両辺を平方すると　$13-x^2>(x+1)^2$
整理すると　$x^2+x-6<0$　　$(x+3)(x-2)<0$
① から　$-1\leqq x<2$ ……②
(ii) $x+1<0$ ……③ のとき，$13-x^2\geqq 0$ ならば与えられた不等式は成り立つ。
$(\sqrt{13}+x)(\sqrt{13}-x)\geqq 0$ から　$-\sqrt{13}\leqq x\leqq\sqrt{13}$
③ から　$-\sqrt{13}\leqq x<-1$ ……④
②，④ を合わせた共通範囲を求めて　　$-\sqrt{13}\leqq x<2$
参考　$y=\sqrt{13-x^2}$ のグラフを考える。
両辺を平方すると　$y^2=13-x^2$　　$x^2+y^2=13$
つまり，原点 $(0,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{13}$ の円の上側半分を表している。

(2) 与式から　$x^2-x\geqq 0$ ……①，$3-x\geqq 0$ ……②，$x^2-x\leqq(3-x)^2$ ……③
① から　$x(x-1)\geqq 0$　　よって　$x\leqq 0,\ 1\leqq x$ ……④
② から　$x\leqq 3$ ……⑤
③ から　$x^2-x\leqq 9-6x+x^2$　整理すると　$5x-9\leqq 0$　　よって　$x\leqq\dfrac{9}{5}$ ……⑥
④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　　$x\leqq 0,\ 1\leqq x\leqq\dfrac{9}{5}$

③**4-B-8**

関数 $y=4\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{3}{2}\pi\right)$ のグラフは，$y=\cos\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを $\theta$ 軸方向に ア $\boxed{\phantom{00}}$ $\pi$ だけ平行移動し，$\theta$ 軸をもとにして $y$ 軸方向に イ $\boxed{\phantom{00}}$ 倍に拡大したものである。

また，この関数の周期は ウ $\boxed{\phantom{00}}$ $\pi$ である。

解答　（ア）３　（イ）４　（ウ）４

$$4\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}\pi\right)=4\cos\frac{1}{2}(\theta-3\pi)$$

よって，$y=4\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}\pi\right)$ のグラフは，$y=\cos\frac{\theta}{2}$ のグラフを $\theta$ 軸方向に ${}^{ア}3\pi$ だけ平行移動し，$\theta$ 軸をもとにして $y$ 軸方向に ${}^{イ}4$ 倍に拡大したものである。

また，周期は　$2\pi\div\frac{1}{2}={}^{ウ}4\pi$

③**4-B-9**

$xy$ 平面において，関数 $y=5\times3^x$ のグラフは，関数 $y=3^x$ のグラフを，$x$ 軸の正の方向に $\boxed{\phantom{xx}}$ だけ平行移動したものである.

解答　$-\log_3 5$

$5=3^{\log_3 5}$ であるから $y=5\times3^x=3^{\log_3 5}\times3^x=3^{x+\log_3 5}$

よって，このグラフは，$y=3^x$ のグラフを $x$ 軸の正の方向に $-\log_3 5$ だけ平行移動したものである.

# C 問題

③**4-C-1**

関数 $f(x)=\sqrt{x+1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　不等式 $f^{-1}(x)\geqq f(x)$ を満たす $x$ の値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$f^{-1}(x)=x^2-1$　$(x\geqq0)$　　(2)　$0\leqq x\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(1)　関数 $y=f(x)$ について，値域は $y\geqq0$ である。

$y=\sqrt{x+1}$ を $x$ について解くと　$x=y^2-1$　$(y\geqq0)$

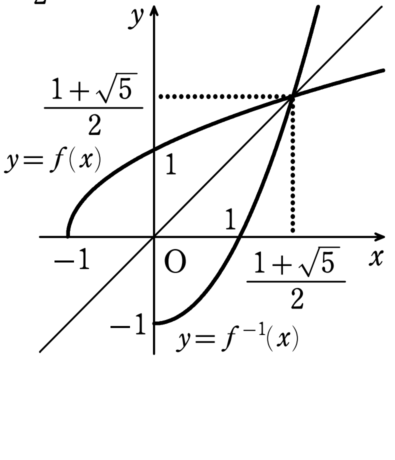
よって，求める逆関数は　$f^{-1}(x)=x^2-1$　$(x\geqq0)$

(2)　共有点は直線 $y=x$ 上にあるから，$y=f(x)$ と $y=x$ のグラフの共有点を求める。

$\sqrt{x+1}=x$　……①　の両辺を２乗して整理すると　$x^2-x-1=0$

これを解くと　$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　①を満たすのは　$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，共有点の座標は　$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$




グラフより，$f^{-1}(x)\leqq f(x)$ を満たす $x$ の値の範囲は，定義域に注意して，

$$0\leqq x\leqq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

③**4-C-1**

座標平面上で双曲線 $y=\dfrac{8(x-1)}{x-2}$ と直線 $y=mx$ $(m\neq 0)$ の２つの交点をP，Qとする。次の問いに答えよ。

(1) 線分PQの長さを $m$ を用いて表せ。

(2) 線分PQの長さの最小値を求めよ。

**解答** (1) $\mathbf{PQ=2\sqrt{m^2+\dfrac{16}{m^2}+17}}$ (2) **10**

**解き方** (1) $\dfrac{8(x-1)}{x-2}=mx$ から

$mx^2-2(m+4)x+8=0$ $(m\neq 0)$

判別式 $\dfrac{D}{4}=(m+4)^2-8m=m^2+16>0$ より，双曲線と直線は常に２つの交点をもつ。

２つの交点P，Qの $x$ 座標をそれぞれ $\alpha$，$\beta$ とすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=\dfrac{2(m+4)}{m}$，$\alpha\beta=\dfrac{8}{m}$ ……①

P$(\alpha,\ m\alpha)$，Q$(\beta,\ m\beta)$ より

$PQ^2=(\alpha-\beta)^2+(m\alpha-m\beta)^2$

$=(\alpha-\beta)^2+m^2(\alpha-\beta)^2$

$=(m^2+1)(\alpha-\beta)^2$ ……②

①から $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{4}{m^2}(m^2+16)$

これを②に代入して，

$PQ^2=\dfrac{4}{m^2}(m^2+16)(m^2+1)=4\left(m^2+\dfrac{16}{m^2}+17\right)$

よって，$PQ=2\sqrt{m^2+\dfrac{16}{m^2}+17}$

(2) 相加・相乗平均の関係より，

$m^2+\dfrac{16}{m^2}\geqq 2\sqrt{m^2\times\dfrac{16}{m^2}}=8$

よって，PQの最小値は $2\sqrt{8+17}=10$

③**4-C-2**

実数 $a$ は $0<a\leqq 2$ の範囲を動くものとする。このとき $y=\sqrt{x}$ と $y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような $a$ の値の範囲を求めよ。

●京都大●

**解答** $\mathbf{0<a\leqq 4-2\sqrt{2}}$

**解き方** $y=\sqrt{x}$ ……①，

$y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ ……② とする。

②は $\dfrac{1}{a}(2x-1)+(1-y)=0$ と変形でき，

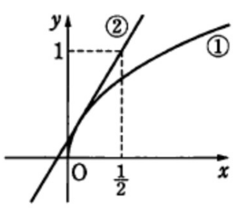
常に点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通る。①，②より

$\sqrt{x}=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$

分母を払って

$a\sqrt{x}=2x+a-1$

両辺を２乗して整理すると，$4x^2-(a-2)^2x+(a-1)^2=0$




①と②が上図のように接するとき，

判別式 $D=0$ となるので，

$(a-2)^4-16(a-1)^2=a^2(a^2-8a+8)=0$

$0<a\leqq 2$ だから，$a=4-2\sqrt{2}$

したがって，①と②が共有点をもつ $a$ の値の範囲は $0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$

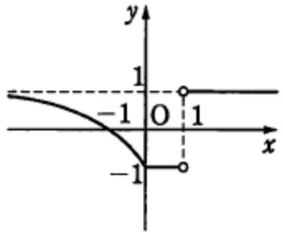
③**4-C-3**

(1) 関数 $y=\dfrac{|x|-1}{|x-1|}$ のグラフをかけ。

(2) 方程式 $\dfrac{|x|-1}{|x-1|}=mx$ が解をもたないような $m$ の値の範囲を求めよ。

解答

(1)




(2) $-1\leqq m<-3+2\sqrt{2}$

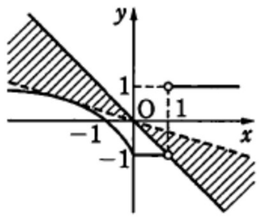
解き方 (1) $y=\dfrac{|x|-1}{|x-1|}$ ……① は $x>1$ のとき $y=1$，$0\leqq x<1$ のとき $y=-1$

$x<0$ のとき $y=\dfrac{-x-1}{-x+1}=\dfrac{2}{x-1}+1$

よって，①を表すグラフは上図のようになる。

(2) $y=mx$ が点 $(1,\ -1)$ を通るときの $m$ の値は $-1$

また，$y=mx$ が $y=\dfrac{2}{x-1}+1\ (x<0)$ と接するときの $m$ の値は $-3+2\sqrt{2}$




$(-3-2\sqrt{2}$ は不適$)$

よって，求める $m$ の値の範囲は

$-1\leqq m<-3+2\sqrt{2}$

③**4-C-4**

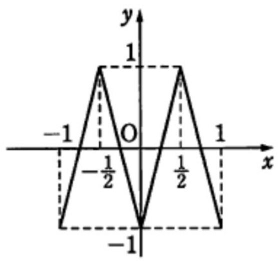
$f(x)=\begin{cases}2x+1 & (-1\leqq x\leqq 0)\\ -2x+1 & (0\leqq x\leqq 1)\end{cases}$ のように定義された関数 $f(x)$ について

(1) $y=(f\circ f)(x)$ のグラフをかけ。

(2) $(f\circ f)(a)=f(a)$ となる $a$ を求めよ。 ●武蔵工業大●

解答

(1)




(2) $a=\pm1,\ \pm\dfrac{1}{3}$

解き方　(1)　$-1 \leqq f(x) \leqq 1$ となる。
$-1 \leqq f(x) \leqq 0$ のとき $(f \circ f)(x) = 2f(x) + 1$
$0 \leqq f(x) \leqq 1$ のとき $(f \circ f)(x) = -2f(x) + 1$
より，

$-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{2}$ のとき

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(2x+1)+1 = 4x+3$$

$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -2f(x) + 1 = -2(2x+1)+1 = -4x-1$$

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき

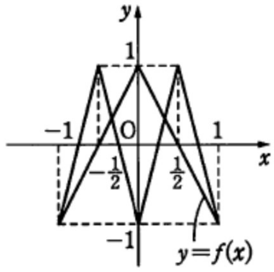
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -2f(x) + 1 = -2(-2x+1)+1 = 4x-1$$

$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(-2x+1)+1 = -4x+3$$

以上から，上図のグラフになる。

(2)　$y = (f \circ f)(x)$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフを重ねてかくと下図になる。この２つの折れ線グラフの交点の $x$ 座標を求める。



# 第５章　数学Ⅲの極限

## 《学習項目》

・$\dfrac{0}{0}$不定形　⇒　約分して代入，公式，微分の定義

・$\dfrac{\infty}{\infty}$不定形　⇒　次数の比較，指数の底の比較　（無限大のオーダー）

・$\infty-\infty$，$\infty\times 0$ 不定形　⇒　別の形に持ち込む

・$(1+0)^{\infty}$不定形　⇒　$e$の定義に持ち込む

・無限級数＝第 $n$ 部分和の極限　特に，無限等比級数なら公式利用

## A 問題

③**5-A-1**

次の極限を調べよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$

**解答**　(1) **1**　(2) **6**

**解き方**　(1) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-1}=1$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(\sqrt{x+6}+3)=6$

③**5-A-2**

第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を調べ，極限値があればそれを求めよ。

(1)* $\dfrac{3n^2-n}{2n^2+3}$　　(2) $3^n-2^n$　　(3)* $3^n+(-4)^n$

(4) $\dfrac{5n+3}{n^2-2n}$　　(5) $\dfrac{(2n-3)(n+2)}{(2n+1)(3n-2)}$　　(6)* $\dfrac{4n}{\sqrt{9n^2-3}}$

(7)* $\dfrac{2^n}{3^n-2}$　　(8)* $2^{3n}-3^{2n}$　　(9) $\dfrac{2^{2n+3}}{4^n+(-3)^n}$

**解答**

(1) $\dfrac{3}{2}$　(2) $\infty$

(3) 振動する（極限は存在しない）　(4) **0**

(5) $\dfrac{1}{3}$　(6) $\dfrac{4}{3}$　(7) **0**　(8) $-\infty$　(9) **8**

解き方 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{3}{2}$

収束し，極限値は $\frac{3}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$

正の無限大に発散する。

(3) $\lim_{n\to\infty}\{3^n+(-4)^n\}=\lim_{n\to\infty}(-4)^n\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n+1\right\}$

より，振動し，極限はない。

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{n^2-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{2}{n}}=0$

収束し，極限値は 0

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)(n+2)}{(2n+1)(3n-2)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{3}$

収束し，極限値は $\frac{1}{3}$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{9n^2-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{9-\frac{3}{n^2}}}=\frac{4}{3}$

収束し，極限値は $\frac{4}{3}$

(7) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3^n}}=0$

収束し，極限値は 0

(8) $\lim_{n\to\infty}(2^{3n}-3^{2n})=\lim_{n\to\infty}(8^n-9^n)$

$=\lim_{n\to\infty}9^n\left\{\left(\frac{8}{9}\right)^n-1\right\}=-\infty$

負の無限大に発散する。

(9) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+3}}{4^n+(-3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times4^n}{4^n+(-3)^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n}=8$

収束し，極限値は 8

③**5-A-3**

次の極限を求めよ。

(1)* $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n}}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$

(3)* $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n}-\sqrt{4n^2-5n})$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n-1}-\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}}$

解答　(1) **2**　(2) **∞**　(3) **2**　(4) $3\sqrt{2}-4$

解き方 (1) 与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}=2$

(2) 与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{3}=\infty$

(3) 与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{\sqrt{4n^2+3n}+\sqrt{4n^2-5n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+\sqrt{4-\frac{5}{n}}}=2$

(4) 与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{3}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}$

$=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=3\sqrt{2}-4$

③**5-A-4**

次の極限を求めよ。

(5)* $\lim_{n\to\infty}\{4^n-(-3)^n\}$

(6) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n-2^n}$　　(7) $\lim_{n\to-\infty}\dfrac{6n+5}{\sqrt{4n^2+3}}$

(8) $\lim_{n\to-\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-3^n\right\}$　　(9)* $\lim_{n\to-\infty}\dfrac{4^n-3^n}{3^n+2^n}$

**解答**　(5) $\infty$　(6) **3**　(7) **−3**　(8) $\infty$　(9) **0**

(5) 与式$=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}=\infty$

(6) 与式$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3-2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=3$

(7) 与式$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6(-n)+5}{\sqrt{4(-n)^2+3}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-6+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n^2}}}=-3$

(8) 与式$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n}-3^{-n}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{2^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}=\infty$

(9) 与式$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^{-n}-3^{-n}}{3^{-n}+2^{-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{4}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}=0$

③**5-A-5**

次の極限を求めよ。

(1)* $\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}$　　(2) $\lim_{x\to+0}3^{\frac{1}{x}}$　　(3) $\lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}$

(4)* $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　　(5) $\lim_{n\to-\infty}0.5^n$　　(6) $\lim_{x\to-0}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

(7)* $\lim_{x\to2-0}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$　　(8) $\lim_{x\to1-0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$　　(9) $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(1) **1**　(2) $\infty$　(3) **0**　(4) **0**

(5) $\infty$　(6) $\infty$　(7) **0**　(8) **0**

(9) 存在しない

**解答**

解き方 (1) $n\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{n}\to 0$ から

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=2^0=1$

(2) $x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to\infty$ から

$\displaystyle\lim_{x\to+0}3^{\frac{1}{x}}=\infty$

(3) $x\to-0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ から

$\displaystyle\lim_{x\to-0}2^{\frac{1}{x}}=0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

(5) $n=-m$ とおくと，$n\to-\infty$ のとき $m\to\infty$ から

$$\lim_{n\to-\infty}0.5^n=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-m}=\lim_{m\to\infty}(2^{-1})^{-m}$$
$$=\lim_{m\to\infty}2^m=\infty$$

(6) $x\to-0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ から $\dfrac{1}{x}=-n$ とおくと $n\to\infty$ であり，このとき

$$\lim_{x\to-0}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$$

(7) $x\to2-0$ のとき $\dfrac{1}{x-2}\to-\infty$ から

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=0$

(8) $x\to1-0$ のとき $\dfrac{1}{1-x}\to\infty$ から

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}=0$

(9) $x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to\infty$ から

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0$

$x\to-0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ から

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\infty$

これより $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ は存在しない。

③**5-A-6**

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan5x}{\sin3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos x}$

解 答 (1)$\dfrac{5}{3}$　(2)$\dfrac{a^2}{2}$　(3)18

解き方 (1) 与式

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin\{x(x+a)\}}{x(x+a)}\cdot(x+a)\right]$$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin4x}{4x}\cdot\frac{3x}{\sin3x}\cdot\frac{4}{3}\right)$

(3) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 ax}{x^2(1+\cos ax)}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\cdot a^2\cdot\frac{1}{1+\cos ax}\right\}$$

(4) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin^2 3x}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2}{1-\cos x}\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot9\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{(1+\cos x)\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot9\right\}$$

③**5-A-7**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$　(3)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$

(4)* $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{h}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-2x)}{x}$

**解答**　**(1)** $e^2$　**(2)** $\dfrac{1}{e^2}$　**(3)** $e^{\frac{2}{3}}$　**(4)** **2**　**(5)** $-2$

解き方　(1) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\left\{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=e$ より

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2=e^2$$

(2) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\left\{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-2}$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$ を求める。

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}=\left(\frac{x}{x-1}\right)^x$$

$$=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}=e$ より

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=e$$

よって

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-2}$$

$$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-1}{2h}=2\times 1=2$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\log\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}=\log e^{-2}=-2$$

③**5-A-8**

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{7^n}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos\frac{n}{2}\pi$

**解答**　**(1)** $\dfrac{49}{12}$　**(2)** $-\dfrac{1}{10}$

解き方　(1) 与式$\displaystyle=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{4}{7}\right)^n\right\}$

$$=\frac{1}{1-\frac{3}{7}}+\frac{1}{1-\frac{4}{7}}=\frac{49}{12}$$

(2) 与式$=\dfrac{1}{3}\times 0+\dfrac{1}{3^2}\times(-1)+\dfrac{1}{3^3}\times 0$

$+\dfrac{1}{3^4}\times 1+\cdots\cdots$

$$=-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{-\frac{1}{3^2}}{1-\left(-\frac{1}{3^2}\right)}=-\frac{1}{10}$$

③**5-A-9**

次の無限級数の収束・発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}-\cdots\cdots$

(2) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\cdots\cdots$

(3)* $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{7}-\dfrac{4}{9}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}+\cdots\cdots$

**解答**　(1)　収束し，和は１　(2)　収束し，和は１　(3)　発散する

解き方　(1)　第 $n$ 部分和 $S_n$ を $n=2m-1,\ 2m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ に分けて考えると，

$$S_{2m-1}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right)=1$$

$$S_{2m}=S_{2m-1}-\frac{1}{m+1}=1-\frac{1}{m+1}$$

よって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=1$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$

注　与えられた無限級数に勝手にかっこをつけて，

$$1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots=1$$

などとしてはいけない。必ず，部分和の極限を考える。

(2)　$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$=1-\dfrac{1}{n+1}$　よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$

注　部分和（有限数列の和）については，かっこをつけて考えてよい。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\neq 0$$

したがって，この無限級数は発散する。

# B 問題

③**5-B-1**

次の極限を調べよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}$　(2)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{x+2}$　(5)* $\displaystyle\lim_{x\to3+0}\frac{|x-3|}{x^2-9}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to3-0}\frac{|x-3|}{x^2-9}$

**解答**

(1)　極限は存在しない。(2)　極限は存在しない。(3)　正の無限大に発散する。

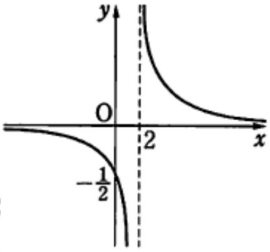
(4)　負の無限大に発散する。(5)　$\dfrac{1}{6}$　(6)　$-\dfrac{1}{6}$

解き方　(1)

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = \infty$$

したがって，$x \to 2$ のとき極限は存在しない。



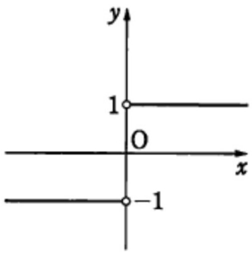

$y=\dfrac{1}{x-2}$ のグラフは上図のようになる。

(2)　与式$=\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to -0} \frac{x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \to -0} \frac{x}{-x} = -1$$

したがって，$x \to 0$ のとき極限は存在しない。

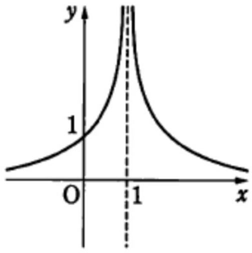



$y=\dfrac{x}{|x|}$ のグラフは上図のようになる。

(3)　$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

したがって，$x \to 1$ のとき，正の無限大に発散する。




$y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ のグラフは上図のようになる。

(4)　$\displaystyle\lim_{x \to -2-0} \frac{1}{x+2} = -\infty$

(5)　与式$=\displaystyle\lim_{x \to 3+0} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$

$$= \lim_{x \to 3+0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$$

(6)　与式$=\displaystyle\lim_{x \to 3-0} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3-0} \frac{-1}{x+3}$

$$= -\frac{1}{6}$$

③**5-B-2**

次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2+4}-x)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1})$

**解答**　(1)　**2**　　(2)　$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

解き方　(1)　与式$=\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}+x}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+1} = 2$$

(2)　与式$=\displaystyle\lim_{x \to \infty} \{3(-x)+1+\sqrt{9(-x)^2+4(-x)+1}\}$

$$= \lim_{x \to \infty} \{\sqrt{9x^2-4x+1}-(3x-1)\}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{9x^2-4x+1-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2-4x+1}+3x-1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{9x^2-4x+1}+3x-1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{9-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$$

③**5-B-3**

$a$，$b$ を定数とする。$\displaystyle\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2+4x+7}+ax+b)$ が極限値をもつとき，$a$，$b$ の値を求め，その極限値を求めよ。　●福岡大●

**解答**　$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=-2}$，**極限値** $\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

(3)　与式 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x\{(x^2+4x+7)-(ax+b)^2\}}{\sqrt{x^2+4x+7}-(ax+b)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2+2(2-ab)x+7-b^2}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}-\left(a+\frac{b}{x}\right)}$

よって，極限値が存在するためには，

$1-a^2=0$ かつ $2-ab=0$

ここで，$a\geqq 0$ のとき，与式は正の無限大に発散するから，$a<0$ でなければならない。

よって，$a=-1$，$b=-2$

このとき，

与式 $=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^2}}+1+\frac{2}{x}}=\dfrac{3}{2}$

③**5-B-4**

(5)　$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$

(6)　$\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\cos 3x-\cos x}$

(7)*　$\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$

(8)　$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2\theta)\tan\theta$

(9)*　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x-1}$

(10)　$\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin \pi x)}{x}$

**解答**　(5)　$-2$　(6)　$-\dfrac{1}{4}$　(7)　$-\pi$　(8)　2　(9)　1　(10)　$\pi$

(5)　与式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x-2\sin x\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\cos x}{1-2\cos x}$

(6)　与式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{-2\sin 2x\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}\right)$

(7)　$x-1=t$ とおくと，

与式 $=\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin(\pi+\pi t)}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{-\sin \pi t}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\left\{-\left(\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right)\cdot\pi\right\}$

(8)　$\dfrac{\pi}{2}-\theta=t$ とおくと，

与式 $=\lim_{t\to 0}\left\{2t\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\right\}=\lim_{t\to 0}\dfrac{2t}{\tan t}$

$=\lim_{t\to 0}\left(2\cdot\dfrac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right)$

(9)　$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと $x=\dfrac{1}{\theta}$ で，

$x\to\infty$ のとき $\theta\to 0$

与式 $=\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2\sin\theta}{\frac{1}{\theta}-1}=\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta(1-\theta)}$

$=\lim_{\theta\to 0}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{1}{1-\theta}\right)$

(10)　与式 $=\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{\tan(\sin \pi x)}{\sin \pi x}\cdot\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}\cdot\pi\right\}$

注　$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}\right)=1$

この式は公式としてよい。

③**5-B-5**

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{n^2+n}]-\sqrt{n}}{n}$ を求めよ。($[n]$は，$n$ を超えない最大の整数を表す。)

**解答**　**1**

(2) $\sqrt{n^2+n}-1<[\sqrt{n^2+n}]\leqq\sqrt{n^2+n}$ より，

$$\frac{\sqrt{n^2+n}-1-\sqrt{n}}{n}<\frac{[\sqrt{n^2+n}]-\sqrt{n}}{n}\leqq\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-1-\sqrt{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{n^2+n}]-\sqrt{n}}{n}=1$

③**5-B-6**

$a>0$，$b>0$ とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$ を求めよ。

**解答**　**$a\geqq b$ のとき $a$，$a<b$ のとき $b$**

解き方　$a\geqq b$ のとき

$$与式=\lim_{n\to\infty}a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=a$$

$a<b$ のとき　$\displaystyle 与式=\lim_{n\to\infty}b\sqrt[n]{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}=b$

③**5-B-7**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x^2}$　(3)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

(4)* $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-e^{x-1}}{x-1}$　(5)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\log(1+x)}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$

($a>0$，$a\neq1$)

**解答**　(1)　**1**　(2)　**1**　(3)　**2**　(4)　**2**　(5)　**2**　(6)　**$\log a$**

解き方　(1)　分母・分子を $x$ で割ると

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)$

$u=x\sin x$ とおくと，$x\to 0$ のとき $u\to 0$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}=\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-1}{x^2}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$

$=1+1=2$

(4) $h=x-1$ とおくと，$x\to 1$ のとき $h\to 0$ より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-e^{x-1}}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^3-e^h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(h^2+3h+3-\frac{e^h-1}{h}\right)=3-1=2$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\log(1+x)}$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\frac{\log(1+x)}{x}}=2$$

(6) $f(x)=a^x$ とおくと，$f(0)=1$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

ここで $f'(x)=a^x\log a$ より $f'(0)=\log a$

③**5-B-8**

次の無限級数が収束するための $a$ の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

(1) $a(3a-2)+a(3a-2)^3+a(3a-2)^5+\cdots\cdots$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n$

**解答** (1) $\boldsymbol{a=0,\ \frac{1}{3}<a<1}$ **のとき収束し，和は** $\boldsymbol{-\dfrac{a(3a-2)}{3(a-1)(3a-1)}}$

(2) $\boldsymbol{a>0}$ **のとき収束し，和は** $\boldsymbol{\dfrac{1-a}{2a}}$

**解き方** (1) 収束条件は，

$a(3a-2)=0$ または $(3a-2)^2<1$

よって，$a=0$ または $\frac{1}{3}<a<1$

$\frac{1}{3}<a<1$ のとき，和は，

$$\frac{a(3a-2)}{1-(3a-2)^2}=-\frac{a(3a-2)}{3(a-1)(3a-1)}$$

これは，$a=0$ のときの和 0 も含む。

(2) 初項 $\frac{1-a}{1+a}$，公比 $\frac{1-a}{1+a}$ の無限等比級数であるから，その収束条件は，

$\left|\frac{1-a}{1+a}\right|<1$　すなわち，$(1-a)^2<(1+a)^2$

よって，$a>0$　そのときの和は，

$$\frac{\frac{1-a}{1+a}}{1-\frac{1-a}{1+a}}=\frac{1-a}{(1+a)-(1-a)}=\frac{1-a}{2a}$$

## C 問題

③**5-C-1**

関数 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-x-2}$ が $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=0$ を満たすとき，定数 $a$，$b$，$c$，$d$ の値を求めよ。　●神戸商船大●

**解答** (1) $\boldsymbol{a=0,\ b=1,\ c=-4,\ d=4}$

解き方 (1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{ax+b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=1$

よって，$a=0$，$b=1$

次に，$x\to 2$ のとき，分母$\to 0$ であるから，

$\lim_{x\to 2} f(x)=0$ を満たすための必要条件は，

$$\lim_{x\to 2}(ax^3+bx^2+cx+d)=\lim_{x\to 2}(x^2+cx+d)=0$$

よって，$d=-2c-4$

このとき，

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+cx-2c-4}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)+c(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2+c}{x+1}=\frac{c+4}{3}=0$$

よって，$c=-4$，$d=4$

得られた $a$，$b$，$c$，$d$ は題意を満たすから，十分条件でもある。

③**5-C-2**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\lim_{x\to\infty} x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2}x)$　　(2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-1})x^2$

**解答** (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$　(2) $\dfrac{2}{3}$

解き方 (1) 与式

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(x^4+1-x^4)}{(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}+\sqrt{2}x)(\sqrt{x^4+1}+x^2)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

(2) 与式

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{(x^3+1)-(x^3-1)\}x^2}{(\sqrt[3]{x^3+1})^2+\sqrt[3]{x^3+1}\sqrt[3]{x^3-1}+(\sqrt[3]{x^3-1})^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\right)^2}$$
$$=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

③**5-C-3**

関数 $f(x)$ は，$(x^2+x-2)f(x)=ax^3+bx^2+c+d\sin(x^2-1)$ を満たす。

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$ であるとき，$a$，$b$ を求めよ。

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$，$\lim_{x\to 1} f(x)=8$ であるとき，$c$，$d$ を求めよ。●北見工業大●

**解答** (1) $\boldsymbol{a=0}$，$\boldsymbol{b=3}$　(2) $\boldsymbol{c=-3}$，$\boldsymbol{d=9}$

**解き方** (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b+\frac{c}{x^2}+d\cdot\frac{\sin(x^2-1)}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=3$$

ここで，$-1\leqq\sin(x^2-1)\leqq1$ で，

また，$x\to\infty$ より，$x>0$ と考えてよいから，$-\dfrac{1}{x^2}\leqq\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2}\leqq\dfrac{1}{x^2}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ であるから，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2}=0$$

これと与式から，$a=0$，$b=3$

(2) $x\neq-2$，1 のとき，

$$f(x)=\frac{3x^2+c+d\sin(x^2-1)}{x^2+x-2}$$

$x\to1$ のとき，分母 $\to0$ であるから，

$\displaystyle\lim_{x\to1} f(x)=8$ であるためには，

$$\lim_{x\to1}\{3x^2+c+d\sin(x^2-1)\}=0$$

よって，$c=-3$ であることが必要である。

このとき，

$$f(x)=\frac{3(x+1)}{x+2}+\frac{d(x+1)}{x+2}\cdot\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}$$

であるから，$\displaystyle\lim_{x\to1} f(x)=8$ より，

$$2+\frac{2}{3}d=8\qquad d=9$$

③**5-C-4**

次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$　●岩手大●　(2)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x+\sin x}$　●茨城大●

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$　●日本大●　(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$　●東海大●

**解答** (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{3}{2}$　(3) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(4) $-\dfrac{\pi}{2}$

**解き方** (1) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{x+\sin x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{1+\frac{\sin x}{x}}\right)$$

(3) 与式$\displaystyle=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{2}}{x}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$

$$=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{-\left|\frac{x}{2}\right|}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to-0}\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right|$$

**注** $x<0$ より，$x=-|x|$

(4) $x-1=t$ とおくと，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

であるから，

$$\text{与式}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim_{t\to0}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\frac{\pi}{2}t}$$

③**5-C-5**

$x>0$ のとき $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つ。これを用いて，次の極限値を求めよ。

(1)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x$

**解答**　(1) **0**　(2) **0**　(3) **0**

解き方　(1) $x>0$ のとき，$e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ であるから

$$0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$$

よって，$\displaystyle 0\leqq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\leqq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2}}=0$ であるから，

はさみ打ちの原理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$

(2) $\log x=t$ すなわち $x=e^t$ とおくと，

(1)より，与式$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$

(3) $x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$x\to+0$ のとき，

$t\to\infty$ であるから，(2)から，

与式$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}=-\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$

③**5-C-6**

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)$

(2)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^{2n}$

(3)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3x-1)\sin\{\log(x-2)-\log x\}$　　●北里大●

**解答**　(1) $\boldsymbol{\log x}$　(2) $\boldsymbol{e}$　(3) $\boldsymbol{-6}$

解き方　(1)　$\sqrt[n]{x}-1=h$ とすると

$x=(1+h)^n$ より

$\log x=n\log(1+h)$ から $n=\dfrac{\log x}{\log(1+h)}$

ここで $n\to\infty$ のとき $h\to 0$ より

$$与式=\lim_{n\to\infty} nh=\lim_{h\to 0}\frac{\log x}{\log(1+h)}\cdot h$$

$$=\log x\lim_{h\to 0}\frac{h}{\log(1+h)}$$

$$=\log x\lim_{h\to 0}\frac{1}{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}}$$

$$=\log x$$

(2)　与式

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\times\cdots\cdots\times\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right\}^{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right\}^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$$

(3)　与式

$$=\lim_{x\to\infty}(3x-1)\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}}{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}(3x-1)\log\left(1-\frac{2}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}}{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}(3x-1)\left(-\frac{2}{x}\right)\log\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}}{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}\log\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\left(-6+\frac{2}{x}\right)$$

ここで $x\to\infty$ のとき $\log\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\to 0$ より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left\{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)\right\}}{\log\left(1-\frac{2}{x}\right)}=1$$

また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}=e$ より

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}=1$$

これらより，与式$=-6$