

【例題 01】

すべての実数で定義された関数 $f(x)$ は次の 2 条件 (A), (B) を満たすものとする.

(A) すべての実数 x, y に対して $f(x+y) = f(x) + f(y) + 8xy$

(B) $f'(0) = 3$

(1) $f(0)$ の値を求めよ.

(2) $f(x)$ はすべての実数 x で微分可能であることを示し, $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を求めよ.

【例題 02】

$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ のグラフと 2 点で接する直線の方程式と, 接点の座標を求めよ.

久留米 2012

【例題 03】 $\int_0^1 |x^2 - a| dx$ は, $a = \boxed{}$ のとき最小。

② **1-標-1**

3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = \alpha$ で極大値, $x = \beta$ で極小値をとり,
 $f(\gamma) = f(\alpha)$, $\gamma \neq \alpha$ とする。

- (1) a, b を α, β で表せ
- (2) $(\gamma - \beta) : (\beta - \alpha)$ を求めよ。

② **1-標-2**

xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を C で表す。

平面上の $(a, 5)$ を通る C の法線が 3 本存在するとき、 a の値の範囲を求めよ。

② **1-標-3**

4 次関数 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ が $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{6}$ をみたし、さらに任意の 2 次関数 $g(x)$ に対してつねに $\int_{-1}^1 f(x) g(x) dx = 0$ であるとき、 a, b, c の値を求めよ。

②1-標-4

- (1) $y = 12x^3 - 12(2+k)x^2 + 24kx$ ($k > 0$) と、 x 軸とで囲まれた部分の面積の総和 S を求めよ。
- (2) (1)で求めた S の最小値を求めよ。

② **1-標-5**

$x \leq 0$ において定義された関数 $f(x) = \int_x^{x+1} |t^2 - 2t| dt$ がある。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ を最小にする x の値を求めよ。

② **1-発-1**

実数 a に対して, $f(x) = x^3 - 3ax$, $g(x) = f(f(x))$ とおく。方程式 $g(x) = 0$ が相異なる 9 個の実数解をもつような a の範囲を求めよ。

② 1-発-2

3 次関数 $h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) $h(1) = 1, h(-1) = -1$

(ii) 区間 $-1 < x < 1$ で極大値 1, 極小値 -1 をとる。

このとき, $h(x)$ を求めよ。

② 1-発-3

c を正の実数とし、 $f(x) = x^3 + 3x^2, g(x) = x^3 + 3x^2 + c$ とする。直線 l は点 $P(p, f(p))$ で曲線 $y = f(x)$ と接し、 $Q(q, g(q))$ で曲線 $y = g(x)$ と接する。

(1) c を p で表せ。

(2) 直線 l と曲線 $y = f(x)$ の P 以外の交点を R とする。2 つの線分の長さの比 $PQ : QR$ を求めよ。

過去問めぐり 北里大学

【例題 04】

定数 $a > 1$ に対し, $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - a^2)$ とおく。曲線 $y = f(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_1 , 曲線 $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq a$) と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とする。

- (1) $f(x)$ の極値を a を用いて表せ。
- (2) S_1 と S_2 を a を用いて表せ。
- (3) $11S_2 = 19S_1$ を満たす a の値がただ 1 つであることを示し, かつ a の値を求めよ。

②2-標-1

座標平面上に定点 $A(a, a)$ がある。ただし、 $a > 0$ とする。

(1) $y = 2x$ に関して点 A と対称となる点 B の座標を求めよ。

(2) $y = \frac{1}{2}x$ に関して点 A と対称となる点 C の座標を求めよ。

(3) 点 P は直線 $y = 2x$ 上に、点 Q は直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上にあり、3 点 A, P, Q は同一直線上にないとする。このとき、 $\triangle APQ$ の周の長さを最小にする点 P と Q の座標を求めよ。

② **2-標-2**

座標平面上の点 $P(x, y)$ について、 $x = \frac{2}{t^2 + 1}$, $y = \frac{(t+1)^2}{t^2 + 1}$ が成り立つとする。 t が $t \geq -1$ を満たす実数値をとって変化するとき、点 P の軌跡を求め、それを図示せよ。

② **2-標-3**

点 $P(x, y)$ が $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$ を満たして動くとき、点 $Q(x+y, x-y)$ の描く図形を図示せよ。

② **2-標-4**

x, y が実数で, $2x^2 + 3xy + 2y^2 \leq 1$ をみたすとき, $x + y + xy$ のとり得る値の範囲を求めよ。

②2-発-1

長さ l の線分が、その両端を放物線 $y = x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし、 $l \geq 1$ とする。

② **2-発-2**

放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ において、放物線 $y = x^2$ と共通接線をもち、半径が $\sqrt{1+4t^2}$ の円を考える。変数 t が正の実数全体を動くとき、この円の中心の軌跡を求め、これを図示せよ。

② **2-発-3**

x, y が 2 つの不等式 $x \leq 2y$, $y \leq -x^2 + 3x - \frac{1}{4}$ を満たすとき,

$$\frac{x^2}{2x^2 - 2xy + y^2}$$

のとり得る値の最大値, 最小値を求めよ。

② **2-発-4**

半径 r の円は、連立不等式
$$\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \geq -(x-6)^2 \end{cases}$$
 の表す平面上の領域の中を自由に動かすことができる。 r の最大値を求めよ。

② **2-発-5**

α, β が $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たして変化するとき,

$$\begin{cases} x = \sin \alpha + \sin \beta \\ y = \cos \alpha - \cos^2 \beta \end{cases}$$

で定まる点 (x, y) の存在範囲を図示せよ。

② **2-発-6**

t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、直線 $y = 3(t^2 - 1)x - 2t^3$ が通り得る範囲を求め、図示せよ。

②2-発-7

実数 x, y が $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たしながら変化するとする。

- (1) $s = x + y, t = xy$ とするとき、点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ。
- (2) 負でない定数 m をとるとき、 $xy + m(x + y)$ の最大値、最小値を m を用いて表せ。

② **3-標-1**

(1) $\sin 2x - \sin x - 2 \cos x + 1 \leq 0$ ($0 \leq x < 2\pi$) を解け

(2) 次の連立方程式を解け

$$\begin{cases} \cos 2x - 3 \sin x + 1 \leq 0 \\ \cos 2x + 3 \cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

② **3-標-1**

α, β は鋭角とする。

$$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta + 2 \cos \gamma = 0 \\ \cos \alpha + \cos \beta + 2 \sin \gamma = 0 \end{cases}$$

のとき, $\alpha = \beta$ となることを証明せよ。

② **3-標-2**

△ABC において,

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

が成り立つことを証明せよ。

② **3-標-3**

△ABC において、 $\cos A + \cos B + \cos C - 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ の値は一定値になる。この値を求めよ。

② **3-標-4**

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f(\theta) = \sqrt{2} \sin \theta + \sqrt{6} \cos \theta, \quad g(\theta) = \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{6} \sin \theta \text{ とする。}$$

(1) $f(\theta), g(\theta)$ の最大値, 最小値を求めよ。

(2) $g(\theta) = -\frac{8\sqrt{2}}{5}$ のとき, $\sin \theta$ を求めよ。

② **3-発-1**

実数 x, y が $11x^2 + 12xy + 6y^2 = 4$ を満たしながら動くとき、 $x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

②3-発-2

- (1) $x = \sin 10^\circ$ を解とする x の 3 次方程式をつくれ。ただし、 x^3 の係数は 1 とする。
- (2) (1) の 3 次方程式の残りの 2 解を $\sin \alpha$, $\sin \beta$ とする。 α , β の値を求めよ。
- ただし、 $-90^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$ とする。

② **3-発-3**

次の関係を満たす (x, y) の存在範囲を図示せよ。

$$\cos x - \cos y \cos(x+y) > 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

(j42-1) ○

$\sin \theta \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta \cos 8\theta \cos 16\theta \cos 32\theta$ は $\sin$ を使った最も簡単な式で表すと ()
となるので,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ \cos 320^\circ \cos 640^\circ$$

の値は () であることがわかる.

【例題 01】2011 杏林大学

平面上に 3 点 O, A, B があり, $|\overrightarrow{OA}|=2$, $|\overrightarrow{OB}|=3$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=2$ とする。

$|\overrightarrow{AB}|=\boxed{\text{ア}}$ である。直線 AB 上に, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}=0$ となる点 C を取ると,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \overrightarrow{OB}, \quad |\overrightarrow{OC}| = \frac{\boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

となる。

$\angle AOB$ の二等分線と線分 AB の交点を D とすると,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \overrightarrow{OB}, \quad |\overrightarrow{OD}| = \frac{\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

三角形 OAB において, $\angle AOB$ の二等分線と $\angle OAB$ の外角の二等分線の交点を E とすると,

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \overrightarrow{OD}$$

となる。

また, 点 E を中心とし, 線分 AB に接する円の半径は $\boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ である。

② **4-標-1**

(1) 平面上に△ABC と点 O があり，辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。

△ABC の内心 I の位置ベクトルを $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

(2) $\sin A \cdot \overrightarrow{IA} + \sin B \cdot \overrightarrow{IB} + \sin C \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。

② **4-標-2**

平面上に四角形 ABCD と、この四角形の外部に点 E がある。これらの点から得られるベクトルについて、関係式

$$2\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}, \quad 8\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC})$$

が成り立つとき、次の問いに答えよ。

- (1) 四角形 BCDE はどのような四角形か。
- (2) 四角形 ABCD と四角形 BCDE の面積比を求めよ。

② **4-標-3**

A, B, C は平面上の相異なる 3 点であって同一直線上にはないとする。このとき, その平面上の点 P で

$$\left| \overrightarrow{PA} \right|^2 - 3 \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + 2 \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} - 6 \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$$

という関係を満たすものの集合はどのような図形になるかを説明し, かつそれを図示せよ。

②4-発-1

鋭角三角形 ABC の外心を O, 垂心を H とするとき, 次の(1), (2)が成り立つことを証明せよ。

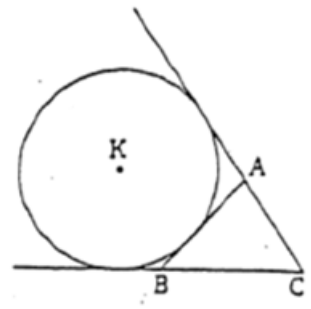
$$(1) \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$(2) \tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

②4-発-2

三角形 ABC を考える。辺 CA の A の方向への延長上および辺 CB の B の方向への延長上にそれぞれ接点をもち、さらに AB に接する円の中心を K とする。また、 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ とする。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{AK}$ を、ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ および、 a, b, c で表せ。
- (2) さらに平面上に点 O をとり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{OK}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および、 a, b, c で表せ。



②4-発-3

$\triangle ABC$ に対し,

$$\vec{p} = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}) \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}) \overrightarrow{BC}$$

とする。

- (1) $\triangle ABC$ が正三角形ならば, $\vec{p} = \vec{0}$ であることを示せ。
- (2) $\vec{p} = \vec{0}$ ならば, $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。

② **4-発-4**

平面上に三角形 ABC がある。実数 t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲で動くとき、

$$\overrightarrow{AP} + 2t \overrightarrow{BP} + (1-t) \overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし、 $\vec{0}$ は零ベクトルを表す。

②4-発-5

平面上に 3 つの定点 O, A, B が与えられ、 $OA=3, OB=2$, 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$ を満たしている。

- (1) 実数 s, t が $s \geq 0, t \geq 0, 0 \leq s+t \leq 1$ を満たしながら変わるとき、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ の終点 P が動く領域の面積を求めよ。
- (2) 点 P が(1)の領域を動き、点 Q が点 A を中心とする半径 1 の円の周および内部を動くとき、ベクトル $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ の終点 R が動く領域の面積を求めよ。

【例題 01】 2014 東京医科大学

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4 (n=1, 2, 3, \dots)$ と定める。このとき $\{a_n\}$ は収束し、 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とすれば

$$\alpha = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \text{である。}$$

さらにこれらの a_n , α を用いて、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = (\alpha - a_n)n (n=1, 2, 3, \dots)$ と定めれば $\{b_n\}$ も収束し、

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ とすれば } \beta = \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \text{である。}$$

② **5-標-1**

次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{4k+3}{k(k+1)(k+2)}$$

② **5-標-2**

1, 2, 3, ..., n から差が 2 以下である任意の異なる 2 数を取り, その積をつくる。それらの積の逆数の総和を求めよ。ただし, $n \geq 4$ とする。

② **5-標-3**

数列 $\{a_n\}$ が初項 1, 公比 2 の等比数列であるとき, 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^n k a_k$

(2) $\sum_{k=1}^n k^2 a_k$

② **5-発-1**

いくつかの連続な自然数の和が 500 であるとき，この連続な自然数を求めよ。

②5-発-2

ある会社の社員の定年退職の時期は規定の年齢に達した年の年度末である。その会社の社員が定年退職時に元利合計が Q 万円となるように、定年退職の年度を含め毎年度末に、 a 万円ずつ m 回貯金する。また、退職後は毎年度末に b 万円ずつ n 回引き出し、 n 年目の年末で預金残高がちょうどなくなるようにする。年利率 r ，1年ごとの複利計算をするものとして、次の問いに答えよ。

- (1) a を Q, r, m で表せ。
- (2) b を Q, r, m で表せ。

②5-発-3

数列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ は n 個の自然数 $1, 2, \dots, n$ を並べかえたものである。

- (1) $\sum_{k=1}^n (x_k - k)^2 + \sum_{k=1}^n (x_k - n + k - 1)^2$ を n の式で表せ。
- (2) $\sum_{k=1}^n (x_k - k)^2$ が最大となるように $x_1, x_2, \dots, x_n$ の並べ方を定めよ。

② **5-発-4**

(1) 実数 x_i, y_i を係数とする n 個の t の 2 次式 :

$$(x_i t - y_i)^2 = x_i^2 t^2 - 2x_i y_i t + y_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ を用いて,}$$

不等式 : $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 25$$

を満たすとき、 a_5 の最大値を求めよ。

② **5-標-4**

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次の条件を満たすものとする。

$$S_1=1, \quad S_{n+1}-3S_n=2^{n+1}-1 \quad (n \geq 1)$$

このとき、一般項 a_n を求めよ。

② **5-発-5**

数列 $\{a_k\}$ が $a_1 = 1, (k+2)a_k = (k-1)a_{k-1} \quad (k=2, 3, \dots)$ で定められている。

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

6-標-1

法線ベクトルが $\vec{p} = (-1, 2, 1)$ である平面鏡に, 光線がベクトル $\vec{q} = (2, -1, 2)$ の方向で入射している。反射光線の方角の単位ベクトルを求めよ。

6-標-2

O_1 を中心とする球面 S_1 と O_2 を中心とする球面 S_2 の方程式がそれぞれ次のように与えられている。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 18y + 6z + 50 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 34y - 10z + 194 = 0 \end{cases}$$

また、これらが交わってできる円を C とする。

- (1) 円 C の含む平面 α の方程式を求めよ。
- (2) 円 C の中心 O_3 の座標、および円 C の半径を求めよ。

6-発-1

四面体 $OABC$ の辺 OA , OB 上にそれぞれ点 D , E をとる。ただし点 D は点 A , O とは異なり, AE と BD の交点 F は線分 AE , BD をそれぞれ $2:1$, $3:1$ に内分している。また辺 BC を $t:1$ ($t > 0$) に内分する点 P をとり, CE と OP の交点を Q とする。

- (1) $\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, t を用いて表せ。
- (3) 直線 FQ と平面 ABC が平行になるような t の値を求めよ。

6-発-2

四面体 $OABC$ があり, $\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ$, 辺 OA, OB, OC の長さはそれぞれ $a, a, 2$ である。このとき, 点 O から三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を P とするとき, P が三角形 ABC の内部 (辺上を含む) にあるための a の条件を求めよ。

6-発-3

点 O を原点とする座標空間内に 3 点 $A(2, 1, 2)$, $B(6, 2, 2)$, $C(5, 7, 5)$ がある。

- (1) B, C から直線 OA に引いた垂線の足 H, K の座標を求めよ。
- (2) 点 P が直線 OA 上を動くとき, $BP + CP$ を最小にする P の座標を求めよ。

6-発-4

a, b, c を 0 でない実数として、座標空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ をとる。また、空間内の点 P は $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ を満たしながら動くとする。

- (1) 点 P はある点 Q を中心とする球面上にあることを示せ。
- (2) (1) の点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。
- (3) 四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。

6-発-5

xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とし、点 $A(0, 0, -1)$ を通る球面を S とする。 S の外側にある点 P に対し、 OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を α とする。点 P と点 A から平面 α へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。

このとき、

$$PQ \leq AR$$

であるような点 P の動く範囲の体積を求めよ。

6-発-6

空間における曲線 C が、媒介変数 t ($0 \leq t < 2\pi$) を用いて

$$x = \sqrt{3} \cos t + \sin t$$

$$y = \sqrt{3} \cos t - \sin t$$

$$z = 2 \sin t$$

で与えられる.

- (1) 曲線 C は原点を中心とする円であることを示せ.
- (2) 曲線 C を xy 平面へ正射影してできる図形の方程式を求めよ.

6-発-7

xyz 空間の 2 点 P, Q を $\triangle OPQ$ (O は原点) の面積が正の一定値 S となるように動かす. P, Q から xy 平面に引いた垂線をそれぞれ PP', QQ' とし, $\triangle OP'Q'$ の面積を S_1 とする. ただし, O, P', Q' が同一直線上にあるときは $S_1 = 0$ とする. 同様に P, Q から yz 平面, zx 平面に垂線を引いて作った三角形の面積を S_2, S_3 とする.

(1) $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ が成り立つことを証明せよ.

(2) $S_1 + S_2 + S_3$ の最大値, 最小値を求めよ.

② **7-標-1**

条件 $1 < x < 2^{n+1}$ および $0 < y \leq \log_2 x$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) の個数を求めよ.
ただし, n は正の整数とする.

② **7-標-2**

n を自然数とすると、

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

が成り立つことを証明せよ。

② **7-標-3**

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x$$

$$f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) - f_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる関数の列 $\{f_n(x)\}$ がある.

(1) $f_n(x)$ は n 次の整式であることを証明せよ.

(2) θ は $0 < \theta < \pi$ を満たす定数とする.

$$f_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを証明せよ.

②7-発-1

a_n, b_n は $a_n + b_n\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}^n \quad n=1, 2, 3, \dots$ を満たす整数の数列とする。

- (1) すべての n について, $a_n - b_n\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}^n$ が成り立つことを示せ。
- (2) すべての n について, $a_n^2 - 1$ が 3 の倍数であることを示せ。
- (3) $2 + \sqrt{3}^n$ は, ある正の整数 A に対して, $\sqrt{A} + \sqrt{A+1}$ の形をしていることを示せ。

② **7-発-2**

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin 3\theta = \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1) \\ \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \end{cases}$$

のように, $\sin n\theta, \cos n\theta$ $n = 2, 3, 4, \dots$ はそれぞれ適当な多項式 $P_n x, Q_n x$ を用いて,

$$\begin{cases} \sin n\theta = \sin \theta \cdot P_n \cos \theta \\ \cos n\theta = Q_n \cos \theta \end{cases}$$

と表せることを証明せよ。

② **7-発-3**

1つの円に n 本の弦を、どの2本も円の内部で交わり、どの3本も1点で交わらないように引き、円の内部をいくつかの領域に分割する。このとき、多角形になる領域の個数と、多角形にならない領域の個数を求めよ。

②7-発-4

n 項 $n \geq 2$ からなる数列 a_n は各項が 0 または 1 であって、連続するどの 3 項の中にも 0 も 1 も少なくとも 1 個は現れるとする。この数列のうち、最後の 2 つの数字が同じである数列の個数を x_n ，最後の 2 つの数字が異なる数列の個数を y_n とする。

- (1) x_{n+1} と y_{n+1} を x_n と y_n で表せ。
- (2) $x_n + ry_n$ が公比 r の等比数列となるような r の値を全て求めよ。
- (3) 数列 a_n の個数 $S_n = x_n + y_n$ を求めよ。

② **7-発-5**

二辺の長さが 1 と 2 の長方形のタイルがある。縦 2, 横 n の長方形の部屋をこのタイルで過不足なく敷き詰めるときの並べ方の総数を求めよ。

② **7-発-6**

整数からなる数列 a_n を漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

で定める。

- (1) a_n が偶数となる n を決定せよ。
- (2) a_n が 10 の倍数となる n を決定せよ。

② **7-発-7**

x の整式 $f_n(x) \quad n=1, 2, 3, \dots$ を $f_1(x) = 3x^2, f_{n+1}(x) = x^2 + x + \frac{1}{3} \int_0^1 f_n(x) dx$ で定める。このとき、 $f_n(x)$ を求めよ。

②7-発-8

整式の列 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ が, 関係 $f_1(x) = x^2 + x - 2$,
 $x^2 f_{n+1}(x) = 2x^3 + x^4 + \int_0^x t f_n(t) dt \quad n=1, 2, 3, \dots$ で定義されている。

- (1) $f_n(x)$ の次数を求めよ。
- (2) $f_n(x)$ を求めよ。

② 7-SP-3 (s32-2)

右の表のように奇数が並んでいる. 上から m 行, 左から n 列にある数を $a_{m, n}$ と表す. 例えば $a_{2, 3} = 15$ である.

(1) $a_{1, n}$ を n を用いて表せ.

(2) 右の表の $a_{1, n}$ と $a_{n, 1}$ を結ぶ直線上にあるすべての数の集合を第 n 群と呼ぶ. 例えば第 3 群は $\{7, 9, 11\}$ である. このとき, 第 n 群に含まれるすべての数の和を n を用いて表せ.

(3) 251 は (2) で定めた第何群にあるか. また, $a_{m, n} = 251$ とするとき, m と n を求めよ.

1	3	7	13	21
5	9	15	23	...
11	17	25	...	...
19	27	...	...	...
29	...	...	...	...

②7-SP-12

三つの文字 a, b, c を用いた文字列で、次の (i) と (ii) を満たすものを考える。

(i) 最初の文字は a である。

(ii) 同じ文字が二つ以上続くことはない。すなわち、文字列の中に aa, bb, cc は現れない。

含まれる文字の個数をその文字列の長さによぶ。たとえば、 $abcba$ は (i) と (ii) を満たす文字列であり、その長さは 5 である。

n は自然数とする。最後の文字が a である長さ n の文字列の個数を a_n とし、最後の文字が b である長さ n の文字列の個数を b_n とし、最後の文字が c である長さ n の文字列の個数を c_n とする。

長さ 1 の文字列は a のみであり、長さ 2 の文字列は ab, ac のみであるので、 $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 1, c_2 = 1$ である。同様にして $a_3 = \boxed{\text{ア}}$, $b_3 = \boxed{\text{イ}}$, $c_3 = \boxed{\text{ウ}}$ であり、 $a_4 = \boxed{\text{エ}}$ である。

$n = 1, 2, 3, \dots$ について

$$a_{n+1} = \boxed{\text{オ}}$$

が成り立つ。ただし、 $\boxed{\text{オ}}$ については、当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| ① $a_n + b_n$ | ② $a_n - b_n$ | ③ $b_n + c_n$ |
| ④ $b_n - c_n$ | ⑤ $c_n + a_n$ | ⑥ $c_n - a_n$ |

同様に、 b_{n+1}, c_{n+1} も a_n, b_n, c_n を用いて表すことができる。

$$b_n - c_n = \boxed{\text{カ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ であり、したがって、} b_n = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} a_{n+1} \text{ である。}$$

$d_n = a_n + b_n + c_n$ とおくと

$$d_1 = \boxed{\text{ケ}}, d_{n+1} = \boxed{\text{コ}} d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つから、 $d_n = \boxed{\text{ク}}^{n-1} \boxed{\text{サ}}$ である。また、 $r = \boxed{\text{シス}}$ のとき

$$a_{n+1} = r a_n + d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つので、 $A_n = r^{-n} a_n$ とおくと

$$A_{n+1} = A_n + r^{-n-1} d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。これらより、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = \frac{1}{\boxed{\text{セ}}} \boxed{\text{ソ}}^{n-1} + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} r^{n-1}$$

である。

【例題 01】（久留米 2002） 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2 x + y = 5 \\ x - 2^y = 6\sqrt{2} \end{cases}$$

を解くと、 $x = \boxed{\text{①}}$ 、 $y = \boxed{\text{②}}$ となる。

【例題 02】（2012 昭和）

$x > 0$ 、 $x \neq 1$ のとき、 $1 + \frac{1}{\log_2 x} - \frac{3}{\log_3 x} < 0$ を満たす x の範囲を求めよ。

【例題 03】(2013 昭和)

不等式 $9a > b$, $\log_a b > \log_b a^4 + 3$ をすべて満たす整数 a, b の値を求めよ。

② **8-標-1**

$\log_{10} 5 = a$, $\log_2 6 = b$ とするとき, $\log_4 0.12$ の値を a, b を用いて表せ。

② **8-標-2**

次の不等式を解け。ただし, $a > 0$, $a \neq 0$ とする。

$$\log_a (x+a) - \log_{a^2} (5x-a) < \frac{1}{2}$$

②8-標-3

不等式 $\log_x y + 2\log_y x \leq 3$ を満たす点 x, y が存在する範囲を図示せよ。

② **8-発-1**

次の数の大小関係を調べよ。

$$\frac{2}{3}, \log_5 3, \log_{\sqrt{3}} 2, \frac{1}{\log_7 27}, \log_{\frac{1}{2}} 6$$