週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**解答解説**

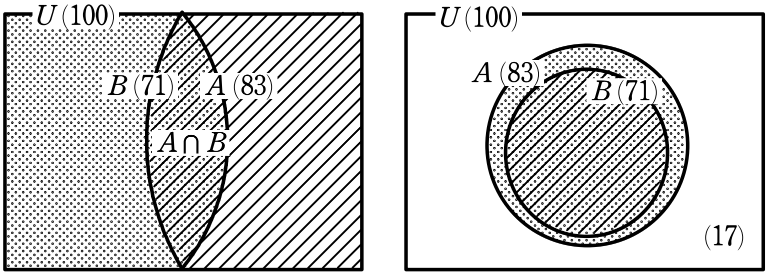
1 全体集合 U の要素の個数を 100 とし，その部分集合 A，B の要素の個数をそれぞれ 83，71 とする。このとき，A と B の両方に属する要素の個数は最も少なくて $^{ア}\boxed{}$ 個。A に属するが B に属さない要素の個数は最も少なくて $^{イ}\boxed{}$ 個，最も多くて $^{ウ}\boxed{}$ 個。また，A に属するが B に属さない要素の個数が $^{エ}\boxed{}$ 個のときは，B に属するが A に属さない要素の個数は 7 個。

解答　（ア）　54　　（イ）　12　　（ウ）　29　　（エ）　19

$n(A\cap B)$ は $A\cup B=U$ のとき最小，$B\subset A$ のとき最大となる。

その最小値は　$n(A)+n(B)-n(U)=83+71-100={}^{ア}54$

　最大値は　$n(B)=71$



$A\cup B=U$　　　　$B\subset A$

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$ ……①　であるから，$n(A\cap\overline{B})$ は $n(A\cap B)$ が最大のとき最小，$n(A\cap B)$ が最小のとき最大となる。

よって，$n(A\cap\overline{B})$ の最小値は $83-71={}^{イ}12$，最大値は $83-54={}^{ウ}29$ である。

また　　$n(A\cap B)=n(B)-n(\overline{A}\cap B)$

これを ① に代入して

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-\{n(B)-n(\overline{A}\cap B)\}=n(A)-n(B)+n(\overline{A}\cap B)$$

したがって，$n(\overline{A}\cap B)=7$ のとき　　$n(A\cap\overline{B})=83-71+7={}^{エ}19$

2 C，O，M，P，U，T，E の 7 文字を全部使ってできる文字列を，アルファベット順の辞書式に並べる。

(1)　COMPUTE は何番目にあるか。

(2)　200 番目の文字列は何か。

解答　(1)　276 番目　　(2)　CMTOEUP

(1)　CE△△△△△ の形の文字列は　　${}_5\mathrm{P}_5=5!=120$ (個)

　CM△△△△△ の形の文字列は　　120 個

　COE△△△△ の形の文字列は　　${}_4\mathrm{P}_4=4!=24$ (個)

　COME△△△ の形の文字列は　　${}_3\mathrm{P}_3=3!=6$ (個)

その後は，COMPETU，COMPEUT，COMPTEU，COMPTUE，COMPUET，COMPUTE の順に続く。

よって，COMPUTE は　　$120+120+24+6+6=276$ (番目)

(2)　CE△△△△△，CM△△△△△ の形の文字列は，それぞれ 120 個ずつあるから，
200 番目の文字列は CM△△△△△ の形の文字列の 80 番目である。
CME△△△△，CMO△△△△，CMP△△△△，CMT△△△△ の形の文字列は，
それぞれ 24 個ずつあるから，200 番目の文字列は CMT△△△△ の形の文字列の
８番目である。
CMTE△△△ の形の文字列は 6 個ある。
その後は，CMTOEPU，CMTOEUP の順に続く。
よって，200 番目の文字列は　　CMTOEUP

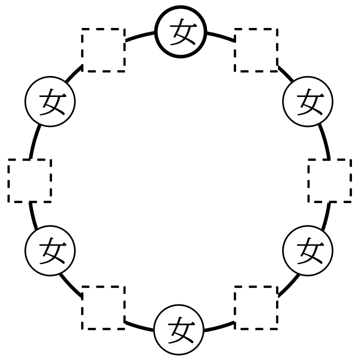
3　女子 6 人，男子 3 人が次のように並ぶ方法はそれぞれ何通りあるか。
(1)　男子 3 人が続いて並ぶように，この 9 人が 1 列に並ぶ。
(2)　両端が男子になるように，この 9 人が 1 列に並ぶ。
(3)　男子がどの 2 人も隣り合わないように，この 9 人が円形に並ぶ。

解答　(1)　30240 通り　　(2)　30240 通り　　(3)　14400 通り

(1)　男子 3 人をまとめて 1 組と考える。
この 1 組と女子 6 人の並び方は 7! 通りある。
そのおのおのに対して，1 組にした男子 3 人の並び方は 3! 通りある。よって，並び方の総数は　$7!\times 3!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1=5040\times 6=30240$ (通り)

(2)　両端の男子 2 人の並び方は ${}_3P_2$ 通りある。
そのおのおのに対して，残りの 7 人の並び方は 7! 通りある。よって，並び方の総数は
$${}_3P_2\times 7!=3\cdot 2\times 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=6\times 5040=30240 \text{ (通り)}$$

(3)　まず女子 6 人の中の 1 人の位置を固定して，残り 5 人を円形に並べ，女子 6 人の間の 6 か所のうちの 3 か所に男子 3 人を並べると考える。
よって，並び方の総数は
$$\begin{aligned}5!\times {}_6P_3&=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 6\cdot 5\cdot 4\\&=120\times 120\\&=14400 \text{ (通り)}\end{aligned}$$



4　9 人の子供がいる。
(1)　4 人，3 人，2 人の 3 組に分ける方法は何通りであるか。
(2)　3 人ずつ A，B，C の 3 室に入れる方法は何通りであるか。
(3)　3 人ずつの 3 組に分ける方法は何通りであるか。

解答　(1)　1260 通り　　(2)　1680 通り　　(3)　280 通り

(1)　9 人から 4 人を選ぶ方法は　${}_9C_4=126$（通り）
残りの 5 人から 3 人を選ぶ方法は　${}_5C_3=10$（通り）
したがって，求める方法の総数は　$126\times 10=1260$（通り）

(2)　9 人の中から A に入れる 3 人を選ぶ方法は　${}_9C_3=84$（通り）
残りの 6 人の中から B に入れる 3 人を選ぶ方法は　${}_6C_3=20$（通り）

したがって，求める方法の総数は　$84 \times 20 = 1680$（通り）

(3)　(2) において A，B，C の区別をなくすと，同じものが 3! 通りずつでてくるから，

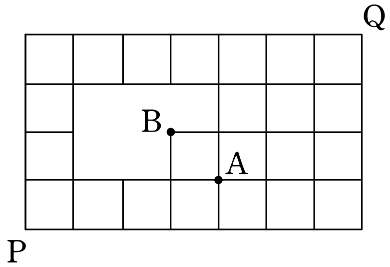
求める方法の総数は　$\dfrac{1680}{3!} = 280$（通り）

5　右の図において，P 地点から Q 地点に達する最短経路について考えよう。

(1)　P 地点から，A 地点を通り，Q 地点に達する最短経路は何通りあるか。

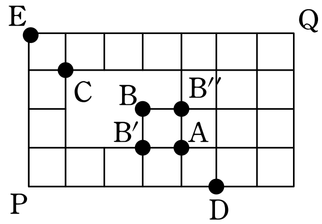
(2)　P 地点から，B 地点を通り，Q 地点に達する最短経路は何通りあるか。

(3)　P 地点から Q 地点に達する最短経路は全部で何通りあるか。



解答　(1)　100　　(2)　40　　(3)　184

右下の図のように，点 B′，B″，C，D，E を定める。



(1)　P 地点から A 地点に達する最短経路は　$\dfrac{5!}{4!1!} = 5$（通り）

A 地点から Q 地点に達する最短経路は　$\dfrac{6!}{3!3!} = 20$（通り）

よって，P 地点から，A 地点を通り，Q 地点に達する最短経路は　$5 \times 20 = 100$（通り）

(2)　P 地点から B′ 地点に達する最短経路は　$\dfrac{4!}{3!1!} = 4$（通り）

B′ 地点から B 地点，B 地点から B″ 地点に達する最短経路はそれぞれ　1 通り

B″ 地点から Q 地点に達する最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!} = 10$（通り）

よって，P 地点から，B 地点を通り，Q 地点に達する最短経路は

$4 \times 1 \times 1 \times 10 = 40$（通り）

(3)　P 地点から，C 地点を通り，Q 地点に達する最短経路は

$\dfrac{4!}{1!3!} \times \dfrac{7!}{6!1!} = 28$（通り）

P 地点から，D 地点を通り，Q 地点に達する最短経路は　$\dfrac{6!}{2!4!} = 15$（通り）

P 地点から，E 地点を通り，Q 地点に達する最短経路は　1 通り

ゆえに，P 地点から Q 地点に達する最短経路は全部で

$100 + 40 + 28 + 15 + 1 = 184$（通り）

6　10 本のバラを 3 人に分配する。次の場合，何通りの分け方があるか。

(1)　1 本ももらわない人がいてもよい　　　(2)　どの人も 1 本はもらう

解答　(1)　66 通り　　(2)　36 通り

3 人を A，B，C とする。

(1)　例えば，A に 5 本，B に 3 本，C に 2 本分配することを AAAAABBBCC と表すことにすると，バラの分け方の総数は A，B，C から重複を許して 10 個取る組合せの数

に等しい。

よって　　$_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=66$ (通り)

別解　10 本のバラと 2 つの仕切りの順列を作り，仕切りで分けられた 3 か所のバラを，左から順に A，B，C に分配すると考える。

したがって，分け方の総数は，10 個の同じものと 2 個の同じものの順列の総数に等しいから　　$_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\dfrac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=66$ (通り)

(2)　まず，3 人に 1 本ずつバラを与えておく。

残り 7 個のバラの分け方は，A，B，C から重複を許して 7 個取る組合せの数に等しい。

よって　　$_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36$ (通り)

別解　まず，3 人に 1 本ずつバラを与えておく。

次に，残りの 7 本のバラと 2 つの仕切りの順列を作り，仕切りで分けられた 3 か所のバラを，左から順に A，B，C に分配すると考える。

したがって，分け方の総数は，7 個の同じものと 2 個の同じものの順列の総数に等しいから　　$_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36$ (通り)

7　A，B，C，D，E，F，G，H の 8 文字を無作為に横 1 列に並べるとき，次の場合はそれぞれ何通りあるか。

(1)　A と B が両端にある並べ方。

(2)　A は B より左で，B は C より左にある並べ方。

解答　(1)　1440通り　　(2)　$\dfrac{1}{6}$

8 文字の並べ方は　8! 通り

(1)　両端の A と B の並べ方は　2 通り

残り 6 文字の並べ方は　6! 通り

よって，　$2\times 6!=1440$　[通り]

(2)　A，B，C を同じ文字 □ と考える。

□ 3 個と残り 5 文字の並べ方は　$\dfrac{8!}{3!}=6720$ [通り]

8　$\left(x-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{12}$ の展開式において，(1) x^3 の係数と (2) 定数項 を求めよ。

解答　(1)　$-\dfrac{55}{2}$　　(2)　$\dfrac{495}{16}$

二項定理により

$$\left(x-\frac{1}{2x^2}\right)^{12}=\sum_{r=0}^{12}{}_{12}C_r\,x^{12-r}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)^r=\sum_{r=0}^{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^r{}_{12}C_r\,x^{12-3r}$$

$12-3r=3$ とすると　　$r=3$

よって，x^3 の係数は　$\left(-\frac{1}{2}\right)^3{}_{12}\mathrm{C}_3=-\frac{1}{8}\times\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=-\frac{55}{2}$

また，$12-3r=0$ とすると　$r=4$

よって，定数項は　$\left(-\frac{1}{2}\right)^4{}_{12}\mathrm{C}_4=\frac{1}{16}\times\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{495}{16}$

9　$(2x-y+z)^8$ の展開式における $x^2y^3z^3$ の係数を求めよ。

解答　-2240

展開式の一般項は

$$\frac{8!}{p!q!r!}(2x)^p(-y)^qz^r \qquad \text{ただし}\quad p+q+r=8,\ p\geqq0,\ q\geqq0,\ r\geqq0$$

$x^2y^3z^3$ の項は $p=2$，$q=3$，$r=3$ のときであるから

$$\frac{8!}{2!3!3!}(2x)^2(-y)^3z^3=-2240x^2y^3z^3$$

したがって，求める係数は　-2240

10　n は自然数とする。次の式を簡単にせよ。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0-\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}$

(2)　${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

解答　(1)　$\left(\frac{1}{2}\right)^n$　　(2)　2^{2n-1}

(1)　二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

において，$a=1$，$b=-\frac{1}{2}$ とすると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

すなわち　$\left(\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0-\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}$

(2)　二項定理から

$$(a+b)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0a^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_1a^{2n-1}b+{}_{2n}\mathrm{C}_2a^{2n-2}b^2+{}_{2n}\mathrm{C}_3a^{2n-3}b^3$$
$$+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}ab^{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}b^{2n} \qquad \cdots\cdots①$$

① に $a=1$，$b=-1$ を代入すると

$$0={}_{2n}\mathrm{C}_0-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

① に $a=1$，$b=1$ を代入すると

$$2^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$$

この2式の和を取って 2 で割ることにより次を得る。

$${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}=2^{2n-1}$$

11 3 辺の長さが，$a-2$，a，$a+2$ である三角形について考える。この三角形が鈍角三角形であるとき，実数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$4<a<8$

(1)　$a-2<a<a+2$ であるから，三角形の成立条件により　$a+2<(a-2)+a$

よって　　$a>4$　……①

このとき，3 辺の長さはすべて正である。

また，三角形の最大角は，最大の辺に対する角である。

すなわち，鈍角となりうるのは，長さが $a+2$ の辺に対する角である。

よって，この三角形が鈍角三角形であるための条件は　　$(a-2)^2+a^2<(a+2)^2$

整理して　$a^2-8a<0$　　　すなわち　$a(a-8)<0$

よって　　$0<a<8$　……②

①，② の共通範囲を求めて　　$4<a<8$

(2)　長さ $a+2$ の辺に対する角が $150°$ であるから，余弦定理により

$$(a+2)^2=(a-2)^2+a^2-2\cdot(a-2)\cdot a\cos 150°$$

整理すると　　$a\{(\sqrt{3}+1)a-2(4+\sqrt{3})\}=0$

$a\fallingdotseq 0$ であるから　　$a=\dfrac{2(4+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(4+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=3\sqrt{3}-1$

(これは，$4<a<8$ を満たす)

また，外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$R=\frac{a+2}{2\sin 150°}=\frac{(3\sqrt{3}-1)+2}{2\cdot\frac{1}{2}}=3\sqrt{3}+1$$

12 $0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解答　(1)　$60°\leqq\theta\leqq180°$

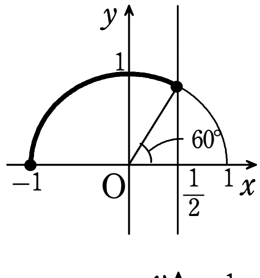
(2)　$0°\leqq\theta<30°$，$150°<\theta\leqq180°$　　(3)　$0°\leqq\theta<90°$，$150°\leqq\theta\leqq180°$

(1)　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は

$\theta=60°$

右の図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$60°\leqq\theta\leqq180°$

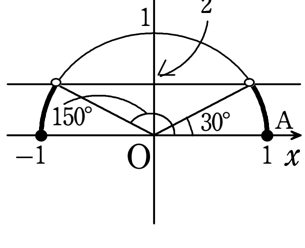


(2)　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は

$\theta=30°$，$150°$

右の図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$0°\leqq\theta<30°$，$150°<\theta\leqq180°$

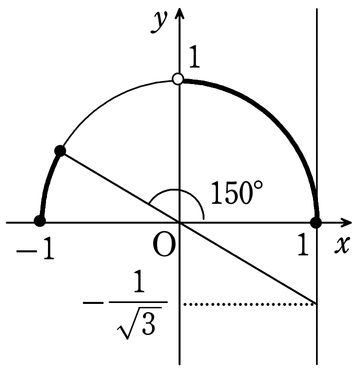


(3)　$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は

$\theta=150°$

右の図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$0°\leqq\theta<90°,\ 150°\leqq\theta\leqq180°$

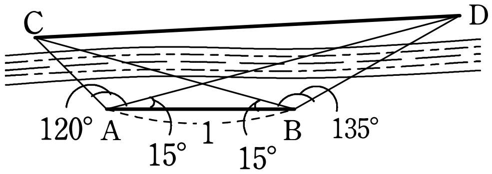


13　川の向こうにある 2 地点 C，D 間の距離を求める。川のこちら側にある 2 地点 A，B において，AB＝1，∠BAD＝15°，∠DAC＝120°，∠ABC＝15°，∠CBD＝135° であった。

(1)　∠BDA の大きさを求めよ。　　(2)　BC を求めよ。

(3)　CD を求めよ。

解答　(1)　15°　　(2)　$\sqrt{2}$　　(3)　$\sqrt{5}$



(1)　∠BDA

$=180°-(\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{ABD})$

$=180°-\angle\mathrm{BAD}-(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CBD})$

$=180°-15°-(15°+135°)=15°$

(2)　$\angle\mathrm{ACB}=180°-(\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABC})$

$=180°-(\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{DAC})-\angle\mathrm{ABC}$

$=180°-(15°+120°)-15°=30°$

よって，△ABC において，正弦定理により　$\dfrac{1}{\sin 30°}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 135°}$

したがって　$\mathrm{BC}=\dfrac{\sin 135°}{\sin 30°}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}$

(3)　(1) より，△ABD は二等辺三角形であるから　BD＝AB＝1

△BCD において，余弦定理により

$\mathrm{CD}^2=(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cos 135°$

$=2+1-2\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=5$

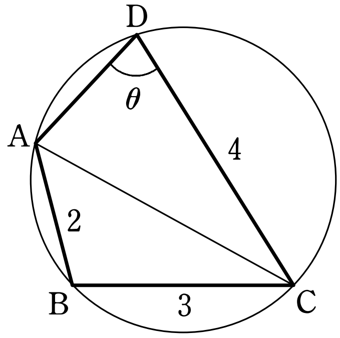
CD＞0 であるから　$\mathrm{CD}=\sqrt{5}$

14　円に内接する四角形 ABCD において，∠ADC＝θ とする。AB＝2，BC＝3，CD＝4，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ であるとき，次のものを求めよ。

(1)　対角線 AC と辺 AD の長さ　　(2)　対角線 BD の長さ

(3)　四角形 ABCD の面積 S

解答　(1)　AC＝4，AD＝2　　(2)　$\dfrac{7}{2}$　　(3)　$\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$



(1)　四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle ABC = 180° - \theta$

△ABC において，余弦定理により

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle ABC$$
$$= 2^2 + 3^2 - 2\cdot2\cdot3\cos(180° - \theta)$$
$$= 4 + 9 + 12\cos\theta = 13 + 12\cdot\frac{1}{4} = 16$$

AC＞0 であるから　　$AC = 4$

△ACD において，余弦定理により

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2CD\cdot AD\cos\angle ADC$$

よって　　$4^2 = 4^2 + AD^2 - 2\cdot4\cdot AD\cos\theta$

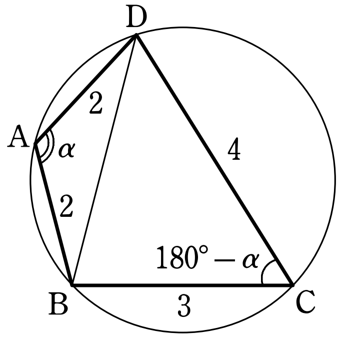
$\cos\theta = \frac{1}{4}$ を代入して整理すると

$AD^2 - 2AD = 0$　すなわち　$AD(AD - 2) = 0$

AD＞0 であるから　　$AD = 2$

別解　△ACD は AC＝CD の二等辺三角形であるから

$$AD = CD\cos\theta \times 2 = 4\cdot\frac{1}{4} \times 2 = 2$$



(2)　$\angle BAD = \alpha$ とすると　　$\angle BCD = 180° - \alpha$

△ABD において，余弦定理により

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cos\angle BAD$$
$$= 2^2 + 2^2 - 2\cdot2\cdot2\cos\alpha = 8 - 8\cos\alpha \quad \cdots\cdots ①$$

△BCD において，余弦定理により

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC\cdot CD\cos\angle BCD$$
$$= 3^2 + 4^2 - 2\cdot3\cdot4\cos(180° - \alpha)$$
$$= 25 + 24\cos\alpha \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$8 - 8\cos\alpha = 25 + 24\cos\alpha$

したがって　　$\cos\alpha = -\frac{17}{32}$　　① に代入して　$BD^2 = \frac{49}{4}$

BD＞0 であるから　　$BD = \frac{7}{2}$

別解　四角形 ABCD は円に内接するから，次のトレミーの定理が成り立つ。

$$AB\cdot CD + BC\cdot DA = AC\cdot BD$$

よって　　$2\cdot4 + 3\cdot2 = 4\cdot BD$　　　ゆえに　　$BD = \frac{7}{2}$

(3)　$\sin\theta > 0$ であるから　　$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

また　　$\sin\angle ABC = \sin(180° - \theta) = \sin\theta$

よって　　$S = △ABC + △ACD$

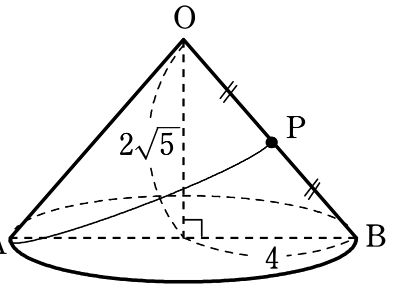
$$=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AD}\sin\theta$$

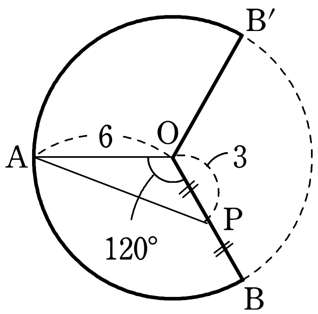
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\sin\theta=7\sin\theta=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

15 底面の半径が4，高さが $2\sqrt{5}$ の直円錐がある。この直円錐の頂点をO，底面の直径の両端をA，Bとし，線分OBの中点をPとするとき，側面上でAからPに至る最短距離を求めよ。

解答　$3\sqrt{7}$

直円錐の側面を母線OBから切り開いてできる扇形OBB′において，線分APの長さが求める最短距離である。





$\mathrm{OA}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+4^2}=6$

よって　$\mathrm{OP}=3$

扇形OBB′の中心角を x° とすると，扇形の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BB'}}$ の長さと底面の円周の長さは等しいから　$2\pi\times6\times\frac{x}{360}=2\pi\times4$

よって　$x=360\times\frac{4}{6}=240$

ゆえに　$\angle\mathrm{AOP}=240^\circ\div2=120^\circ$

△OAPに余弦定理を適用して　$\mathrm{AP}^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cos120^\circ=63$

$\mathrm{AP}>0$ であるから　$\mathrm{AP}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$

16 おみやげ問題1

$\left(x-\dfrac{x^2}{2}+y^2-2y^3\right)^{10}$ を展開して得られる x，y の多項式について，次数が 12 である項の係数の和を求めよ。

解答　$-\dfrac{35}{4}$

展開式の一般項は

$$\frac{10!}{p!q!r!s!}x^p\left(-\frac{x^2}{2}\right)^q(y^2)^r(-2y^3)^s=\frac{10!}{p!q!r!s!}(-2)^{s-q}x^{p+2q}y^{2r+3s}$$

ただし，p，q，r，s は $p+q+r+s=10$ ……① を満たす 0 以上の整数である。

一般項の次数は $p+2q+2r+3s$ であるから，次数が 12 のとき

$$p+2q+2r+3s=12 \quad \cdots\cdots ②$$

②－① から　$q+r+2s=2$

これを満たす 0 以上の整数の組 $(q,\ r,\ s)$ は

$$(q,\ r,\ s)=(2,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)$$

このとき，① から

$$(p,\ q,\ r,\ s)=(8,\ 2,\ 0,\ 0),\ (8,\ 1,\ 1,\ 0),\ (8,\ 0,\ 2,\ 0),\ (9,\ 0,\ 0,\ 1)$$

よって，求める係数の和は

$$\frac{10!}{8!2!0!0!}(-2)^{-2}+\frac{10!}{8!1!1!0!}(-2)^{-1}+\frac{10!}{8!0!2!0!}(-2)^{0}+\frac{10!}{9!0!0!1!}(-2)^{1}$$

$$=45\cdot\frac{1}{4}+90\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+45+10\cdot(-2)=-\frac{35}{4}$$

17 おみやげ問題2

多項式 $(\sqrt[3]{3}\,x+\sqrt{2})^{100}$ の展開式において，係数が整数である項の個数を求めよ.

解答　17

$(\sqrt[3]{3}\,x+\sqrt{2})^{100}$ の展開式の一般項は　${}_{100}\mathrm{C}_r(\sqrt[3]{3}\,x)^r(\sqrt{2})^{100-r}={}_{100}\mathrm{C}_r\cdot 3^{\frac{r}{3}}\cdot 2^{50-\frac{r}{2}}x^r$

よって，係数が整数であるための条件は $\dfrac{r}{3}$，$50-\dfrac{r}{2}$ がそれぞれ整数であることである.

この条件を満たすのは r が 6 の倍数のときであるから，$0\leqq r\leqq 100$ より

$r=0$，$6\cdot1$，$6\cdot2$，……，$6\cdot16$ の 17 個ある.

18 おみやげ問題3

次の式を二項定理 $(1+x)^m=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_kx^k$ (m は自然数) を用いて計算せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}}{2k+1}$

解答　(1) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$　　(2) $\dfrac{1}{n+1}$　　(3) $\dfrac{4^n}{2n+1}$

$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k x^k$ の両辺を x で積分すると

$$\frac{(1+x)^{m+1}}{m+1}=\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_m\mathrm{C}_k}{k+1}x^{k+1}+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

両辺に $x=0$ を代入して　$C=\dfrac{1}{m+1}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_m\mathrm{C}_k}{k+1}x^{k+1}=\frac{(1+x)^{m+1}-1}{m+1}$　……①

(1)　① において $m=n$，$x=1$ とすると

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

(2)　① において $m=n$，$x=-1$ とすると

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}(-1)^{k+1}=-\frac{1}{n+1}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k{}_n\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{1}{n+1}$

(3)　$\displaystyle 2\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_k}{k+1}+\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k{}_{2n}\mathrm{C}_k}{k+1}=\frac{2^{2n+1}-1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}}{2k+1}=\frac{2^{2n}}{2n+1}=\frac{4^n}{2n+1}$