数学③ 第7回試験 数III積分計算+おかわり 1 / 6

1 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ を求めよ。

2 自然数 n に対して $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおく。

(1) I_n と I_{n-2} の関係式
を求めよ。ただし、 $n \geq 3$ とする。

(2) I_5 を求めよ。

3 (1) $f(x)$ を連続関数とすると、 $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$ の値を求めよ。

4 $\frac{d}{dx} \log(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = \frac{\boxed{}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$,

$\frac{d}{dx} (x\sqrt{4x^2 + 1}) = 2\sqrt{4x^2 + 1} - \frac{\boxed{}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

が成り立つ。これを利用すれば、

$\int_0^1 \sqrt{4x^2 + 1} dx = \int \boxed{}$ が得られる。

5 定積分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$ を求めよ。

6 定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について、次の問いに答えよ。

(1) I_1, I_2 を求めよ。

(2) I_{n+2} を I_n で表せ。

(3) I_6 を求めよ。

7 $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくことで、不定積分 $\int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x} dx$ を求めよ。

数学③ 第7回試験 数III積分計算+おかわり 2 / 6

1 解答 $\frac{\pi}{4}$

2 解答 (1) $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (2) $I_5 = \frac{8}{15}$

3 解答 (1) 略 (2) $\pi\left(1 - \frac{4}{3}\log 2\right)$

4 解答 (ア) 2 (イ) 1 (ウ) $\frac{1}{4}\log(2 + \sqrt{5}) + \frac{\sqrt{5}}{2}$

5 解答 $\frac{1}{3}$

6 解答 (1) $I_1 = \frac{1}{2}\log 2$, $I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$ (2) $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$ (3) $I_6 = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$

7 解答 $\log \left| \frac{2\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 2} \right| + C$ (C は積分定数)

数学③ 第7回試験 数III積分計算+おかわり 3 / 6

① $x = \frac{\pi}{2} - y$ とおくと $dx = -dy$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
y	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} \cdot (-1) dy \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos y}{\cos y + \sin y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{\sin y + \cos y} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \text{ であるから} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

② (1) $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cdot (\sin x)' dx \\ &= \left[\cos^{n-1} x \cdot \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-1} x)' \cdot \sin x dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

よって $n I_n = (n-1) I_{n-2}$

(2) (1) より, $n \geq 3$ のとき $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

したがって $I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{8}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{8}{15} [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$

□3 (1) $I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx$ とおく。

$f(\sin x) = f(\sin(\pi - x))$ であることに着目して、 $t = \pi - x$ とおく。

このとき $dx = -dt$

$$\begin{aligned} \text{よって } I &= \int_0^\pi x f(\sin x) dx \\ &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) \cdot (-dt) \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - I \end{aligned}$$

ゆえに $I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$

(2) $J = \int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx$ とおく。

関数 $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 8}$ は連続関数であるから、(1) より

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x + 8} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x (\sin^2 x + 8) - 8 \sin x}{\sin^2 x + 8} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \left(\sin x - \frac{8 \sin x}{\sin^2 x + 8} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\pi \sin x dx - \int_0^\pi \frac{8 \sin x}{9 - \cos^2 x} dx \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

$\int_0^\pi \frac{8 \sin x}{9 - \cos^2 x} dx$ について、 $u = \cos x$ とおく。

$du = -\sin x dx$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{8 \sin x}{9 - \cos^2 x} dx &= 8 \int_1^{-1} \frac{1}{9 - u^2} \cdot (-du) \\ &= 8 \int_{-1}^1 \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3+u} + \frac{1}{3-u} \right) du \\ &= \frac{4}{3} [\log|3+u| - \log|3-u|]_{-1}^1 \\ &= \frac{4}{3} (\log 4 - \log 2 - \log 2 + \log 4) = \frac{8}{3} \log 2 \end{aligned}$$

よって $J = \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{8}{3} \log 2 \right) = \pi \left(1 - \frac{4}{3} \log 2 \right)$

x	$0 \rightarrow \pi$
t	$\pi \rightarrow 0$

x	$0 \rightarrow \pi$
u	$1 \rightarrow -1$

$$\begin{aligned} \boxed{4} \quad \frac{d}{dx} \log(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) &= \frac{2 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}}}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{4x^2 + 1} + 4x}{\sqrt{4x^2 + 1}(2x + \sqrt{4x^2 + 1})} = \frac{\cancel{2}^{\cancel{2}}}{\sqrt{4x^2 + 1}} \\ \frac{d}{dx} (x\sqrt{4x^2 + 1}) &= \sqrt{4x^2 + 1} + x \times \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = \sqrt{4x^2 + 1} + \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2 + 1}} \\ &= \sqrt{4x^2 + 1} + \frac{(4x^2 + 1) - 1}{\sqrt{4x^2 + 1}} = 2\sqrt{4x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \\ \int_0^1 \sqrt{4x^2 + 1} dx &= \int_0^1 \left\{ \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} \times \frac{1}{4} + \left(2\sqrt{4x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right) \times \frac{1}{2} \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\log(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[x\sqrt{4x^2 + 1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5}) + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1 + e^x} dx \text{ において,}$$

x	$-1 \rightarrow 0$
t	$1 \rightarrow 0$

$$x = -t \text{ とおくと } dx = -dt$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1 + e^x} dx &= \int_1^0 \frac{(-t)^2}{1 + e^{-t}} (-dt) = \int_0^1 \frac{t^2}{1 + e^{-t}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{1 + e^{-x}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx &= \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1 + e^x} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2 e^x}{1 + e^x} + \frac{x^2}{1 + e^x} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2(1 + e^x)}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{6} \quad (1) \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[-\log(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left[\frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n \\ &= \frac{1}{n+1} - I_n \end{aligned}$$

$$(3) \quad (1), (2) \text{ から } I_6 = \frac{1}{5} - I_4 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} - I_2 \right) = -\frac{2}{15} + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{7} \quad \tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくと} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{また, } \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} dx = dt \text{ から} \quad dx = 2 \cos^2 \frac{x}{2} dt = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$3 \sin x + 4 \cos x = 3 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = -2 \cdot \frac{2t^2 - 3t - 2}{1+t^2}$$

$$\text{よって} \quad \int \frac{5}{3 \sin x + 4 \cos x} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{1+t^2}{2t^2 - 3t - 2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= -5 \int \frac{dt}{2t^2 - 3t - 2} = -5 \cdot \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{2}{2t+1} \right) dt$$

$$= - \left(\log |t-2| - 2 \cdot \frac{1}{2} \log |2t+1| \right) + C$$

$$= \log \left| \frac{2t+1}{t-2} \right| + C = \log \left| \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 2} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$