週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**解答解説**

1　$\dfrac{2}{m}+\dfrac{3}{n}=1$ を満たす自然数 m，n の組 $(m,\ n)$ を求めよ。

解答　$(m,\ n)=(3,\ 9),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (8,\ 4)$

両辺に mn を掛けて整理すると　$mn-3m-2n=0$

$mn-3m-2n=(m-2)(n-3)-6$ であるから

$(m-2)(n-3)=6$　…… ①

m，n は自然数であるから　$m-2\geqq -1$，$n-3\geqq -2$

よって，① を満たす整数 $m-2$，$n-3$ の組は

$(m-2,\ n-3)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$

ゆえに　$(m,\ n)=(3,\ 9),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (8,\ 4)$

2　方程式 $3x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

解答　$x=5k+2$，$y=-3k-1$ （k は整数）

$3x+5y=1$　…… ①

$x=2$，$y=-1$ は，① の整数解の 1 つである。

よって　$3\cdot 2+5\cdot(-1)=1$　…… ②

①−② から　$3(x-2)+5(y+1)=0$

すなわち　$3(x-2)=-5(y+1)$　…… ③

3 と 5 は互いに素であるから，③ より　$x-2=5k$，$y+1=-3k$ （k は整数）

したがって，① のすべての整数解は　$x=5k+2$，$y=-3k-1$ （k は整数）

3　n は自然数とする。$\sqrt{\dfrac{240}{n}}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=15,\ 60,\ 240$

$\sqrt{\dfrac{240}{n}}$ が自然数となるには，$\dfrac{240}{n}$ が平方数となればよい。

$240=2^4\cdot 3\cdot 5$ であるから　$n=3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5,\ 2^4\cdot 3\cdot 5$

よって　$n=15,\ 60,\ 240$

4　次のものを求めよ。

(1)　13^{100} を 9 で割った余り　　(2)　83^{1234} の一の位の数

解答　(1)　4　(2)　9

(1)　$13\equiv 4 \pmod 9$ であり　$4^2\equiv 16\equiv 7 \pmod 9$，$4^3\equiv 64\equiv 1 \pmod 9$

ゆえに　$4^{100}\equiv 4\cdot(4^3)^{33}\equiv 4 \pmod 9$

よって　$13^{100}\equiv 4^{100}\equiv 4 \pmod 9$

したがって，求める余りは　4

(2)　$83\equiv 3 \pmod{10}$ であり

$3^2\equiv 9 \pmod{10}$，$3^3\equiv 27\equiv 7 \pmod{10}$，　$3^4\equiv 9^2\equiv 1 \pmod{10}$

ゆえに　$3^{1234}\equiv(3^4)^{308}\cdot 3^2\equiv 1^{308}\cdot 3^2\equiv 1\cdot 9\equiv 9 \pmod{10}$

よって　$83^{1234}\equiv 3^{1234}\equiv 9 \pmod{10}$

したがって，83^{1234} の一の位の数は　9

5　n は自然数とする。$n^2-14n+40$ が素数となるような n をすべて求めよ。

解答　$n=3,\ 11$

$n^2-14n+40=(n-4)(n-10)$

$=(4-n)(10-n)$

$n-4>n-10$，$4-n<10-n$ であるから，$n^2-14n+40$ が素数であるとき

$n-10=1$　または　$4-n=1$

$n-10=1$ より　$n=11$　　$4-n=1$ より　$n=3$

$n=11$ のとき　$n^2-14n+40=7\cdot1=7$（素数）

$n=3$ のとき　$n^2-14n+40=1\cdot7=7$（素数）

よって，$n^2-14n+40$ が素数となるような n は　$n=3,\ 11$

6　$3x^2-4xy+y^2=3$ を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (-1,\ -4),\ (-1,\ 0),\ (1,\ 4)$

$3x^2-4xy+y^2=(3x-y)(x-y)$ であるから　$(3x-y)(x-y)=3$

x，y は整数であるから，$3x-y$，$x-y$ も整数である。

よって　$(3x-y,\ x-y)=(3,\ 1),\ (1,\ 3),\ (-3,\ -1),\ (-1,\ -3)$

ゆえに　$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (-1,\ -4),\ (-1,\ 0),\ (1,\ 4)$

7　方程式 $5x^2+2xy+y^2-4x+4y+7=0$ の整数解をすべて求めよ。

解答　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

左辺を y について整理すると

$$y^2+2(x+2)y+5x^2-4x+7=0 \quad \cdots\cdots ①$$

y についての 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(x+2)^2-(5x^2-4x+7)=-4x^2+8x-3$$

$$=-(4x^2-8x+3)=-(2x-1)(2x-3)$$

① の解は整数（実数）であるから，$D\geqq0$ である。

よって　$-(2x-1)(2x-3)\geqq0$　　すなわち　$(2x-1)(2x-3)\leqq0$

ゆえに　$\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}$　　x は整数であるから　$x=1$

このとき，① は　$y^2+6y+8=0$　　すなわち　$(y+2)(y+4)=0$

よって　$y=-2,\ -4$

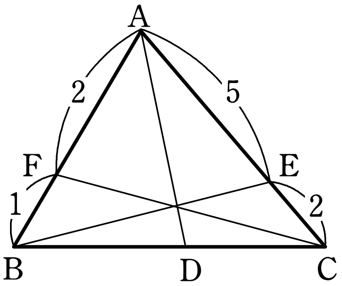
したがって　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

8 右の図において，次の比を求めよ。

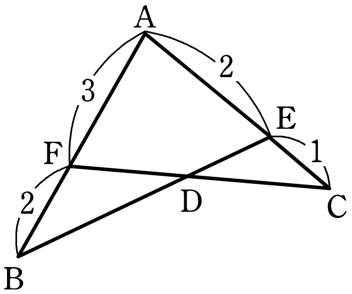
(1)　BD：DC

(2)　BD：DE

(1)



(2)



解答　(1)　5：4　　(2)　2：1

(1)　△ABC にチェバの定理を用いると　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$

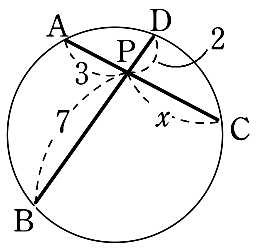
すなわち　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{1}=1$　　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\dfrac{5}{4}$ より　BD：DC＝5：4

(2)　△ABE と直線 FC にメネラウスの定理を用いると　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$

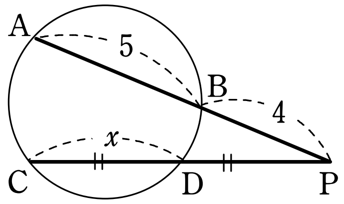
すなわち　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DE}}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}=1$　　$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DE}}=2$ より　BD：DE＝2：1

9 次の図において，x の値を求めよ。

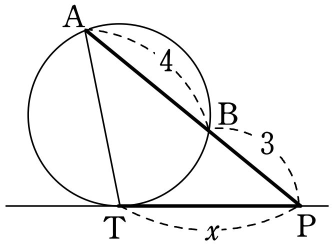
(1)



(2)　CD＝DP



(3)　PT は T における円の接線



解答　(1)　$x=\dfrac{14}{3}$　　(2)　$x=3\sqrt{2}$　　(3)　$x=\sqrt{21}$

(1)　方べきの定理により　　PA·PC＝PB·PD

よって　　$3\cdot x=7\cdot 2$　　したがって　　$x=\dfrac{14}{3}$

(2)　方べきの定理により　　PA·PB＝PC·PD

よって　　$(4+5)\cdot 4=2x\cdot x$　　したがって　　$x^2=18$

$x>0$ であるから　　$x=3\sqrt{2}$

(3)　方べきの定理により　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

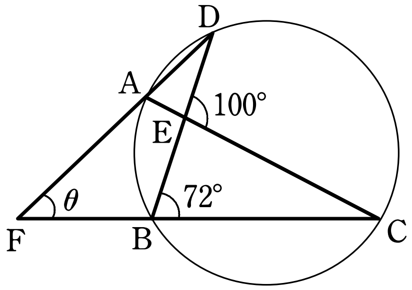
よって　　$(4+3)\cdot 3=x^2$　　したがって　　$x^2=21$

$x>0$ であるから　　$x=\sqrt{21}$

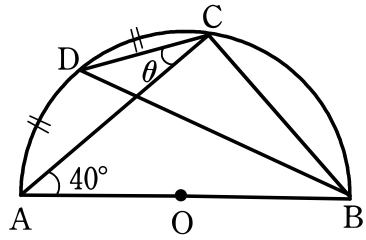
週テスト（科目：数学　講師名：山中）　**解答解説**

10 下の図において，角 θ を求めよ。ただし，(2) では，O は半円の中心であり，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$ とする。

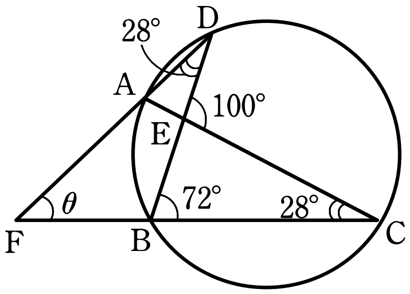
(1)



(2)



解答　(1)　$\theta=44°$　　(2)　$\theta=25°$



(1)　△EBC において

$$\angle ECB+72°=100°$$

よって　　$\angle ECB=28°$

円周角の定理により

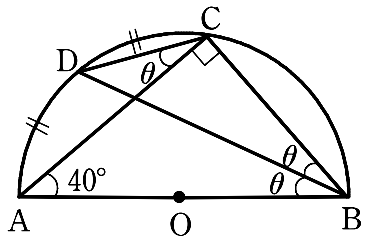
$$\angle ADB=\angle ACB=28°$$

△DFB において　　$\theta+28°=72°$

したがって　　$\theta=44°$

(2)　円周角の定理により

$$\angle ABD=\angle ACD \quad \text{すなわち} \quad \angle ABD=\theta$$



$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$ から　　$\angle ABD=\angle DBC$

よって　　$\angle DBC=\theta$

ゆえに　　$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC=2\theta$

また，AB は半円の直径であるから　　$\angle ACB=90°$

△ABC の内角の和は 180° であるから

$$40°+2\theta+90°=180° \qquad \text{よって} \qquad \theta=25°$$

11 次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$x+3y+4z=2xyz$ $(x\leqq y\leqq z)$

解答　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 5)$，$(2,\ 2,\ 2)$

(1)　$1\leqq x\leqq y\leqq z$ であるから　　$2xyz=x+3y+4z\leqq z+3z+4z=8z$

よって　　$xy\leqq 4$

この不等式を満たす自然数 x，y $(x\leqq y)$ の組は

$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$

これらの各組 $(x,\ y)$ に対して，等式 $x+3y+4z=2xyz$ を満たす z の値は次のようになる。

$(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき　　$z=-2$　　　$(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき　　解 z はない。

$(x,\ y)=(1,\ 3)$ のとき　　$z=5$　　　$(x,\ y)=(1,\ 4)$ のとき　　$z=\dfrac{13}{4}$

$(x,\ y)=(2,\ 2)$ のとき　　$z=2$

したがって　　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 5)$，$(2,\ 2,\ 2)$

12 (1)　5 進数 $334_{(5)}$ を 10 進法で表せ。また、この 10 進数を 4 進法で表せ。

(2)　2 進法の小数 $0.101_{(2)}$ を 10 進法の小数で表せ。

解答　(1)　94　　，1132　　　　(2)　0.625

(1)　5 進数 $334_{(5)}$ を 10 進法で表すと　　$334_{(5)}=3\cdot5^2+3\cdot5+4={}^{ア}94$

10 進数 94 を 4 進法で表すと，右の計算から　　$94={}^{イ}1132_{(4)}$

$$\begin{array}{r|rl} 4 & 94 & \\ 4 & 23 & \cdots 2 \\ 4 & 5 & \cdots 3 \\ 4 & 1 & \cdots 1 \\ & 0 & \cdots 1 \end{array}$$

(2)　$0.101_{(2)}=1\cdot\dfrac{1}{2}+0\cdot\dfrac{1}{2^2}+1\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}={}^{ウ}0.625$

13 3 つの正の数 a，b，c の平均値が 12，分散が 14 であるとき，$a^2+b^2+c^2$，$ab+bc+ca$ の値をそれぞれ求めよ。

解答　順に　474，411

平均値が 12 であるから　　$\dfrac{1}{3}(a+b+c)=12$

よって　　$a+b+c=36$　……①

分散が 14 であるから　　$\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-12^2=14$

よって　　$a^2+b^2+c^2=474$　……②

ここで　　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

これに ①，② を代入すると　　$36^2=474+2(ab+bc+ca)$

よって　　$ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}(36^2-474)=411$