

1-標-1

異なる複素数 α, β, γ が $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma = 0$ をみたすとき、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値を求めよ。
 また、複素数平面上で、3点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする ABC はどのような三角形か。

1-標-2

- (1) 複素数平面上の 3 点 α, β, γ が同一直線上にあるための必要十分条件は $\frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}$ が実数であることを示せ。
- (2) 3 個の複素数 $-1, iz, z^2$ が同一直線上にあるための条件を求めよ。

1-標-3

2つの複素数 z と w の間に、 $w = \frac{z+i}{z+1}$ （ただし、 $z+1 \neq 0$ ）なる関係がある。

- (1) z が複素数平面上の虚軸上を動くとき、 w の軌跡を求めよ。
- (2) z が複素数平面上の原点を中心とする半径1の円周上を動くとき、 w の軌跡を求めよ。

1-標-4

複素数 z, w の間に $zw = 1$ という関係があるとする。複素数 z, w を $z = x + yi$ (x, y は実数), $w = u + vi$ (u, v は実数) と表したとき

- (1) x, y を u, v を用いて表せ。
- (2) 複素数 z が、複素数平面上の点 $z_1 = 1$ と点 $z_2 = i$ を結ぶ線分上を動くとき、複素数 w はどのような図形を描くかを、複素数平面上に図示せよ。

1-補-1

xy 平面上に3点 $A(-2a, 0)$, $B(2b, 0)$, $C(0, 2c)$ がある(ただし a, b, c は正の実数)。線分 AB を斜辺とする直角二等辺三角形を三角形 ABC の外部にとり, その直角の頂点を D とする。同様に線分 BC , CA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形を三角形 ABC の外部にとり, その直角の頂点をそれぞれ E, F とする。以下の問に答えよ。

- (1) 点 D, E, F それぞれの座標を a, b, c を用いて表せ。
- (2) 直線 CD と直線 EF が直交することを示せ。
- (3) 線分 CD と線分 EF の長さが等しいことを示せ。

1-補-2

複素数平面上の点 $P_n(z_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が関係式

$$z_{n+1} = 7 + i + iz_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって与えられている。

$z_{n+1} = 7 + i + iz_n$ を変形すると

$$z_{n+1} - \boxed{\text{㊦}} = i(z_n - \boxed{\text{㊦}})$$

となるから、点 $P_n(z_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) のうち異なるものは有限個であり、その個数を m とすると、

$$() \quad z_1 = \boxed{\text{㊦}} \text{ のとき } m = \boxed{\text{㊧}}$$

$$() \quad z_1 \neq \boxed{\text{㊦}} \text{ のとき } m = \boxed{\text{㊧}}$$

であることがわかる。

() のとき、異なる $\boxed{\text{㊧}}$ 個の点は同一円周上にある。その円の半径が 2 であるとき、 $|z_1|$ が最大となるような z_1 は $z_1 = \boxed{\text{㊨}}$ である。

1-発-1

α, β, γ を $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ をみたす複素数とし, $z = \alpha + \beta + \gamma$, $b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $c = \alpha\beta\gamma$ とする。

- (1) $c\bar{c} = 1$ を示せ。
- (2) $b = c\bar{z}$ を示せ。
- (3) $|z - c| = |b - 1|$ を示せ。
- (4) $w = \frac{z - c}{b - 1}$ ($b \neq 1$) とおく。 $z - w = 4i$ が成り立つときの α, β, γ および, w を求めよ。

1-発-2

0 でない 3 つの複素数 α, β, γ が 2 つの等式 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ をみたしている。

$\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $|\omega| = |1 + \omega| = 1$ を示せ。
- (2) $\omega = c + di$ のとき, c, d を求めよ。ただし, c, d は実数とする。
- (3) $\omega^3 = 1$ を示せ。
- (4) $\alpha = \beta^5 - \beta$ のとき, α を求めよ。

1-発-3

複素数 β を -1 の 5 乗根とするととき,

(1) $S_1 = \sum_{n=1}^5 (-\beta)^{n-1}$ の値を求めよ。

(2) $S_2 = \sum_{n=1}^{11} (-\beta)^{n-1}$ の値を求めよ。

(3) $\beta \neq -1$ のとき, $\sum_{n=1}^5 n(-\beta)^{n-1} = \frac{a}{\beta+b}$ となる 2 つの実数 a と b を求めよ。

(4) β の互いに異なる値を $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ とおくととき, $P_1 = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5$ $P_1 = \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5$ と $P_2 = (\beta_1 - 2)(\beta_2 - 2)(\beta_3 - 2)(\beta_4 - 2)(\beta_5 - 2)$ の値を求めよ。

1-発-4

複素数 $z = \cos \frac{360^\circ}{7} + i \sin \frac{360^\circ}{7}$ に対して, $t = \frac{z^2 + 1}{z}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) t は実数であることを示せ。
- (2) t が方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解となるような整数 a, b, c を 1 組求めよ。
- (3) $\frac{6}{5} < t < \frac{5}{4}$ を示せ。

1-発-5

複素数平面上に原点を重心とする正三角形があり，この正三角形の1つの頂点を $\alpha = 1 + i$ とする。

- (1) 他の2つの頂点 β および γ を求めよ。
- (2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ と $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ の値を求めよ。
- (3) $\sum_{k=1}^{12} (\alpha^k + \beta^k + \gamma^k)$ の値を求めよ。

1-発-6

複素数平面において、三角形の頂点 O, A, B を表す複素数をそれぞれ $0, \alpha, \beta$ とするとき、

- (1) 線分 OA の垂直二等分線上の点を表す複素数 z は $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\alpha} = 0$ を満たすことを示せ。
- (2) OAB の外心を表す複素数を $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ を用いて表せ。
- (3) OAB の外心を表す複素数が $\alpha + \beta$ となるときの $\frac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ。

1-発-7

複素数 α, β が, $|\alpha - 2\beta| = 2$, $|2\alpha - 3\beta| = \sqrt{13}$, $|\alpha| = 4$ をみたしている。

- (1) $|\beta|$ を求めよ。
- (2) $\frac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。
- (3) O を原点とする複素数平面上において, O と異なる 2 点 A, B を表す複素数をそれぞれ α, β とする。
 - (ア) OAB において, $\angle BOA = \theta$ とする。このとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。
 - (イ) OAB はどのような形状の三角形かを述べよ。

1-発-8

複素数平面上の4点 A, B, C, D がこの順番で四角形の頂点となっているとする。それぞれを複素数 a, b, c, d で表す。これらの複素数が次の条件(), (), ()のすべてを満たすときに ABCD はどのような四角形となるかを述べよ。

() $a + c = b + d$

() $\frac{b-a}{d-a}$ は純虚数

() $\frac{(a-c)^2}{(a-d)(c-d)}$ は実数

1-発-9

複素数平面上で、点 1 と点 i を結ぶ線分を l とする。ただし、点 1 と点 i は l に含まれるとする。

点 z_1 と点 z_2 が独立に l 上を動くとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $z_1 + z_2$ の動く範囲を図示せよ。
- (2) 点 $z_1 z_2$ の動く範囲を図示せよ。

1-SP-1 (r3-1)

a が実数全体を動くとき, z の 2 次方程式

$$z^2 - 2az + 2a^2 - 1 = 0$$

の解を表す点は, 複素数平面上でどのような図形を描くか, 図示せよ.

2-標-1

- (1) $y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ で表される放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。
- (2) 焦点の座標が $(-1, 3)$, $(5, 3)$ で、長軸の長さが 10 である楕円の方程式を求めよ。
- (3) 点 $(2, 0)$ を 1 つの焦点とし、2 直線 $y - x - 1 = 0$ と $y + x + 1 = 0$ を漸近線とする双曲線の方程式を求めよ。

2-標-2

放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) の焦点 F を通る弦の両端 PQ から準線へ下した垂線の足をそれぞれ R , S とする。

(1) RF は SF に垂直であることを示せ。

(2) 線分 RS の中点を M とし, 2 線分 PR , QS の長さをそれぞれ a , b とするとき, 線分 MF の長さを a , b で表せ。

2-標-3

座標平面上にある3点 A, B, C があり, B の座標は $(-5, 0)$, C の座標は $(5, 0)$, 線分 AB の長さは $3\sqrt{10}$, 線分 AC の長さは $\sqrt{10}$ である。

- (1) 焦点が B, C で, 点 A を通るだ円の方程式を求めよ。
- (2) 焦点が B, C で, 点 A を通る双曲線の方程式を求めよ。
- (3) 点 A において (1) のだ円と (2) の双曲線にそれぞれ接線を引くと, この2本の接線は直交することを証明せよ。

2-標-4

点 $A(-a, 0)$ を中心とする半径 r_0 の円 C_0 の内部に, 点 $B(a, 0)$ を中心とする半径 r_1 の円 C_1 があり, $a \neq 0$ とする。円 C_0 に内接し, 円 C_1 に外接する円 C の中心 P の軌跡を求めよ。

2-標-5

座標平面上に、中心 $A(-2, 0)$ 、半径 1 の円 C_1 と中心 $B(4, 0)$ 、半径 4 の円 C_2 がある。 C_1 および C_2 に外接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

2-発-1

座標平面上に定点 $A(0, a)$ ($a > 0$) と動点 P がある。 P より x 軸に下ろした垂線の足を H とする。定数 $k > 0$ に対して、 $PA = k PH$ が成立するならば、点 P はある 2 次曲線上にある。

- (1) 2 次曲線が放物線となる k の値を求めよ。
- (2) 2 次曲線が楕円となる k の値と、楕円の中心を求めよ。
- (3) 2 次曲線が双曲線となる k の値と焦点の座標を求めよ。

2-発-2

放物線 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$) の弦 PQ の両端と頂点 O とを結ぶ線分 PO , QO が直交するならば, 直線 PQ は定点を通ることを示し, その定点 A の座標を求めよ。ただし, $P \neq O$, $Q \neq O$ とする。

2-発-3

放物線 $y^2 = 4px$ 上の頂点以外の点を P とし、 P における接線 g が x 軸と交わる点を Q 、放物線の焦点を F とする。また、 P を通り x 軸に平行な直線上の 1 点 R を放物線内にとる。このとき、 PR と接線 g のなす角は $\angle FPQ$ に等しいことを証明せよ。

2-発-4

- (1) 直交座標において、点 $A(\sqrt{3}, 0)$ と準線 $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ からの距離の比が $\sqrt{3}:2$ である点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。
- (2) (1)における A を極、 x 軸の正の部分と半直線 AX のなす角 θ を偏角とする極座標を定める。このとき、 P の軌跡を $r = f(\theta)$ の形の極方程式で求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ 、 $r > 0$ とする。
- (3) A を通る任意の直線と(1)で求めた曲線との交点を R, Q とする。このとき、 $\frac{1}{RA} + \frac{1}{QA}$ は一定であることを示せ。

2-発-5

楕円 $Ax^2 + By^2 = 1$ (A, B は正の定数) の外部の点 $P(x_0, y_0)$ から, この楕円にひいた接線の接点を Q, R とするとき, 直線 QR は $Ax_0x + By_0y = 1$ という方程式で表されることを示せ。

2-発-6

楕円 $Ax^2 + By^2 = 1$ (A, B は正の定数) 上の異なる 2 点 P, Q における接線の交点 R と原点 O を結ぶ直線は, 弦 PQ の中点 M を通ることを示せ。

2-発-7

だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の 2 つの焦点を F, F' とし, だ円上の動点を P とする。ただし, $a > b > 0$ である。ベクトル $\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PF'}$ の内積 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PF'}$ の値の範囲を求めよ。

2-発-8

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ がある。ただし, $a > 0, b > 0$ とする。

- (1) 2つの漸近線のなす角を θ とするとき, $\sin\theta$ を求めよ。
- (2) 双曲線上の点 $P(p, q)$ ($p > 0, q > 0$ とする) を通り, 2つの漸近線に平行な直線を引き, それぞれが漸近線と交わる点を Q, R とする。このとき, 平行四辺形 $OQPR$ (O は原点) の面積を求めよ

【例題 01】

実数 a, b が $0 < a < b < 1$ を満たすとき $\frac{2^a - 2a}{a - 1}$ と $\frac{2^b - 2b}{b - 1}$ の大小を比較せよ。(04 名古屋)

【例題 02】 $f(x) = |2x - 1|$ ($0 \leq x \leq 1$) とおく。

- (1) $y = f(f(x))$ のグラフを描け
- (2) $f(f(f(x))) = x$ の解の個数を求めよ。

3-標-1

a, b, c, d を実数とする. 2つの関数 $f(x) = a \cdot 3^x + b$, $g(x) = c \log_3 x + d$ と, これらの関数の逆関数 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$ が,

$$f(3) = 49, \quad f^{-1}(13) = 2, \quad g(9) = 1, \quad g^{-1}(5) = 27$$

を満たすものとする.

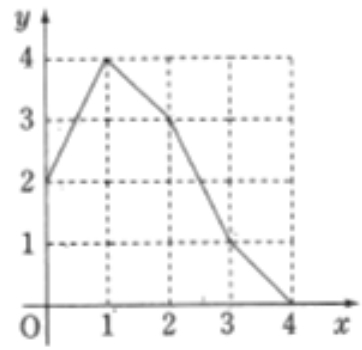
(1) a, b, c, d の値を求めよ.

(2) $(g \circ f)(1)$ の値を求めよ.

3-標-1

図の折れ線で表される関数を $f(x)$ ($0 \leq x \leq 4$) とする。この関数の 2 回の合成関数を $f_2(x) = f(f(x))$, 3 回の合成関数を $f_3(x) = f(f_2(x))$ とする。

- (1) 関数 $y = f_2(x)$ ($0 \leq x \leq 4$) のグラフをかけ
- (2) $0 \leq x \leq 4$ において, $f_3(x) + x - 4 = 0$ を満たす x はいくつあるか。



3-標-2

関数

$g(x) = x^2 + 2ax + 2$ について, 方程式 $g(g(x)) = g(x)$ が 3 つの異なる実数解をもつような実定数 a の値を求めよ。

3-標-3

2つの関数
$$\begin{cases} y = -(x - [x])^2 + [x + 1] & \dots\dots \\ y = kx & \dots\dots \end{cases}$$

を $x \geq 0$ で考える。ここで、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

- (1) $\quad$, $\quad$ のグラフの交点が1個であるような実数 k の値の範囲を求めよ。
- (2) $\quad$, $\quad$ のグラフの交点が n 個 ($n \geq 2$) であるような実数 k の値の範囲を求めよ。

3-発-1

定数 a を実数とし, $0 \leq x \leq \pi$ とする。

関数 $y = -\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 2a(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + 4$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $t = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ とするとき, t の値の範囲を求めよ。
- (2) y を t の式で表せ。
- (3) $0 \leq y \leq 6$ が常に成り立つように, a の値の範囲を定めよ。
- (4) 方程式 $-\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 2a(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + 4 = 0$ が 3 個以上の異なる実数解をもつように, a の値の範囲を定めよ。

3-発-2

$f(x) = x^2 - \frac{4}{5}$ とおく。

- (1) 2 次方程式 $f(x) = x$ の 2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とする。 α, β の値を求めよ。
- (2) (1) の α について, $f(f(\alpha))$ の値を求めよ。
- (3) 関数 $f(f(x))$ を求めよ。
- (4) 方程式 $f(f(x)) = x$ を解け。

【例題 01】

次の命題が真であるか偽であるかをいえ。ただし、真のときは証明し、偽のときは反例をあげよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

【例題 02】

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について, 次の命題の真偽をいえ。ただし, 真のときは証明し, 偽のときは反例をあげよ。

- (1) $\{a_n + b_n\}$ と $\{a_n\}$ が収束するならば, $\{b_n\}$ も収束する
- (2) $\{a_n^2\}$ が収束するならば, $\{a_n\}$ も収束する

4-標-1

() 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1})$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \log(x+2) - \log x \}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x$$

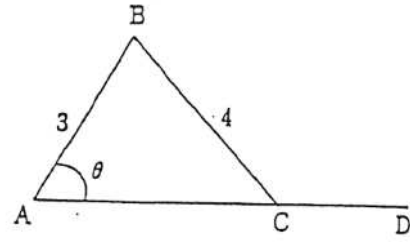
$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$$

() 次の極限の収束・発散を調べよ。

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi}$$

4-標-2

右図において, $AB = 3$, $BC = 4$, $AD = 7$ で,
 $\angle BAC$ の大きさ θ が変化するにしたがって点 C は
 AD 上を動く。 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{CD}{\theta^2}$ を求めよ。



4-標-3

関数 $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$) に対して, 漸化式

$$a_1 = 2, a_{n+1} = f(a_n) \quad (n \geq 1)$$

によって, 数列 $\{a_n\}$ を定める。また, 方程式 $x = f(x)$ の解を α とする。

(1) $a_n \geq \alpha$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(2) $a_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

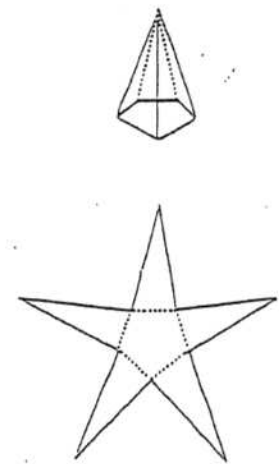
4-発-1

$n \geq 3$ とし, 正 n 角すいの表面を, 底面に含まれない n 個の辺で切り開いて得られる展開図を考える。正 n 角すいの頂点は, 展開図においては, 異なる n 個の点になっている。ここでは, これらの n 個の点を通る円の半径が1であるような, 正 n 角すいのみを考えることにする。

(1) 各 n に対して, このような正 n 角すいの体積の最大値 v_n を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ を求めよ。

(注) 図は, $n=5$ の場合の正 n 角すいとその展開図の例である。



4-発-2

$OA_1 = OB = 1$, $\angle B_1OA_1 = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) であるような二等辺三角形 OA_1B_1 がある。

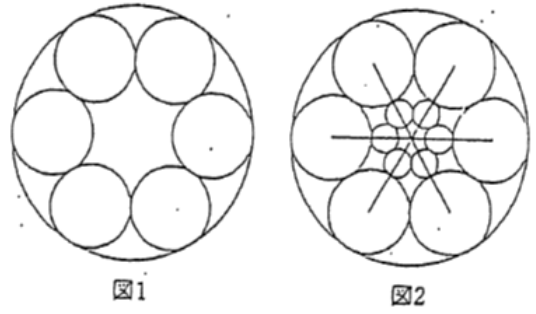
辺 A_1B_1 の中点を B_2 とし, 辺 OA_1 上に $OA_2 = OB_2$ となる点 A_2 をとり, 二等辺三角形 OA_2B_2 をつくる。以下同様にして, $n > 2$ についても二等辺三角形 OA_nB_n を作っていく。

辺 OA_n の長さを a_n とおく。

- (1) $a_3 \cdot \sin \frac{\theta}{4}$ を計算せよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を計算せよ。

4-発-3

半径 1 の円に内接する $3n$ 個の半径の等しい円を図 1 のように描く。さらに図 2 のように $3n$ 個の小さな半径の等しい円を描く。この操作を無限に繰り返したとき、 $3n$ 個ずつ次々に描かれる円の面積の総和 S_n と、それらの円の円周の長さを総和 C_n を求めよ。ただし、 $n \geq 2$ とする。



4-発-4

$-\pi \leq x \leq \pi$ のとき，無限級数

$$\sin^2 x + \sin^2 x \cos^3 x + \sin^2 x \cos^6 x + \cdots + \sin^2 x \cos^{3(n-1)} x + \cdots$$

の和を $f(x)$ とする。

$f(x)$ の増減を調べ， $y = f(x)$ のグラフを描け。

4-発-5

関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}a + bx - cx^n}{1 + 3^{n-1} + x^{n-1}}$ は実数全体で定義され、かつ $f(-3) = 3$ である。ただし、 n は自然数とする。

- (1) a, b, c の値を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

4-発-6

2つの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ がそれぞれ和 A, B を持つとき , 次の問いに答えよ。ただし , $a_1 = 1$ とする。

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n + a_{n+1})$ を A, B で表せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$ のとき , $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_n - a_{n+1})$ を A, B で表せ。

4-発-7

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi \cos x$ について次の問いに答えよ.

- (1) $x = f(x)$ はただ 1 つの解を持つことを示せ.
- (2) 数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n \geq 1$) で定めるとき, $\{x_n\}$ が収束することを示し $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ

4-発-8

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ は第2次導関数を持ち、つねに $f'(x) \neq 0$ を満たすとする。また、方程式 $f(x) = 0$ はただ1つの実数解 α をもつとする。

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ とおく.}$$

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線と x 軸との交点を $(x_{n+1}, 0)$ とする。このとき、 $x_{n+1} = F(x_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$ が成り立つことを示せ.)
- (2) すべての実数 x に対して $|f(x)f''(x)| \leq M\{f'(x)\}^2$ を満たす定数 M ($M \geq 0$) が存在するとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq M|x - \alpha| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (3) 定数 M が1より小さいとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ となることを示せ。

【過去問めぐり 1】2007 聖マリアンナ医科大学

[1] n を自然数として, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ の値を以下のように求める。

$$\boxed{}^n < 2^n + 3^n < 2 \times \boxed{}^n \text{ だから, この各辺を } \frac{1}{n} \text{ 乗して,}$$

$$\boxed{} < (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \times \boxed{} \text{ となる。}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} \times \boxed{}) = \boxed{} \text{ だから } \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{}$$

(解答群)

$$0, 1, 2, 3, e, 2e, 3e, e^2, e^3, \infty$$

(e は自然対数の底を表す)

[2] $0 \leq a < b$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \boxed{}$

[3] $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^{2n} x + \sin^{2n} x)^{\frac{1}{n}}$ とおく。

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{}, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{}, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{} \text{ である。}$$

[4] 前問[3]の $f(x)$ について, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を計算しなさい。なお, 計算の過程も含めて記載しなさい。

二変数不等式の証明

【例題 01】 $b \geq a > 0$ とする。不等式 $\log b - \log a \geq \frac{2(b-a)}{b+a}$ を証明せよ。

【例題 02】 $0 < a < b$ とする。不等式

$$-(a+1)e^{-a} < \frac{(b+2)e^{-b} - (a+2)e^{-a}}{b-a} < -(b+1)e^{-b}$$

を証明せよ。

【例題 03】 a と b を正の数とする。このとき, $\sqrt{a^a b^b} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}$ を証明せよ。

【例題 04】 a, b を正の数とする。不等式 $a \log(1+a) + e^b > 1 + ab + b$ を証明せよ。

5-標-1

次の関数を微分せよ。 $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

5-標-2

(1) $y = x^{\log x}$ を微分せよ

(2) $x^2 + xy + y^2 = 4$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を x と y の式で表せ。

(3) $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ の逆関数の導関数を x の式で表せ。

5-標-3

$x = 1 - \cos \theta$, $y = \theta - \sin \theta$ のとき, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を θ で表せ。

5-標-4

曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ の接線と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積の最大値を求めよ。

5-標-5

 FGs39-3

t を定数として, xy 平面上の直線 $C_t : y = (x+t)e^t$ を考える. t が $t > 0$ の範囲を変化するとき, C_t が通る範囲を求め, その概形を図示せよ.

5-発-1 $x > 0$ の範囲で定義される関数 $f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^{\log x}$ について, $y = f(x)$ の増減, 凹凸を調べ, そのグラフの概形をかけ。

5-発-2 $y = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$ のグラフを描け。

5-発-3 曲線 $y = (x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$ について, (1) 漸近線の方程式, (2) y の増減, (3) 曲線の凹凸を調べ, その概形をかけ。

5-発-4 xy 平面上の曲線 $y = \cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)$ と, 原点を中心とする半径 r の円との共有点の個数 $N(r)$

を求めよ。

5-発-5 パラメータ表示 $\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$ で与えられる曲線(サイクロイド)を C , 中

心 $(a, 1)$, 半径 1 の円を B とする。 $0 < a < \pi$ のとき , C と B の共有点はいくつ存在するか。

5-発-6 座標平面上に、媒介変数 θ で表された曲線 $\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ がある。

この曲線上の異なる 2 点 P, Q での接線が互いに直交するとき、 PQ の中点の軌跡を求めよ。

5-発-7 曲線 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 上の点 $P(x, y)$ における接線 PT と、法線 PN とが x 軸と交わる点をそれぞれ T, N とする。ただし、 $x > 0$ とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) PTN の面積は、 $\frac{y^4}{2y'}$ に等しいことを示せ。
- (2) 点 $P(x, y)$ が曲線上を動くとき、 PTN の面積が最小となる点 P の座標と最小値を求めよ。

5-発-8 関数 $y = \frac{bx+1}{x^2+ax}$ ($a > 0, b > 0$) が 2 つの極値 $-1, -4$ をとるように a, b の値を求めよ。

5-発-9 曲線 $y = \frac{a-x}{x^2+1}$ が相異なる 3 つの変曲点をもつとき，3 つの変曲点は同一の直線上にあることを示せ。

5-発-10 $0 \leq x \leq 1$ で, 不等式 $1 - kx \leq \frac{2}{1 + e^x} \leq 1 - lx$ が, つねに成り立つような k の最小値および l の最大値を求めよ。

【例題 01】 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ の値を α とすると, $e^\alpha = \boxed{\text{ノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$ である。2007 東邦

6-発-1

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$$

$$(2) \int \frac{\log(\sin^2 x)}{\tan x} dx$$

$$(3) \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$

6-発-2

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$(2) \int_1^3 \sqrt{4x - x^2} dx$$

6-発-3

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^4 \frac{1}{x^2 - 2x + 4} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

6-発-4

次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^3(x-2)} dx$$

6-発-5

(1) m, n を正の整数とするとき, 次の定積分の値を求めよ。

$$() \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx$$

$$() \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$$

(2) a, b, c を定数とするとき, 定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| x - (a \sin x + b \sin 2x + c \sin 3x) \right|^2 dx$$

の値を最小にする a, b, c および最小値を求めよ。

6-発-6

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ の値を求めよ。

6-発-7

次の定積分の値を求めよ。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \log(\sqrt{3} + \tan x) dx$$

6-発-8

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ とおくとき I_1 と I_2 の関係を導いて, それらの値を求めよ

6-発-9

定積分 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ の値を求めよ。

6-発-10

- (1) 関数 $f(x)$ はつねに $f(x) = f(-x)$ を満たす。このとき,

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^{-x}} dx = \int_0^a f(x) dx \text{ となることを示せ。}$$

- (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+e^{-x}} dx$ を計算せよ。

6-発-11

次の積分を計算せよ。ただし, n は自然数とする。

$$(1) \quad I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

$$(2) \quad J_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx$$

6-補-1 (j5-4) ○

次の問に答えよ.

(1) $\tan x = t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ のとき, $\cos 2x$ と $\frac{dx}{dt}$ をそれぞれ, t を用いて表せ.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2 - \cos 2x} dx$ を求めよ.

(3) 関数 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ.

(4) $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくことにより, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ を求めよ.

6-補-2 (j17-4)

$y = f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で定義された連続な関数で $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ であり,
 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ であるすべての x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ を満たしているとする.
 $x = g(y)$ を $0 \leq y \leq 1$ で定義された f の逆関数とする.

$$5 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 g(y) dy$$

が成り立つとき, $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ.

【例題 01】2012 東邦

$0 \leq t \leq \sqrt{2}$ を定義域とする t の関数 $\int_0^{\frac{3}{2}} \left| t - \sqrt{2 - \frac{4}{3}x} \right| dx$ が最小となるような t の値を求めよ。【改題（原題は最小値を求めるマーク式問題）】

【例題 02】 xy 平面上の曲線 C は媒介変数 t ($0 \leq t \leq 2$) を用いて $x = t(2-t)$, $y = t(2-t)^2$ と表される。曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。(2014 東邦)

【例題 03】2008 杏林

座標平面上で

$$9x^2 - 54x + 4y^2 + 45 = 0 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

で表される楕円 C がある。① を x について解くと、 C は

$$x = \boxed{\text{ア}} - \frac{\boxed{\text{イ}} \sqrt{\boxed{\text{ウ}} - y^2}}{\boxed{\text{エ}}} \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

$$x = \boxed{\text{オ}} + \frac{\boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}} - y^2}}{\boxed{\text{ク}}} \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

という 2 曲線で表される。 x 軸に平行な C の 2 つの接線を l_1, l_2 とする。曲線 ②, l_1, l_2 および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は、 $\boxed{\text{ケコサ}}\pi^2 + \boxed{\text{シス}}\pi$ となり、曲線 ③, l_1, l_2 および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は、 $\boxed{\text{セソ}}\pi^2 + \boxed{\text{タチ}}\pi$ となる。 C を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は、 $\boxed{\text{ツテ}}\pi^2$ である。さらに、 $x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0$ で表される円と C によって囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は、 $\boxed{\text{トナ}}\pi^2$ となる。

【例題 04】2014 獨協

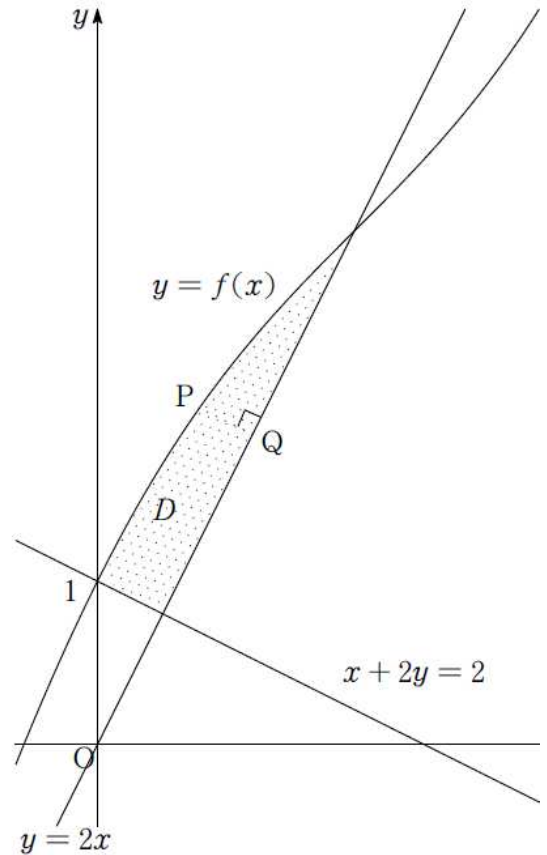
関数 $f(x) = 2x + \cos x$ がある。 xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分を C とし、 C と直線 $y = 2x$ 、および直線 $x + 2y = 2$ で囲まれた領域を D とする。領域 D を直線 $y = 2x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよう。

C 上の点 $P(t, f(t))$ から直線 $y = 2x$ におろした垂線と直線 $y = 2x$ との交点を Q とする。

線分 PQ の長さは $\frac{|\cos t|}{\sqrt{\text{ア}}}$ であり、点 Q の x 座標は $t + \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \cos t$ である。これから、 $OQ = s$ とおくと $s = \sqrt{\text{エ}} \left(t + \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \right)$ である。

$f'(x) = 2 - \sin x > 0$ なので $f(x)$ は増加する。よって、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}\pi} \pi PQ^2 ds \\ &= \sqrt{\frac{\text{オ}}{\text{カ}}} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t - \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \cos^2 t \sin t \right) dt \\ &= \sqrt{\frac{\text{ケ}}{\text{コサ}}} \pi^2 - \frac{\text{シ}}{\text{セソ}} \sqrt{\frac{\text{ス}}{\text{ソ}}} \pi \end{aligned}$$



積分と漸化式

○ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ のとき, $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$

○ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ のとき

区間逆走で, $I_n = J_n$

一個セパレートで, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ ジグザグカウントダウン

○ Beta 関数

$I(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ のとき,

$I(m, n) = \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$ より,

$I(m, n) = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}$

○ $\tilde{I}(m, n) = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx = \frac{m! n!}{(m+n+1)!} (\beta-\alpha)^{m+n+1}$

$t = (\beta - \alpha)x + \alpha$ の置換で Beta 関数に帰着 (面積公式の一般化)

○ $I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$ のとき, $I_n = e - n I_{n-1}$

○ $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$ のとき, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!} e$

【例題 05】

数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$ で定める。ここで e は自然対数の底とする。次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq \int_0^1 t^n e^{-t} dt \leq 1 - e^{-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。

(3) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{(n+1)!} e$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(4) $e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ を示せ。

積分と級数

○メルカトル級数

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1 + x}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で定積分 } \int_0^1 \{1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1}\} dx = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^n}{1 + x} dx$$

$$\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right]_0^1 = [\log|1+x|]_0^1 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} = \log 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ より,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \log 2$$

○ライプニッツ級数

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-x)^{2(n-1)} = \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で定積分 } \int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-x)^{2(n-1)}\} dx = \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} dx$$

$$\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right]_0^1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4} - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = 0$ より,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

積分と不等式 (評価), そして極限

○数列の和 = 棒グラフとみなして, 定積分 = 面積と比較

○被積分関数の評価から, 定積分の評価を作る

7-標-1

関数 $f(x) = \sin(\sqrt{x}\pi)$ ($0 \leq x \leq 4$) に対し, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

7-標-2

平面上で, 原点 O から曲線 $y = (9 - 2x)e^x$ に 2 本の接線を引き, その接点を P, Q とする。2 つの線分 OP, OQ と曲線の弧 $\widehat{PQ}$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

7-標-3

曲線 $y = -\log ax$ ($a > 0$) と, 原点を中心とするある円とが, x 座標が 1 となる点で接している。このとき a の値を定め, 曲線, 円および x 軸の正の部分で囲まれる部分の面積 S を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。

7-標-4

関数 $y = \tan x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right)$ の逆関数を $y = f(x)$ とするとき、 $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。

7-標-5

$f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - t \sin x| dx$ とおく。関数 $f(t)$ の $t > 0$ における最小値を求めよ。

7-標-6

$f(x) = \pi x^2 \sin \pi x^2$ とする。 $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

7-標-7

関数 $y = f(x) = \log \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} - \sqrt{1 - x^2}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。

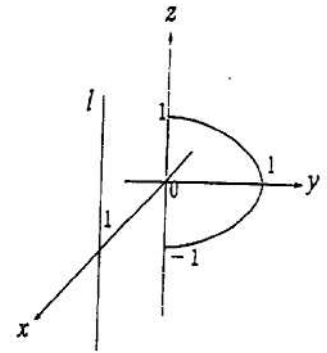
(2) 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$, $y = a$ ($a > 0$) および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を $V(a)$ とする。このとき、極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

7-標-8

放物線 $y = x^2 - 1$ の x 軸より下の部分を、 y 軸のまわりに回転して得られる容器を U とする。 U に水を満たし、そのあとで半径 1 の鉄球を U に静かに入れたとき、残った水の体積を求めよ。

7-標-9

xyz 空間において, 点 $(1, 0, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とする。 yz 平面内であって, $y = 1 - z^2$ で表される曲線の $-1 \leq z \leq 1$ なる部分を, 直線 l のまわりに回転してできる曲面と, 平面 $z = 1$ および, $z = -1$ とによって囲まれる部分の体積を求めよ。



7-標-10

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, a \text{は定数で } a > 0)$$
 で表される曲線 C がある。

- (1) 曲線 C の概形をかけ。
- (2) 曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C と x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

7-発-1

z 軸を軸とする半径 1 の円柱の側面で, xy 平面より上 (z 軸の正の方向) にあり, 平面 $x - \sqrt{3}y + z = 1$ より下 (z 軸の負の方向) にある部分を D とする。 D の面積を求めよ。

7-発-2

$x^2 - xy + y^2 = 1$ の $y \geq 0$ の部分を x 軸のまわりに回転した立体の体積を求めよ。

7-発-3

正四面体 T と半径 1 の球面 S とがあって T の 6 つの辺がすべて S に接しているという。

- (1) T の一辺の長さを求めよ。
- (2) T の外側にあって、 S の内側にある部分の体積を求めよ。

7-発-4

座標空間において、2 点 $P(2, 0, 0)$ 、 $Q(2, 0, 9)$ を結ぶ線分 PQ を z 軸のまわりに回転して得られる曲面と、平面 $z = 0$ および平面 $3x + z - 3 = 0$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

7-発-5

xyz 空間において条件

$$x^2 + y^2 \leq z^2, z^2 \leq x, 0 \leq z \leq 1$$

を満たす点 $P(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える。この立体の体積を V とし、 $0 \leq k \leq 1$ に対し、 z 軸に直交する平面 $z = k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする。

(1) $k = \cos \theta$ とおくとき、 $S(k)$ を θ で表せ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

(2) V の値を求めよ。

7-発-6

D を半径 1 の円板, C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。 D が次の条件 (a), (b) を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき, D が通過する部分の体積を求めよ。

(a) D の中心は C 上にある。

(b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0, 1, 0)$ と直交する。

7-発-7

xyz 空間において, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$ によって表される立体の体積を求めよ。

7-発-8

x 軸, y 軸, z 軸を軸とする半径 1 の 3 個の直円柱 T_1, T_2, T_3 がある。

- (1) T_1 と T_2 の内部の共通部分の体積を求めよ。
- (2) T_1 と T_2 および T_3 の内部の共通部分の体積を求めよ。

7-発-9

xy 平面上に円板 $D: x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$ がある。

平面 $z = 1$ 上に、点 $(0, 0, 1)$ を重心にもち、頂点の 1 つが $A(0, 3, 1)$ の正三角形 T (内部を含む) がある。

点 Q が D 全体を動くとき、線分 AQ の通過する領域を V_1 とする。

また、点 P が T 全体を動き、点 Q が D 全体を動くとき、線分 PQ の通過する領域を V_2 とする。

7-発-10

$\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ で表される曲線を C とする。

- (1) C の概形を図示せよ。
- (2) C が囲む部分を y 軸中心に回転してできた立体の体積を求めよ。

7-発-11

曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ でこの曲線の接線とで囲まれた図形を直線 $y = x$ のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

7-発-12

xyz 空間内の平面 $y = 1$ 上で $(x-1)^2 + z^2 = 1, y = 1$ で表される図形を D とする。 D を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を M とする。

- (1) 平面 $z = h$ ($-1 \leq h \leq 1$) による立体 M の切り口の面積を求めよ。
- (2) 立体 M の体積を求めよ。

7-発-13

xyz 空間内に、3 点 $P\left(1, \frac{1}{2}, 0\right), Q\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right), R\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正三角形の板 S がある。

S を z 軸のまわりに一回転させたとき、 S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

7-発-14

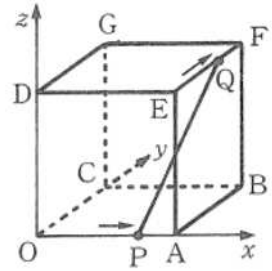
xyz 空間で、 xy 平面上の原点を中心とし半径が1の円を C とする。2点 $A(0,0,1)$ 、 $B(1,0,1)$ を結ぶ線分 AB 上に点 P をとり、 P を頂点とし円 C を底面とする円すいを考え、 P を A から B まで動かすとき、このような円すい全体でつくられる立体を D とする。

- (1) 平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) でこの立体 D を切った切り口の面積を求めよ。
- (2) 立体 D の体積を求めよ。

7-発-15

図のように xyz 空間に一辺の長さが1の立方体 $DEFG-OABC$ がある。
2つの動点 P, Q はそれぞれ O, E を同時に出発し, P は正方形 $OABC$ 上をこの順に一周し, Q は P と同じ速さで正方形 $EFGD$ をこの順に一周する。このとき線分 PQ が通過してできる曲面と正方形 $OABC$, 正方形 $EFGD$ によって囲まれる立体を K とする。

- (1) 平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) でこの立体 K を切った切り口の面積を求めよ。
- (2) 立体 K の体積を求めよ。



7-発-16

一辺の長さが 1 の立方体を，中心を通る対角線のうちの 1 本を軸として回転させたとき，この立方体が通過する部分の体積を求めよ。

SP 7-1 (j29-4) ○

 xy 平面を水平にとり, xz 平面に曲線

$$C : z = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ x^2 - 1 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

を描く. さらに, C を z 軸のまわりに回転してできる容器に, 毎秒 π の割合で水を注ぐ.

(1) 注水を始めてからこの容器がいっぱいになるまでの時間を求めよ.

(2) 注水し始めてから 4 秒後の水面が上昇する速さと, 水面の半径が増大する速さを求めよ.

