

①6-標-1

2つの袋 A, B がある。A には赤球 3 個, 白球 2 個, B には赤球 2 個, 白玉 3 個が入っている。A から球を 1 個取り出して B に入れ, 次に B から球を 1 個取り出す。さらに A から球を 1 個取り出して B に入れ, 次に B から球を 1 個取り出す。このとき, B から取り出した球 2 個がともに赤球である確率を求めよ。

① **6-標-2**

さいころを繰り返し n 回振って、出た目の数を掛け合わせた積を X とする。すなわち、 k 回目に出た目の数を Y_k とすると、 $X = Y_1 \cdot Y_2 \cdot \cdots \cdot Y_n$ である。

- (1) X が 6 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) X が 12 で割り切れる確率を求めよ。

① **6-標-3**

1 から 10 までのカード 10 枚から 1 枚引いてカードの数字を調べ、元に戻す試行を繰り返す。 i 回目に引いたカードの数字を X_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) とし、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大値を X ，最小値を Y とする。

- (1) $X = k$ ($k = 1, 2, \dots, 10$) となる確率を求めよ。
- (2) $Y = k$ ($k = 1, 2, \dots, 10$) となる確率を求めよ。
- (3) $X = 8$ かつ $Y = 2$ となる確率を求めよ。

①6-発-1

n を 2 以上の整数とする。1 から $2n$ までの整数から無作為に異なる 3 つの数を取り出して、それらのうちの最大の数と最小の数の差を X とする。

- (1) X の値が k となる確率を求めよ。ただし、 $2 \leq k \leq 2n-1$ とする。
- (2) X の値が n 以下となる確率を求めよ。

①6-発-2

1, 2, 3 の番号をつけた 3 枚のカードが入った箱がある。箱から無作為に 1 枚のカードを取り出し、その番号を記録してもとへ戻す試行を繰り返す。このとき、もし取り出したカードの番号が前回の番号より小さいならば、そこで試行を終了する。試行を終了するまでにカードを取り出した回数を表す確率変数を X とする。

k 回目の試行で取り出したカードの番号 Y_k が 2 となり、そこで試行を終了する確率 $P(X=k, Y_k=2)$ と、 Y_k が 1 となり、そこで試行を終了する確率 $P(X=k, Y_k=1)$ をそれぞれ求めよ。ただし、 $k \geq 2$ とする。

① **6-発-3**

正六角形の頂点に 1 から 6 までの番号を順につける。また n 個のサイコロを振り、出た目を番号とするすべての頂点にしるしをつけるものとする。このとき、しるしのついた 3 点を頂点とする直角三角形が存在する確率を p_n とする。 p_n を求めよ。

①6-発-4

座標平面上で原点 $(0, 0)$ から出発した点 P が次の規則にしたがって動くものとする。すなわち、サイコロを振って奇数の目が出たら (x, y) から $(x+1, y+1)$ へ、偶数の目が出たら (x, y) から $(x+1, y-1)$ へうつるものとする。いま、サイコロを N 回振るものとし、そのときに通る点 P の座標を $(1, Y_1), (2, Y_2), \dots, (N, Y_n)$ とする。

- (1) $N=5$ とする。 $Y_n (1 \leq n \leq 5)$ のうちに正のものがちょうど 3 個ある確率を求めよ。
- (2) $N=6$ とする。 $Y_n (1 \leq n \leq 5)$ がすべて正であり、かつ $Y_6=0$ である確率を求めよ。
- (3) $N=8$ とする。 $Y_n (1 \leq n \leq 8)$ がすべて正である確率を求めよ。

① **6-発-5**

A, B, C, D, E の 5 人が 1 つのサイコロと、1 組 53 枚（ジョーカー 1 枚を含む）のトランプを使って、次のゲームを行う。トランプのカードはよくきって重ねてふせておく。まず、A がサイコロを振り、出た目が a ならば上から順に a 枚のカードを取る。その a 枚の中にジョーカーがあれば、「A の勝ち」でゲームは終了する。ジョーカーがなければ、今度は B がサイコロを振り、出た目が b ならば、残りのカードの上から順に b 枚を取る。その b 枚の中にジョーカーがあれば、「B の勝ち」でゲームは終了する。ジョーカーがなければ、今度は C がサイコロを振る。このようにしてゲームを続ける。ただし、5 人目の E がカードを取ってその中にジョーカーがなければ、「引き分け」でゲームは終了する。

- (1) A が勝つ確率を求めよ。
- (2) B が勝つ確率を求めよ。
- (3) ゲームが引き分けになる確率を求めよ。

① **6-発-6**

n 人の競技者 $A_1, A_2, \dots, A_n$ (ただし, $n \geq 3$) が次の方式で優勝を争う。最初に A_1 と A_2 が対戦し, この勝者と A_3 が対戦し, さらにこの勝者と A_4 が対戦する。以下同様にして, 最後にそれまでの勝ち残り と A_n が対戦し, この勝者を優勝とする。ただし, 引き分けはないものとする。ここで, A_1 以外の競技者間の対戦では勝敗は $\frac{1}{2}$ の確率で定まるが, A_1 は他のどの競技者に対しても勝つ確率 p ($0 < p < 1$) を持つものとする。

- (1) A_1 が優勝する確率を求めよ。
- (2) A_n が優勝する確率を求めよ。
- (3) A_n が優勝する確率を最大にする p を求めよ。

①6-発-7

校庭に，南北の方向に 1 本の白線が引いてある。ある人が，白線上の A 点から西へ 5m の点に立ち，銅貨を投げて，表が出たときは東へ 1m 進み，裏が出たときは北へ 1m 進む。白線に達するまで，これ続ける。

A 点から nm 北の点に達する確率を p_n とするとき， p_n を最大にする n を求めよ。

	第 1 回目の ゲーム	甲が勝った 次のゲーム	乙が勝った 次のゲーム
甲の勝つ 確率	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
乙の勝つ 確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

①6-発-8

甲、乙 2 人で、それぞれの勝つ確率が右表に示されるゲームを続けて行う。甲、乙どちらか一方が続けて 2 度ゲームに勝ったとき、試合は終了し、2 度続けて勝ったものが試合の勝者となる。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 3 回以内のゲーム数で甲が勝者となる確率を求めよ。
- (2) 甲が勝者となる確率を求めよ。

① 6-発-9

n 人 ($n \geq 2$) で 1 回だけジャンケンをする。勝者の数を X として、次の各問いに答えよ。

- (1) k を $1 \leq k \leq n$ である整数とすると、 $k \cdot {}_n C_k = n \cdot {}_{n-1} C_{k-1}$ を示せ。
- (2) $X = k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) である確率を求めよ。
- (3) $X = 0$, すなわち勝負が決まらない確率を求めよ。
- (4) ※範囲外 X の期待値を求めよ。

タテC9-7

n を 2 以上の自然数とする。 n 個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも 1 個は 1 の目が出る確率
- (2) 出る目の最小値が 2 である確率
- (3) 出る目の最小値が 2 かつ最大値が 5 である確率

① **1-標-1**

次の分数式が既約分数式でないような定数 a の値を求め、そのときの分数式を約分せよ。

$$\frac{x^3 - ax^2 + 12x - a - 3}{x^3 - (a+1)x^2 + 16x - a - 6}$$

① **1-標-2**

x, y, z は互いに異なる 3 つの実数で, $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$ が成り立つものとする。このとき, 上の等式の各辺に共通の値を求めよ。

① **1-発-3**

$(x^2 + 2x - 3)P(x) - (x^2 - x - 2)Q(x) = 1$ ……① を満たす整式 $P(x), Q(x)$ を考える。

- (1) ①を満たす 1 次式 $P(x), Q(x)$ を求めよ。
- (2) (1)を利用して①を満たす 2 次式 $P(x), Q(x)$ をすべて求めよ。

① **1-発-4**

- (1) 係数が整数である x の n 次方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

について、有理数 r が解ならば、 r は整数であり、かつ a_0 の約数であることを示せ。

- (2) 3 次方程式 $x^3 - 16x^2 - 20x + 51 = 0$ の解をすべて求めよ。

① **1-発-5**

x についての 3 次の整式 $f(x)$ があって

$$f(1)=1, \quad f(2)=4, \quad f(3)=9, \quad f(4)=34$$

であるとき, $f(5)$ を求めよ。

① **2-C-1**

p, q を互いに素な自然数とする。

- (1) すべての整数 x に対して, p 個の整数 $x - q, x - 2q, \dots, x - pq$ を p で割った余りはすべて異なることを証明せよ。
- (2) $x > pq$ を満たすすべての整数 x は, ある自然数 a, b を用いて $x = ap + bq$ と表されることを証明せよ。

①2-C-2

$a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ および $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ を満たす $2n$ 個の実数がある。集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ から要素を1つ、集合 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ から要素を1つ取り出して、掛け合わせて積を作る。どの要素も一度しか使わないこととし、この操作をくり返し、 n 個の積を作り、それら n 個の積の和を S とする。

(1) $n=2$ のとき、 S の最大値と最小値を求めよ。

(2) n が2以上のとき、 S の最大値と最小値を求めよ。 (お茶の水女子大)

① **3-標-1**

実数 t が $0 \leq t \leq 2$ を満たすとき、2 次方程式 $x^2 - 2tx + 2t^2 - 4 = 0$ の実数解 $\mathcal{X}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

① **3-標-2** $f(x) = |x^2 - 3x| - x + 2$ とする。

- (1) x の関数 $f(f(x))$ の $2 \leq x \leq 4$ における最大値および最小値を求めよ。
- (2) x の方程式 $f(f(x)) = -1$ を解け。

過去問めぐり

2018 福岡大学・医

(iii) $-1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}$ を満たす全ての x に対して $bx^2-2ax-b-4 \leq 0$ が成立する。このとき、 a と b が

満たす連立不等式によって表される領域の面積は (5) であり、この領域内において $k = \frac{b+2-\sqrt{2}}{a+3\sqrt{2}}$

がとりうる値の範囲は (6) である。

【例題 01】 阪大

一辺の長さが 1 の正四面体の内部に互いに外接する 2 つの球 P , Q がある。球 P は正四面体の 4 面全部に接し, 球 Q は正四面体の 3 面に接しているとする。

- (1) 球 P の半径 r_0 を求めよ。
- (2) 球 Q の半径 r_1 を求めよ。

【例題 02】東大

3 辺の長さが $BC = 2a$, $CA = 2b$, $AB = 2c$ であるような鋭角三角形 ABC の 3 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N とする。線分 LM, MN, NL に沿って三角形を折り曲げ、四面体をつくる。この四面体の体積を求めよ。

① 4-標-1

四角形 ABCD は円に内接し、4 辺の長さは $AB=BC=7$, $CD=5$, $DA=3$ である。

- (1) 対角線 AC, DB の長さを求めよ。
- (2) AC と DB の交点を E とするとき, $\overrightarrow{DE}$ を $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ で表せ。
- (3) $\overrightarrow{DB}$ を $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ で表せ。

①4-標-2

点 P は正方形 $ABCD$ の頂点 A から正方形の内部に向かって出発し、次の 3 つの規則に従って動くものとする。

1. P が正方形の内部にあるときは直進する。
2. P が正方形の辺上に達したのちの P の進み方は、その辺を鏡とみなして光の反射の法則に従う。
3. P が正方形の頂点に達したときはそこで止まる。

点 P が A から出発するときの方向が辺 AB となす角を θ として、次の問いに答えよ。

- (1) $\tan \theta = 0.6$ のとき、点 P は A, B, C, D のうち、どの頂点に止まるか。
- (2) P が頂点 B, C, D のそれぞれに止まるために $\tan \theta$ の値がみたすべき条件をそれぞれ説明せよ。

①4-発-3

△ABC において、 $BC=a$ ， $CA=b$ ， $AB=c$ ，面積を S ，周の長さを $2s$ とする。外接円と内接円の半径をそれぞれ R ， r とするとき，次の式が成立することを証明せよ。

$$(1) \quad S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$(2) \quad \frac{r}{R} = \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$

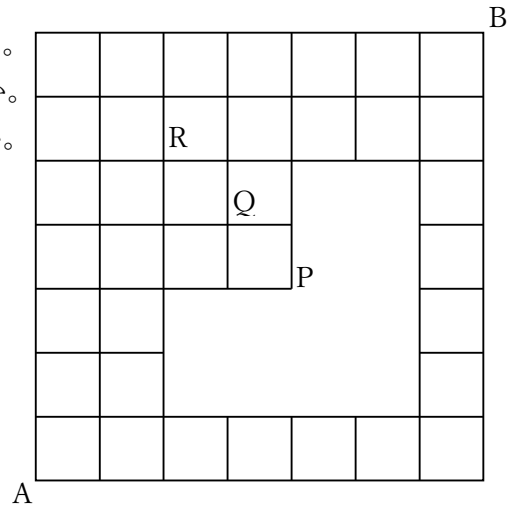
① **4-発-4**

1 辺 a cm の正方形の紙 ABCD を，B が辺 AD の上にくるように折り返すとき，折り返された部分の面積が最小になるのは，どんな折り方をした場合か。また，その場合の面積を求めよ。

⑫5-標-1

図のような道をもつ町がある。この町の西南端 A から東北端 B に至る最短路について、次の問いに答えよ。

- (1) 途中で地点 P を通るものは何通りあるか。
- (2) 途中で地点 Q を通るものは何通りあるか。
- (3) 途中で地点 R を通るものは何通りあるか。
- (4) 全部で何通りあるか。



⑫ **5-発-2**

7 個の文字 T,O,K,Y,O,T,O を 1 列に並べる並べ方について，次の問いに答えよ。

- (1) T が 2 つ隣り合い，O が 3 つ隣り合う並べ方は何通りあるか。
- (2) O は 3 つ隣り合うが，2 つの T は隣り合わない並べ方は何通りあるか。
- (3) 2 つの T は隣り合うが，3 つの O はどの 2 つも隣り合わない並べ方は何通りあるか。
- (4) 同じ文字が全く隣り合わない並べ方は何通りあるか。

過去問めぐり

【1】2011 獨協医科大学

1 から n までの通し番号がついた n 個の箱と、1 から n までの通し番号がついた n 個の球がある。 n 個の箱に 1 つずつ球を入れる方法の数は $n!$ 通りだけあるが、このうち箱の番号と球の番号とがすべて異なるような入れ方の総数を a_n とする。たとえば、 $a_1 = 0$ 、 $a_2 = 1$ である。

(1) $a_3 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $a_4 = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) a_{n+1} について考える。 $n+1$ 番の球を 1 番の箱に入れる場合は、1 番の球が $n+1$ 番の箱に入る場合と入らない場合を考えれば $a_{n-\boxed{\text{ウ}}} + a_n$ 通りだけあることがわかる。 $n+1$ 番の球が他の箱に入る場合も同様なので、 $a_{n+1} = n(a_{n-\boxed{\text{ウ}}} + a_n)$ ($n \geq \boxed{\text{エ}}$) となる。

(3) $n \geq \boxed{\text{エ}}$ のとき、 $a_n - na_{n-\boxed{\text{ウ}}} = (\boxed{\text{オカ}})^n$ である。

(4) $n \geq \boxed{\text{エ}}$ のとき、 $\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=\boxed{\text{キ}}}^n \frac{(\boxed{\text{クケ}})^k}{k!}$ である。

【2】2012 東海大学 2/2

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。 $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

$n \geq 3$ のとき, a_n を $a_n = \frac{c_n}{b_n}$ と表す。ここで, b_n, c_n は互いに素な自然数である。 $n=1$ のとき, $b_1 = 1$,

$c_1 = 0$, $n=2$ のとき, $b_2 = 1$, $c_2 = 1$ と定める。

(1) b_{n+1}, c_{n+1} を b_n, c_n で表すと $b_{n+1} = \boxed{\text{ア}}$, $c_{n+1} = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) p を定数とする。 $n \geq 2$ のとき, 数列 $\{c_n\}$ において, 漸化式 $c_{n+1} = p(c_n + c_{n-1})$ が成り立つならば,

$p = \boxed{\text{ウ}}$ である。この漸化式から $c_{n+1} - \alpha c_n = \beta(c_n - \alpha c_{n-1})$, $c_{n+1} - \beta c_n = \alpha(c_n - \beta c_{n-1})$ ($n \geq 2$)

を満たす定数 α, β が定まる。 $\alpha > \beta$ であるとき, $\alpha = \boxed{\text{エ}}$, $\beta = \boxed{\text{オ}}$ である。

(3) α, β を(2)で求めたものとする。一般項 c_n を α, β, n で表すと $c_n = \boxed{\text{カ}}$ である。また, 一般項 a_n

を α, β, n で表すと $a_n = \boxed{\text{キ}}$ である。したがって, 数列 $\{a_n\}$ は収束し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{ク}}$ である。

【3】名古屋市立大学（改変あり）

m 箇所の送信施設を持つ A 国から、 n 箇所の受信施設を持つ B 国へ信号を送る。A 国の各施設は B 国の施設の中のただ 1 箇所に必ず信号を送るものとし、その送受信はいっせいに行われる。いま $m \geq n$ とし、B 国のどの受信施設も A 国のどこかの送信施設からの信号を少なくとも 1 つは受信する場合を考える。このような送信パターンを数 $f(m, n)$ と表す。以下で m, n を変化させて考えるとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(m, 3)$ を m を用いて表せ。

(2) $f(m+1, n)$ を $f(m, n)$ および $f(m, n-1)$ を用いて表せ。ただし、 $n \geq 2$ とする。